SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE
DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

CONSTANTIN CĂRBUNARU, ION CHEȘCĂ, VALERIU MANGU,
ADRIAN NEGRU, JULIA SEBESTYÉN

9

CULEGERE DE PROBLEME
în sprijinul elevilor claselor I—VIII

PARTEA a II-a
CLASELE VI—VIII

Coordonator Acad. NICOLAE TEODORESCU

BUCUREȘTI

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

CONSTANTIN CĂRBUNARU, ION CHEŞCĂ, VALERIU MANGU,
ADRIAN NEGRU, JULIA SEBESTYÉN

MATEMATICA ÎN GIMNAZIU ŞI LICEU, VOL. II **9**

CULEGERE DE PROBLEME în sprijinul elevilor claselor I-VIII

PARTEA a II-a
CLASELE VI — VIII

Coordonator : Acad. NICOLAE TEODORESCU

BUCUREŞTI

Lucrarea face parte din planul de tipărituri al Ministerului Educației și Învățămîntului, tipărirea fiind aprobată de către Consiliul Culturii și Educației Socialiste cu nr 16331/1983, poziția 91

Referenți:
Paul Radovici-Mărculescu, matematician dr.
Radu Nicolescu, matematician dr.
Liviu Pîrșan, profesor

MATERIALUL DIN ACEASTĂ LUCRARE A FOST ELABORAT ASTFEL:

Secțiunea a IV-a: (cl. a VI-a)	**Algebră: V. Mangu, I. Cheșcă** **Geometrie: C. Cărbunaru, Julia Sebestyén**
Secțiunea a V-a: cl. a VII-a	**Algebră: V. Mangu, I. Cheșcă** **Geometrie: Julia Sebestyén, A. Negru**
Secțiunea a VI-a: cl. a VIII-a)	**Algebră: I. Cheșcă, V. Mangu** **Geometrie: C. Cărbunaru, A. Negru, Julia Sebestyén**

SECȚIUNEA A IV-A

CLASA a VI-a

ALGEBRA

CAPITOLUL I

PROBLEME RECAPITULATIVE DIN CLASA A V-A

I.1. Să se înlocuiască steluțele cu cifre:

$$\text{a)}\ \begin{array}{r} 1{*}6\ + \\ 1{*}\ \ \ \\ \hline {*}02\ \ \end{array} \qquad \text{b)}\ \begin{array}{r} 3{*}45+ \\ {*}73{*}\ \ \\ \hline 92{*}4\ \ \end{array} \qquad \text{c)}\ \begin{array}{r} {*}{*}{*}{*}+ \\ 792{*}\ \ \\ \hline 9753\ \ \end{array}$$

R. a). Steluța din rîndul al doilea nu poate înlocui decît cifra 6, căci nici o altă cifră adunată cu 6 nu dă un număr terminat în 2. Steluța din rîndul întîi înlocuiește cifra 8. În adevăr, prin adunarea cifrelor de prim ordin, 6 + 6, a rezultat o unitate de ordinul al doilea care adunată cu cifra 1 din rîndul al doilea, dă două unități de al doilea ordin. Ori, 8 este singura cifră care adunată cu 2 dă un număr terminat cu 0. Din adunarea 8 + 1 + 1 = = 10 rezultă o unitate de al treilea ordin care adunată cu cifra 1 din rîndul întîi conduce la două unități de al treilea ordin. Deci steluța din rîndul al treilea înlocuiește cifra 2. Așadar, avem schema:

$$\begin{array}{r} 186\ + \\ 16\ \ \ \\ \hline 202\ \ \end{array}$$

b) Ultima steluță din rîndul al doilea înlocuiește cifra 9, căci 9 este singura cifră care adunată cu 5 conduce la un număr care se sfîrșește în 4. Cum 5 + 9 = 14, iar 4 + 3 = 7 (cifrele de al doilea ordin), rezultă că steluța din al treilea rînd înlocuiește cifra 4 + 3 + 1 = 8. Rezultă imediat că steluța din primul rînd înlocuiește cifra 5 (nu avem unități de transport). Din adunarea 5 + 7 = 12 avem o unitate de transport și atunci, din egalitatea 1 + 3 + * = 9 rezultă că prima steluță din al doilea rînd înlocuiește cifra 5. Așadar, adunarea reconstituită este:

$$\begin{array}{r} 3\,545\ + \\ 5\,739\ \ \ \\ \hline 9\,284\ \ \ \end{array}$$

c). Această adunare cere o analiză mai atentă. Să presupunem că steluța din al doilea rînd înlocuiește cifra 0. Rezultă atunci că ultima steluță din primul rînd nu poate fi decît 3. Mai mult, putem determina dintr-o dată numărul necunoscut, ca fiind 9 753 − 7 920 = 1 833. Dacă în locul steluței din al doilea rînd punem cifra 1, rezultă că numărul necunoscut din primul rînd este 9 753 − 7 921 = 1 832. Înlocuind, succesiv, steluța din rîndul al doilea cu cifrele 2, 3, ..., 9, pentru numărul din primul rînd obținem: 1 831, 1 830, 1 829, 1 828, 1 827, 1 826, 1 825, 1 824.

I.2^M. Care este cel mai mic număr natural de cinci cifre care să aibă cifra zecilor 5? Dar cel mai mic număr natural de cinci cifre care să aibă cifra sutelor 8?

R. Cel mai mic număr natural de cinci cifre este 10 000. Dacă cifra zecilor este 5 obținem numărul 10 050. Cel mai mic număr de cinci cifre care are cifra sutelor 8 este 10 800.

I.3^M. Să se afle cel mai mic număr natural de cinci cifre, care îndeplinește următoarele două condiții:

a) Nu este mai mic decît 34 442.

b) Nu are cifre care să se repete.

R. Fiind mai mare decît 34 442, evident el nu poate fi de forma 344**, căci, în acest caz cifra 4 se repetă de două ori. Să încercăm atunci să găsim numărul de forma 34 5**. Cel mai mic număr natural de această formă este 34 501. El are toate cifrele distincte.

I.4. Să se înlocuiască steluțele cu cifre:

a)
```
 2*0 —
 *99
 ----
  41
```
b)
```
 7054 —
  ***
 -----
 6438
```
c)
```
 7*9 —
 254
 ----
 *1*
```

R. a). Scăderea 8 — 9 nu se poate efectua (nu este număr natural). Trebuie să „ne împrumutăm", deci, de la ordinul imediat următor cu o unitate. Steluța din primul rînd trebuie atunci să înlocuiască cifra 4 („împrumutîndu-ne" cu o unitate, obținem 13 — 9 = 4). Deci steluța din rîndul al doilea înlocuiește cifra 1. Așadar, schema reconstituită a scăderii este:

```
 240 —
 199
 ----
  41
```

b). Efectuînd proba scăderii, rezultă că numărul căutat este 7 054 — 6 438 = 616.

c). Evident, ultima steluță din rîndul al treilea înlocuiește cifra 9 — 4 = 5. Cum 6 este singura cifră cu proprietatea 6 — 5 = 1, rezultă că steluța din primul rînd înlocuiește cifra 6. Rămîne, atunci, că prima steluță din al treilea rînd înlocuiește cifra 7 — 2, adică 5. Scăderea reconstituită este:

```
 769 —
 254
 ----
 515
```

I.5^M. Un muncitor execută 24 de piese de același fel pe oră. Cîte piese execută muncitorul în 12 zile, lucrînd cîte 8 ore pe zi?

R. În 8 ore, muncitorul execută un număr de $24 \times 8 = 192$ piese. Rezultă, atunci, că în 12 zile execută $192 \times 12 = 2\,304$ piese.

I.6^M. Să se refacă următoarea înmulțire:

```
  2* ×
  *6
 ----
 1**
 *5
 ----
 **0
```

înlocuind steluțele cu cifre. Cîte soluții are problema?

R. Evident, ultima steluță din al treilea rînd înlocuiește cifra 0 (căci ea apare și în ultimul rînd, unde se realizează totalul rîndurilor 3 și 4). Deoarece ultima cifră din rîndul 3 este 0 rezultă că ultima steluță din primul rînd înlocuiește sau cifra 5, sau cifra 0, căci acestea sînt singurele cifre care înmulțite cu 6 dau un număr care se termină cu 0.

Să presupunem că această cifră înlocuieşte cifra 0. Rezultă atunci, după ce, înmulţim pe 6 cu cifrele lui 20, că steluţa din rîndul al treilea înlocuieşte cifra 2. Prin înmulţirea cifrei înlocuită în rîndul al doilea cu steluţă vom obţine în al doilea rînd un număr terminat cu 0, contrar faptului că în schemă ne apare un număr terminat în 5.

Deci ultima cifră a numărului din primul rînd nu poate fi 0. Să vedem dacă ea poate fi 5. Cum $25 \times 6 = 150$, rezultă că steluţa din al treilea rînd, înlocuieşte cifra 5. Schema devine:

$$\begin{array}{r} 25\times \\ *6 \\ \hline 150 \\ *5 \\ \hline **0 \end{array}$$

Rezultă că a doua steluţă din ultimul rînd înlocuieşte pe 0. Avînd în vedere că numărul din al patrulea rînd se termină în 5 rezultă că cifra înlocuită de steluţa din al doilea rînd este impusă (prin înmulţirea lui 25 cu un număr par obţinem un număr care se termină în 0). Pe de altă parte, această cifră este egală cel mult cu 3, căci, dacă de pildă, ar fi 5, cum $25 \times 5 = 125$, în rîndul al patrulea am avea un număr de trei cifre. Deci steluţa din al doilea rînd poate înlocui sau cifra 1, sau cifra 3. Avem, aşadar, schemele:

a) $\begin{array}{r} 25\times \\ 16 \\ \hline 150 \\ 25 \\ \hline 400 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 25\times \\ 36 \\ \hline 150 \\ 75 \\ \hline 900 \end{array}$

I.7^M. O cantitate de 1 kg de zahăr tos şi 2 litri de ulei de floarea-soarelui costă 50 lei iar 1 kg de zahăr tos şi 4 litri de ulei de floarea-soarelui costă 86 lei. Cît costă 9 kg de zahăr tos şi 6 litri de ulei de floarea-soarelui?

R. Între prima situaţie şi a doua există o diferenţă de $4-2 = 2$ litri ulei de floarea-soarelui. Pentru aceşti 2 litri s-au plătit 86 lei $-$ 50 lei $=$ 36 lei. Deci un litru de ulei de floarea-soarelui costă 36 lei : 2 $=$ 18 lei. Rezultă că 1 kg de zahăr tos costă 50 lei $-$ 36 lei $=$ 14 lei. Atunci 9 kg de zahăr tos costă 14 lei $\times$ 9 $=$ 126 lei, iar 6 litri de ulei, 6 lei $\times$ 18 $=$ 108 lei Deci, 9 kg de zahăr tos şi 6 litri de ulei costă 126 lei $+$ 108 lei $=$ 234 lei.

I.8^M. La o întîlnire amicală de şah iau parte 4 oameni. Fiecare a jucat cu fiecare cîte o partidă. Cîte partide s-au jucat în total? Dar dacă la întîlnire iau parte 5 oameni? Dar 6? Dar 30?

R. Fiecare din cei 4 oameni a jucat cîte o singură partidă cu ceilalţi trei. Putem trage concluzia că 2 oameni au jucat $3 + 3 = 6$ partide şi, deci, cei 4 oameni au jucat $4 \cdot 3 = 12$ partide. Această concluzie este însă pripită: într-un astfel de calcul am socotit şi partida jucată de A cu B, dar şi cea jucată de B cu A (A şi B fiind doi jucători oarecare), adică una şi aceeaşi partidă deoarece, cum spune enunţul, A şi B au jucat o singură dată. Deci 12 este, de fapt, dublul numărului de partide jucate, ele sînt, aşadar, în număr de $12 : 6 = 2$.

În general, dacă avem n oameni într-o competiţie şahistă în care fiecare joacă cu fiecare o singură dată, numărul partidelor jucate este $\dfrac{n(n-1)}{2}$. Deci, cei 6 oameni au jucat 15 partide, iar cei 30, 435 de partide.

I.9^M. Să se afle toate numerele naturale astfel încît împărţind pe oricare din ele la 5 să se obţină cîtul 7

R. Potrivit teoremei împărţirii întregi, $d = \hat{\imath}c + r$, unde d şi $\hat{\imath}$ sînt două numere naturale, c, cîtul împărţirii lui d la $\hat{\imath}$, iar r, restul acestei împărţiri, $0 \leqslant r < \hat{\imath}$. În cazul nostru, $\hat{\imath} = 5$, $c = 7$ şi $r < 5$. Deci r poate fi oricare dintre numerele 0, 1, 2, 3, 4. Pentru fiecare caz în parte obţinem numerele: 35, 36, 37, 38, 39.

I.10^{M}. **La împărţirea numărului natural a cu numărul natural b obţinem cîtul q şi restul r. Ce cît şi ce rest vom obţine dacă vom împărţi numărul $10a$ la numărul $10b$?**

R. Potrivit teoremei împărţirii întregi, $a = bq + r$, $0 \leqslant r < b$. Înmulţind această egalitate, membru cu membru, cu 10, obţinem $10a = 10\,bq + 10\,r$. Se verifică imediat că $0 \leqslant 10r < 10b$. Cum restul şi cîtul unei împărţiri sînt unice, rezultă că, prin împărţirea lui $10a$ la $10b$ obţinem cîtul q şi restul $10r$.

I.11^{M}. Un număr de trei cifre are primele două cifre identice, iar a treia cifră este 5. Acest număr se împarte la un număr de o singură cifră şi se obţine restul 8. Să se găsească deîmpărţitul, împărţitorul şi cîtul.

R. Se ştie că restul este mai mic decît împărţitorul. Cum împărţitorul este format dintr-o singură cifră şi este mai mare decît 8, el nu poate fi decît 9. Notînd numărul căutat cu a, rezultă $a = 9q + 8$, unde q este cîtul împărţirii lui a la 9. Mai reţinem din enunţ că a are ultima cifră egală cu 5, deci $9q$ este un număr care se termină în 7 (pentru ca suma $9q + 8$ să se termine în 5). Rezultă că q trebuie să se termine în 3 (pentru ca $9q$ să se termine în 7). Evident, q trebuie să fie mai mare decît 10, căci altfel numărul $9q + 8$ ar fi mai mic decît $9 \cdot 10 + 8 = 98$, dar el trebuie, fiind egal cu a, să fie de trei cifre. De asemenea, el este mai mic decît 111 căci altfel el ar fi mai mare decît $9 \cdot 111 + 8 = 1\,007$, dar acest număr are 4 cifre. Deci, q poate fi unul din numerele 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83, 93, 103 (am arătat anterior că ultima lui cifră trebuie să fie 3). Cum $9q + 8$ trebuie să fie un număr cu primele două cifre egale, verificînd rezultă $q = 73$ şi astfel $a = 73 \cdot 9 + 8 = 665$.

I.12^{M}. Să se calculeze:

$$(3 \cdot 5^2 \cdot 7^4)^{15} : (3^{15} \cdot 5^{30} \cdot 7^{60}).$$

R. Evident, $(3 \cdot 5^2 \cdot 7^4)^{15} = 3^{15} \cdot (5^2)^{15} \cdot (7^4)^{15} = 3^{15} \cdot 5^{30} \cdot 7^{60}$ deci rezultatul este 1.

I.13. Să se efectueze:

a) $10 \cdot [247 + 2 \cdot (205 \cdot 104 - 1\,000)]$; b) $10 \cdot [47\,000 : 10 + 3 \cdot (4\,750 - 999)]$; c) $210 \cdot [24\,600 : 246 + 2 \cdot (1 + 62\,500 : 25)]$; d) $100 \cdot \{24 + 100 \cdot [2 + 4 \cdot (245 + 106 \cdot 205)]\}$; e) $2 \cdot \{475 + 2 \cdot [4 + 4 \cdot (424 + 24 \cdot 36 \cdot 240)]\}$.

R. a). Avem $205 \cdot 104 = 21\,320$, deci:

$$10 \cdot [247 + 2(205 \cdot 104 - 1\,000)] = 10 \cdot [247 + 2(21\,320 - 1\,000)] = 10 \cdot (247 + 2 \cdot 20\,320) = 10(247 + 40\,640) = 10 \cdot 40887 = 408870.$$

b). Avem $47\,000 : 10 = 4\,700$ şi $4\,750 - 999 = 3751$, deci:

$$10 \cdot [47\,000 : 10 + 3 \cdot (4\,750 - 999)] = 10 \cdot [4\,700 + 3 \cdot 3\,751] = 10 \cdot (4\,700 + 11\,253) = 10 \cdot 15\,953 = 159\,530;$$

c). Deoarece $24\,600 : 246 = 100$ şi $62\,500 : 25 = 2\,500$, rezultă:

$$210 \cdot [24\,600 : 246 + 2(1 + 62500 : 25)] = 210 \cdot [100 + 2(1 + 2\,500)] = 210 \cdot (100 + 2 \cdot 2\,501) = 210 \cdot (100 + 5\,002) = 210 \cdot 5\,102 = 1\,071\,420;$$

d). Avem $106 \cdot 205 = 21\,730$ şi $245 + 21\,730 = 21975$, deci:

$$100 \cdot \{24 + 100 \cdot [2 + 4 \cdot (245 + 106 \cdot 205)]\} = 100 \cdot [24 + 100 \cdot (2 + 4 \cdot 21\,975)] = 100 \cdot [24 + 100 \cdot (2 + 87\,900)] = 100 \cdot (24 + 100 \cdot 87\,902) = 100 \cdot (24 + 8790\,200) = 100 \cdot 8\,790\,224 = 879\,022\,400;$$

e). Deoarece $24 \cdot 36 \cdot 240 = 207\,360$ şi $207\,360 + 424 = 207\,784$, avem:

$$2 \cdot \{475 + 2[4 + 4 \cdot (424 + 24 \cdot 36 \cdot 240)]\} = 2 \cdot [475 + 2 \cdot (4 + 4 \cdot 207\,784)] = 2 \cdot [475 + 2 \cdot (4 + 831\,136)] = 2 \cdot (475 + 2 \cdot 831\,140) = 2 \cdot (475 + 1\,662\,280) = 2 \cdot 1\,662\,755 = 3\,325\,510.$$

I.14^{M}. Suma a două numere este 630. Să se afle numerele știind că unul dintre ele este de patru ori mai mic decît celălalt.

R. Rezultă, din enunț, că unul din numere este de patru ori mai mare decît celălalt deci suma lor este de cinci ori mai mare decît cel mai mic număr. Așadar, acest număr este egal cu $630 : 5 = 126$. Celălalt este egal cu $126 \cdot 4 = 504$.

I.15^{M}. Suma a trei numere este 986. Să se afle numerele știind că al doilea este cu 2 mai mare decît primul și de două ori mai mic decît al treilea.

R. Din condițiile problemei rezultă că suma celor trei numere plus 2 este împătritul celui de-al doilea. Deci al doilea număr este $988 : 4 = 247$. Atunci primul este $247 - 2 = 245$, iar al treilea, $247 \times 2 = 494$.

I.16^{M}. Suma a două numere este 53. Să se afle numerele știind că împărțind pe unul la celălalt obținem cîtul 3 și restul 4.

R. Fie a și b cele două numere, $a > b$. Potrivit teoremei împărțirii întregi, $a = 3b + 4$ și, de asemenea, avem și $a + b = 52$. Rezultă $(3b + 4) + b = 52$ sau $4b + 4 = 52$, deci $4b = 52 - 4 = 48$, adică $b = 48 : 4 = 12$. Atunci $b = 52 - 12 = 40$.

I.17^{M}. O sumă de 800 lei se împarte la trei persoane. Primele două primesc 500 lei, iar ultimele două 560 lei. Cîți lei primește fiecare persoană?

R. La suma 500 lei + 560 lei = 1 060 lei contribuie suma primită de fiecare persoană și încă odată suma primită de a doua persoană. Deci a doua persoană primește 1 060 lei — 800 lei = 260 lei. Rezultă atunci că prima persoană primește 500 lei — 260 lei = 240 lei, iar a treia persoană 560 lei — 260 lei = 300 lei.

I.18^{M}. În două cutii sînt la un loc 820 de bile. Dacă din prima cutie s-ar lua 41 bile și s-ar pune în a doua cutie, atunci în prima ar fi de trei ori mai multe bile decît în a doua.

Cîte bile sînt în fiecare cutie?

R. Să ne concentrăm atenția asupra situației inițiale în care în fiecare cutie avem numerele de bile dinainte stabilit. Dacă am lua 41 de bile din prima cutie și le-am pune în a doua (fără să facem totuși această operație) în prima cutie ar fi cu 41 mai puține, iar în a doua cu 41 mai multe. Dar, în acest caz, în prima cutie avem de trei ori mai multe bile decît în a doua deci, în total, de patru ori mai multe decît în a doua. Atunci în a doua ar urma să fie (după ce facem operația de mutare a bilelor), 820 bile : 4 = 205 bile. Dar acest număr de bile este cu 41 mai mare decît inițial deci în a doua cutie vor fi, la început, 205 — 41 = 164 bile. Deci în prima cutie sînt 820 — 162 = 656 bile.

I.19. Se consideră următoarele două șiruri de numere:

1	2	3	999	1 000
↓	↓	↓	↓	↓
1000	999	998	2	1

După cum se vede de mai sus, săgețile arată că lui 1 îi corespunde 1 000, lui 2 îi corespunde 999, lui 3 îi corespunde 998 ș.a.m.d. Cît îi corespunde lui 295? Dar lui 425?

R. Observăm că suma oricăror două numere legate prin săgeți este aceeași, 1 001. Deci lui 295 îi corespunde 1 001 — 295 = 706, iar lui 425 îi corespunde numărul 576.

I.20^M. Care număr este mai mare: 10^{20} sau 20^{10}? Dar dintre numerele 2^{69} și 3^{46}?

R. Evident, $10^{20} = (10^2)^{10} = 100^{10}$. Cum $100 > 20$ rezultă $100^{10} > 20^{10}$. Analog, $2^{69} = (2^3)^{23}$ și $3^{46} = (3^2)^{23}$. Cum $2^3 < 3^2$ rezultă $2^{69} < 3^{46}$.

I.21. a) Să se găsească ultima cifră a următoarelor numere: 6^{1977}; 9^{1977}; 3^{1977}; 2^{1977}.

b) Care poate fi ultima cifră a numărului a^2 unde a este un număr natural oarecare? Dar a numărului $2a^2$? Dar a numărului $3a^2$?

R. a). Evident, $6 \times 6 = 36$, $6 \times 6 \times 6 = 216$ etc. Rezultă că orice putere a lui 6, deci și a 1977-a, se termină în cifra 6. De asemenea, $9 \times 9 = 81$, $9 \times 9 \times 9 = 729$ etc., deci puterile pare ale lui 9 se termină în 1, iar puterile impare, se termină în 9 deci și 9^{1977}. Încă, $3^1 = 3$, $3 \times 3 = 9$, $3 \times 3 \times 3 = 27$, $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ și $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$, $3^5 = 729$ etc. Rezultă că puterile lui 3 se repetă din 4 în 4. Scriem $3^{1977} = 3^{1976} \cdot 3 = (3^4)^{494} \cdot 3$. Cum 3^4 se termină în 1, rezultă că și $(3^4)^{494}$ se termină în 1 și deci $(3^4)^{494} \cdot 3$ se termină în 3, (ca produs de două numere dintre care unul se termină în 1, iar celălalt în 3).

De asemenea $2^{1977} = 2^{1976} \cdot 2 = (2^4)^{494} \cdot 3 = 16^{494} \cdot 3$ și cum 16^{494} se termină în 6, ca produs de numere care se termină în 6, rezultă că $16^{494} \cdot 3$ se termină cu ultima cifră a lui $6 \cdot 3 = 18$, adică 8.

b). Avem $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $7^2 = 49$, $8^2 = 64$, $9^2 = 81$. Ultima cifră a produsului a două numere naturale este aceiași cu ultima cifră a numărului pe care-l obținem înmulțind ultima cifră a fiecărui număr. Deci a^2 se poate termina în 0, 1, 4, 5, 6, 9.

Rezultă atunci că $2a^2$ se poate termina în 0, 2, 8, numere pe care le obținem înmulțind pe 2 cu numerele 0, 1, 4, 5, 6, 9, iar $3a^2$ se poate termina în 0, 2, 3, 5, 7, 8.

I.22^M. Pionierii din detașamentul unei clase a V-a au plantat într-o zi 24 de pomi, iar a doua zi cu 6 pomi mai mult decît în prima zi. 12 din pomii plantați în cele două zile sînt caiși; iar restul meri și peri. Știind că numărul merilor este de două ori mai mare decît numărul perilor, să se afle cîți meri și cîți peri au plantat pionierii.

R. În a doua zi pionierii au plantat $(24 + 6)$ pomi, adică 30 de pomi. În cele două zile s-au plantat $(30 + 24)$ pomi, adică 54 de pomi. Numărul de meri și peri este egal cu $54 - 12 = 42$. Cum numărul merilor este de două ori mai mare decît numărul perilor, rezultă că numărul 42 este triplul numărului perilor, deci merii sînt în număr de $42 : 3 = 14$. Numărul merilor este, atunci, $14 \times 2 = 28$.

I.23. Gheorghe, Ion, Petre sînt prenumele a trei elevi. Numele lor de familie sînt tot Gheorghe, Ion și Petre, dar nici unul dintre elevi nu are numele de familie la fel ca prenumele.

Dacă numele de familie al lui Ion nu este Petre, să se afle numele și prenumele celor trei elevi.

R. Deoarece numele lui Ion nu este Petre, pe el trebuie să-l cheme, neapărat, Gheorghe (nu-l poate chema Ion căci ar avea numele de familie la fel ca prenumele). Rămîne atunci că pe Gheorghe îl cheamă Petre, iar pe Petre, Ion.

I.24. Ionel, Petre, Gheorghe primesc în dar 3 creioane colorate: unul roșu, unul galben și altul albastru. Fiecare primește un creion și numai unul, Ionel nu primește creionul roșu și nici pe cel albastru, iar Gheorghe nu primește creionul roșu. Ce culoare are creionul pe care-l primește fiecare copil?

R. Deoarece Ionel nu primește creionul roșu și nici pe cel albastru, rezultă că el îl primește pe cel galben. Deoarece Gheorghe nu primește creionul roșu, iar cel galben a fost deja dat, rezultă că el îl primește pe cel albastru și, deci, Petre îl primește pe cel roșu.

I.25^M. Cinci prieteni au participat la o cursă de alergări. Dumitru a afirmat că n-a ocupat locul I, Gheorghe a terminat cursa al treilea, iar Victor a ocupat un loc mai bun decît Gheorghe. Petre a observat că Victor n-a ocupat locul II, iar Andrei n-a ieşit nici primul, nici ultimul. Petre a spus că el a terminat pe locul imediat următor locului ocupat de Dumitru.

Ce loc a ocupat fiecare, ştiind că nu s-au clasat doi concurenţi pe acelaşi loc.

R. Deoarece Victor a ocupat un loc mai bun decît Gheorghe (care a ocupat locul III), rezultă că el a ocupat unul din locurile I sau II. Cum Petre a observat că Victor n-a ocupat locul II, rezultă că acesta a ocupat locul I.

Locurile I şi III fiind deja ocupate, Dumitru poate ocupa unul din locurile II, IV sau V. Cum Petre s-a clasat imediat după Dumitru, acesta (Dumitru), nu se putea clasa pe locul II căci altfel Petre s-ar fi clasat pe III, la fel ca Gheorghe dar, potrivit enunţului, doi participanţi n-au ocupat acelaşi loc. Dumitru n-a ocupat nici locul V căci Petre n-ar fi avut pe ce loc să se claseze (nu există locul VI). Rezultă că Dumitru s-a clasat pe locul IV şi atunci Petre s-a clasat pe locul V. Rezultă că Andrei s-a calificat pe singurul loc rămas liber, II.

Observaţie. În enunţ se poate renunţa la ipoteza că Andrei n-a ocupat nici primul, nici ultimul loc.

I.26^M. Să se scrie cel mai mare număr natural de cinci cifre care îndeplineşte condiţiile:

a) Este mai mic decît 30 000;

b) Are suma cifrelor mai mică decît 18.

R. Fiind mai mic decît 30 000, rezultă că el are sau prima cifră 1, sau 2. Cum se cere cel mai mare număr mai mic decît 30 000, prima cifră este 2. A doua cifră va fi 9 (deocamdată $2 + 9 < 18$). A treia cifră nu poate fi nici 9, nici 8, nici 7, căci $2 + 9 + 9 > 18$, $2 + 9 + 8 > 18$, $2 + 9 + 7 = 18$. Ea poate fi 6. Deci numărul căutat este 29 600.

I.27^M. Să se afle cîte numere naturale mai mici decît 315 există, astfel încît, dacă înmulţim pe oricare din ele cu 2 să obţinem un număr mai mare decît 315.

R. Deoarece $315 : 2 = 157{,}5$, rezultă că primul număr care îndeplineşte condiţia este 158. Ultimul va fi, atunci 314. Ele vor fi în număr de $314 - 158 + 1 = 157$.

I.28^M. Într-un magazin s-au adus 25 de lăzi cu mere de trei calităţi. În fiecare ladă sînt numai mere de aceeaşi calitate. Se pot găsi totdeauna 9 lăzi astfel încît toate aceste 9 lăzi să conţină mere de aceeaşi calitate?

Cea mai defavorabilă situaţie este cea în care avem cîte 8 lăzi cu mere de aceeaşi calitate. În acest caz, însă, avem 8×3, adică 24 de lăzi. A 25-a va fi de una din cele trei calităţi deci vor exista întotdeauna 9 lăzi cu mere de aceeaşi calitate.

I.29^M. Cineva are suma de 435 lei în monede de 5 lei şi bancnote de 10 lei. Ştiind că sînt în total 50 de monede şi bancnote, să se afle cîte monede şi cîte bancnote sînt.

R. Dacă toţi banii ar avea valoarea de 5 lei, toţi cei 50 ar avea valoarea 50×5 lei $=$ $= 250$ lei. Diferenţa 435 lei $-$ 250 lei $=$ 185 lei provine din faptul că valoarea fiecărei bancnote de 10 lei a fost depreciată cu 5 lei, deci vor fi $185 : 5 = 37$ de bancnote de 10 lei şi $50 - 37 = 13$ monede de 5 lei.

I.30^M. Să se determine mulțimile X și Y știind că îndeplinesc următoarele trei condiții:

(1) $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$;
(2) $X \cap Y = \{3, 4, 8, 9, 10\}$;
(3) $X - Y = \{1, 5, 7\}$.

R. Din condiția (2) rezultă $3, 4, 8, 9, 10 \in X$, iar din (3), $1, 5, 7 \in X$, deci $\{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\} \subset X$. Elementul 2 nu poate aparține lui X căci dacă ar aparține și lui X, ar aparține și mulțimii $X \cap Y$, iar dacă nu ar aparține lui Y, ar aparține mulțimii $X - Y$. Deci $2 \in Y$, căci $2 \in X \cup Y$. Analog, $6 \in Y$, $11 \in Y$. Din (2) rezultă și $3, 4, 8, 9, 10 \in Y$, deci $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$ și $Y = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11\}$.

I.31^M. O mulțime A are 7 elemente, iar o mulțime B are 6 elemente.

a) Dacă $A \cup B$ are 8 elemente, cîte elemente are $A \cap B$?
b) Dacă $A \cap B$ are 4 elemente, cîte elemente are $A \cup B$?

R. În reuniunea a două mulțimi A și B intră atît elementele comune lui A și B, cît și elementele lor necomune. De aceea, cînd adunăm numărul elementelor lui A cu numărul elementelor lui B, în această sumă, față de numărul elementelor lui $A \cup B$, numărul elementelor comune, adică acela al elementelor lui $A \cap B$, intră de două ori. Deci, numărul elementelor mulțimii $A \cup B$ este egal cu diferența dintre suma numărului elementelor lui A și al elementelor lui B, și numărul elementelor lui $A \cap B$.

a) Deoarece $A \cup B$ are 8 elemente, rezultă că $A \cap B$ are $7 + 6 - 8 = 5$ elemente.
b) Deoarece $A \cap B$ are 4 elemente, rezultă că $A \cup B$ are $6 + 7 - 4 = 9$ elemente

I.32^M. Să se determine mulțimile X și Y, știind că ele îndeplinesc, în același timp, următoarele condiții:

a) $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
b) $X \cap Y = \{4, 6, 9\}$;
c) $X \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$;
d) $Y \cup \{2, 4, 8\} = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

R. Din c) rezultă $\{1, 6, 8, 9\} \subset X$, iar din d), $\{5, 6, 7, 9\} \subset Y$. Din b) rezultă, de asemenea, $4 \in X$, $4 \in Y$. Deoarece $\{2, 7\} \subset X \cup Y$ și $\{2, 7\} \not\subset X \cup \{3, 4, 5\}$, rezultă $2, 7 \in Y$ și, de asemenea, deoarece $\{3\} \subset X \cup Y$ și $\{3\} \not\subset Y \cup \{2, 4, 8\}$, rezultă $3 \in X$.

Deci $X = \{1, 3, 4, 6, 8, 9\}$, $Y = \{2, 4, 5, 6, 7, 9\}$.

I.33^M. Suma unor numere naturale consecutive este 30. Să se afle numerele.

Cîte soluții are problema?

R. Numerele consecutive nu pot fi în număr de două căci, dintre acestea, unul este par, iar celălalt impar, deci suma lor este un număr impar, pe cînd suma lor trebuie să fie 30.

Să cercetăm dacă pot exista trei numere consecutive cu proprietatea din enunț. Fie x, $x + 1$, $x + 2$ cele trei numere. Suma lor este $x + (x + 1) + (x + 2) = 3x + 3$ și trebuie să avem $3x + 3 = 30$ sau $3x = 30 - 3$ deci $x = 27 : 3 = 9$. Deci numerele sînt 9, 10, 11.

Să cercetăm dacă pot exista 4 numere cu proprietatea din enunț. Fie acestea x, $x+1$, $x + 2$, $x + 3$. Trebuie să avem:

$$x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) = 30$$

sau $4x + 6 = 30$, adică $4x = 30 - 6$ sau $x = 24 : 4 = 6$. Deci numerele sînt 6, 7, 8, 9.

Pentru cazul a cinci numere vom avea relația analoagă:

$$x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4) = 30\,.$$

sau $5x + 10 = 30$ de unde $x = 4$. Numerele sînt, în acest caz, 4, 5, 6, 7, 8.

Pentru cazurile a 6, 7, 8 numere obținem ecuațiile :

$$6x + 15 = 30,$$

$$7x + 21 = 30,$$

$$8x + 28 = 30,$$

care nu au soluții numere naturale.

Mai mult de 8 numere nu pot fi, căci suma primelor 8 numere naturale consecutive depășește 30.

I.34[M]. Să se afle valoarea logică a fiecăreia din următoarele propoziții :

a) Orice număr natural care este divizibil cu 3 este divizibil și cu 9;

b) Dacă ultima cifră a unui număr natural este 4, atunci numărul se divide cu 4.

R. Valoarea logică a ambelor propoziții este 0 (adică afirmațiile sînt false) căci, de exemplu, 12 se divide cu 3, dar nu se divide și cu 9, iar 14 are ultima cifră 4, dar nu se divide cu 4.

I.35[M]. Aflați toate numerele naturale de forma $\overline{1x3}$ divizibile cu 3.

R. Pentru a obține toate numerele de forma indicată, divizibile cu 3, trebuie să determinăm pe x așa ca suma cifrelor numărului dat, $1 + x + 3$, să se dividă cu 3. Acest lucru este posibil cînd $x \in \{2, 5, 8\}$. Deci numerele căutate sînt 123, 153, 183.

I.36[M]. a) Să se afle toate numele naturale de forma $\overline{43x}$, divizibile cu 2;

b) Să se afle toate numerele naturale de forma $\overline{53x}$, divizibile cu 5;

c) Să se afle toate numerele naturale de forma $\overline{53x}$, divizibile cu 5 și care nu sînt divizibile cu 2.

d) Să se afle toate numerele naturale de forma $\overline{60x5}$, divizibile cu 3;

e) Să se afle toate numerele naturale de forma $\overline{60x5}$ care se divid cu 3 și care nu se divid cu 9.

R. a). Un număr natural este divizibil cu 2 dacă ultima sa cifră este pară. Deci x poate fi oricare din numerele 0, 2, 4, 6, 8, astfel că numerele căutate sînt 430, 432, 434, 436, 438.

b). Un număr natural este divizibil cu 5 dacă ultima sa cifră este 0 sau 5. Deci x poate fi oricare din cifrele 0, 5, astfel că numerele căutate sînt 530, 535.

c). Dintre numerele găsite la punctul precedent, 530 se divide cu 2, căci are ultima cifră pară. Deci singurul număr care satisface condiția din enunț este 535.

d). Un număr natural este divizibil cu 3 dacă suma cifrelor sale este un număr divizibil cu 3. Așadar $6 + 0 + x + 5 = 11 + x$ se divide la 3. Rezultă $x \in \{1, 4, 7\}$. Deci numerele căutate sînt 6015, 6045, 6075.

e). Un număr se divide la 9 dacă suma cifrelor sale este un număr care se divide la 9. Dintre numerele găsite la punctul precedent, numai 6 075 se divide la 9, deci numerele căutate sînt 6015, 6045.

I.37[M]. Să se stabilească dacă următoarea propoziție este o propoziție adevărată sau falsă :

Dacă nici unul din factorii unui produs de numere naturale nu se divide cu un acelaşi număr natural, atunci nici produsul nu se divide cu acel număr.

R. Propoziţia este falsă. În adevăr, să considerăm numărul $12 = 4 \cdot 3$. Nici unul din factorii 4 şi 3 nu se divid cu 6 şi, totuşi, $4 \cdot 3$ se divide cu 6.

I.38^M^. a) Scrieţi toate numerele de forma $\overline{4**}$ care sînt divizibile cu 5 şi nu sînt divizibile cu 2;

b) Să se afle toate numerele de forma $\overline{74x6}$, divizibile cu 4.

R. a). Deoarece numărul dat se divide cu 5, ultima sa cifră poate fi 0 sau 5. Cum numărul nu se divide cu 2, trebuie eliminată cifra 0, care este pară. Deci ultima steluţă trebuie înlocuită cu cifra 5. Steluţa din mijloc poate înlocui orice cifră, deci numerele căutate sînt 405, 415, ..., 495.

b). Un număr este divizibil cu 4, dacă numărul format cu ultimele sale două cifre (în aceeaşi ordine) este divizibil cu 4. Deci $\overline{x6}$ se divide la 4, numerele cu această proprietate sînt 16, 36, 56, 76, 96, deci numerele căutate sînt 7416, 7436, 7456, 7476, 7496.

I.39^M^. O sumă de bani a fost plătită în bancnote de 10 lei şi 25 lei. Poate fi această sumă plătită numai în monede de 5 lei?

R. Da. Fiecare bancnotă de 10 lei poate fi înlocuită cu două monede de cîte 5 lei, iar o bancnotă de 25 lei, cu 5 monede de cîte 5 lei.

I.40^M^. Suma dintre un număr prim de două cifre, cu cifre identice, şi un număr natural este 2436. Să se afle numerele. Cîte soluţii are problema?

R. Singurul număr prim de două cifre, cu cifre identice, este 11, căci pentru $2 \leqslant a \leqslant 9$, avem $\overline{aa} = a \cdot 11$. Celălalt număr natural va fi $2\,436 - 11 = 2\,425$. Soluţia este unică.

I.41^M^. Care sînt perechile de numere prime între ele care se pot forma cu numerele: 2, 4, 9?

R. Există doar două astfel de perechi, (anume (2, 9) şi (4,9). A treia pereche ce se poate forma, (2, 4) are în compunere numere al căror c.m.m.d.c. este 2.

I.42^M^. Să se afle cel mai mic dintre numerele naturale cu proprietăţile:
— împărţit la 5 dă restul 4,
— împărţit la 8 dă restul 7,
— împărţit la 9 dă restul 8.

R. Dacă n este un număr cu proprietatea din enunţ, să observăm că $n + 1$ are proprietatea că este cel mai mic număr natural care se divide şi cu 5, şi cu 8, şi cu 9. Deci $n + 1$ este egal cu cel mai mic multiplu comun al numerelor 5, 8 şi 9. Aşadar, $n + 1 = 360$, de unde $n = 359$.

I.43^PO^. Să se reconstituie înmulţirea:

```
  46 ×
  **
 ----
 ***
***
----
1*78
```

unde steluţele sînt cifre scrise în baza 10.

(Dana Tecioiu, G. M. E.: 6425)

R. Ultima steluță din rîndul 3 înlocuiește cifra 8. Rezultă că ultima steluță din rîndul 2 este ori 3, ori 8. Pentru cazul cifrei 3 schema devine

$$\begin{array}{r} 46\times \\ *3 \\ \hline 138 \\ *** \\ \hline 1*78 \end{array}$$

Rezultă atunci că în rîndul cu steluțe sînt cifrele, de la dreapta la stînga: $7 - 3 = 4$, a și 1, unde a urmează a fi determinat. Rezultă că produsul dintre prima steluță din rîndul 2 și cifra 6 este un număr care se termină în 4. Acest lucru este posibil cînd steluța înlocuiește sau pe 4 sau pe 9. În aceste cazuri schemele devin

$$\begin{array}{r} 46\times \\ 43 \\ \hline 138 \\ 184 \\ \hline 1978 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 46\times \\ 93 \\ \hline 138 \\ 414 \\ \hline 4278 \end{array}$$

Numai prima schemă satisface condițiile problemei.

Dacă ultima steluță din rîndul 2 înlocuiește cifra 8 schema devine

$$\begin{array}{r} 46\times \\ *8 \\ \hline 368 \\ *** \\ \hline 2*78 \end{array}$$

Rezultă că ultima steluță din rîndul 4 înlocuiește cifra 1. Deci produsul dintre cifra înlocuită de steluță în rîndul 2 și 6 este un număr care se termină în 1, fals căci produsul de care vorbeam este un număr par.

Rămîne, în final, doar schema

$$\begin{array}{r} 46\times \\ 43 \\ \hline 138 \\ 184 \\ \hline 1978 \end{array}$$

I.44. Să se arate că:

$$1212_3 + 1313_4 + 1414_5 + 1515_6 + 1616_7 = 1110000_3.$$

R. Avem:

$1212_3 = 2 + 1\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 1\cdot 3^3 = 2 + 3 + 18 + 27 = 50,$

$1313_4 = 3 + 1\cdot 4 + 3\cdot 4^2 + 1\cdot 4^3 = 3 + 4 + 48 + 64 = 119,$

$1414_5 = 4 + 1\cdot 5 + 4\cdot 5^2 + 1\cdot 5^3 = 4 + 5 + 100 + 125 = 234,$

$1\,616_7 = 6 + 1\cdot 7 + 6\cdot 7^2 + 1\cdot 7^3 = 6 + 7 + 294 + 343 = 650,$

$1\,110\,000_3 = 0 + 0\cdot 3 + 0\cdot 3^2 + 0\cdot 3^3 + 1\cdot 3^4 + 1\cdot 3^5 + 1\cdot 3^6 =$

$= 81 + 243 + 729 = 1\,053.$

Făcînd calculele din primul membru rezultă egalitatea.

I.45[PO]. Din numerele prime 13, 17, 37, 79 se obțin tot numere prime scriind cifrele în ordine inversă. Există oare numere prime de trei cifre care să aibe toate cifrele diferite, la care schimbînd, oricum ordinea lor, să se obțină tot numere prime de 3 cifre?

(Olimpiada R.D.G., 1970)

R. Evident, notînd prin $\overline{abc}$ un număr de tipul căutat, rezultă că cifrele a, b, c nu pot fi nici pare, și nici 5. Căci la o schimbare convenabilă a lor am obține fie un număr par, fie un număr divizibil cu 5.

Așadar, $a, b, c \in \{1, 3, 7, 9\}$ și a, b, c diferite între ele. Toate numerele căutate se găsesc printre numerele

137 ; 139 ; 179 ; 173 ; 193 ; 197 ;
317 ; 319 ; 379 ; 371 ; 391 ; 397 ;
713 ; 719 ; 739 ; 731 ; 791 ; 793 ;
913 ; 917 ; 937 ; 931 ; 971 ; 973.

Dintre acestea, sînt prime numai numerele 137, 139, 173, 179, 193, 197, 317, 379, 397, 719, 739, 937, 971.

I.46. Fie n un număr natural, scris în baza 10, de forma $n = \overline{abba}$, unde a și b sînt cifre, iar $a \neq 0$, $b \neq 0$.

a) Să se arate că n este întotdeauna divizibil cu 11 ;

b) Să se arate că n nu poate fi divizibil cu 13 ;

c) Să se determine toate numerele n divizibile cu 7.

(*Adrian P. Ghioca, G. M.*)

R. Avem $\overline{abba} = a + 10 \cdot b + 100 \cdot b + 1\,000 \cdot a = 1\,001\, a + 110b =$
$= 11\,(91a + 10\,b) = 13 \cdot 77\, a + 110\, b = 7 \cdot 143\, a + 110\, b$

a) Deoarece $\overline{abba} = 11\,(91\,a + 10\,b)$ rezultă că numărul $\overline{abba}$ este divizibil cu 11, oricare ar fi $a, b \in \{1, 2, \ldots, 9\}$.

b) Deoarece $\overline{abba} - 13 \cdot 77\,a = 110\,b$, dacă $\overline{abba}$ ar fi divizibil cu 13, atunci și diferența $\overline{abba} - 13 \cdot 77\,a$, adică $110\,b$, ar fi divizibil cu 13, absurd căci 110 nu se divide la 13, și nici b, fiind cifră.

c) Deoarece $\overline{abba} - 7 \cdot 143\,a = 110b$, dacă $\overline{abba}$ este divizibil cu 7 rezultă că și numărul $\overline{abba} - 7 \cdot 143\,a$, adică $110\,b$ este divizibil cu 7. Dar acest lucru este posibil doar atunci cînd $b = 7$.

I.47. Să se găsească două numere naturale a căror sumă este 78 și pentru care 78 este divizibil cu diferența lor.

(*Ștefan Țifui, G.M.*)

R. Fie a și b cele două numere. Așadar, $a + b = 78$ și 78 se divide cu $a - b$. Dar $78 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13$ deci $a - b$ poate fi unul din numerele 1, 2, 3, 13, 6, 26, 39, 78. Cînd $a - b = 1$ rezultă $a = b + 1$, deci, cum $a + b = 78$, rezultă $b + 1 + b = 78$ care nu dă $b \in \mathbb{N}$. Analog cînd $a - b \in \{3, 13, 39\}$.

Cînd $a - b = 2$ rezultă $a = 40$, $b = 38$.

Cînd $a - b = 6$ rezultă $a = 42$, $b = 36$.

Cînd $a - b = 26$ rezultă $a = 52$, $b = 26$.

Cînd $a - b = 78$ rezultă $a = 78$, $b = 0$.

I.48[M]. Să se afle cel mai mic număr natural care, împărțit, pe rînd, la 6 și la 15 să dea același rest 5 și cîtul diferit de 0.

R. Fie a numărul căutat. Din datele problemei rezultă că numărul $a - 5$ se divide și la 6 și la 15, adică la cel mai mic multiplu comun al acestora care este 30. Rezultă că $a - 5$ poate fi chiar 30, deci $a = 35$.

I.49^PO. Să se determine un număr de cinci cifre știind că produsul dintre numărul format din primele două cifre și numărul format din ultimele cifre este 1111.

R. Deoarece $1\,111 = 11 \cdot 101$, iar 101 și 11 sînt prime, rezultă, cu necesitate, că numărul căutat este 11101.

I.50^PO. Suma a trei numere naturale diferite este 54. Știind că unul dintre ele este media aritmetică a celorlalte două și că fiecare număr este divizibil cu 6, să se afle cele trei numere.

R. Fie a, b, c cele trei numere căutate. Deoarece unul, fie acesta, de exemplu, b, este egal cu media aritmetică a celorlalte două, rezultă că suma $a + c$ este dublul lui b. Atunci suma celor trei numere va fi triplul lui b și, deci, $b = 54 : 3 = 18$. Așadar, $a + c = 2b = 36$. Cum fiecare număr este divizibil su 6 rezultă că avem, pentru perechea (a, c), situațiile

$(0,36)$, $(6,30)$, $(12,24)$, $(18,18)$, $(24, 12)$, $(6,30)$, $(36,0)$.

I.51^PO. Care este cel mai mic și care este cel mai mare număr de 4 cifre care la împărțirea cu 74 să dea restul 19?

Cîte numere de 4 cifre împărțite la 74 dau restul 19?

R. Fie x un număr natural de 4 cifre care la împărțirea cu 74 dă restul 19. Atunci există $q \in \mathbb{N}$ așa ca:

$$x = 74\,q + 19.$$

Cel mai mic număr de 4 cifre este 1 000, iar cel mai mare este 9 999. Așadar, $1\,000 \leqslant 74\,q + 19 \leqslant 9999$, adică $981 \leqslant 74\,q \leqslant 9980$. De aici rezultă $\frac{981}{74} \leqslant q \leqslant \frac{9\,980}{74}$.

Făcînd împărțirile necesare și avînd în vedere că numărul q este natural rezultă $14 \leqslant q \leqslant 134$.

Rezultă că cel mai mic număr cu proprietatea cerută se obține pentru $q = 14$, adică $x = 74 . 14 + 19 = 1\,036$, iar cel mai mare se obține pentru $q = 134$, adică $x = 74 \cdot 134 + 19 = 9\,916$.

Există, în total, $134 - 14 + 1 = 121$ numere de 4 cifre, care, împărțite la 74, dau restul 19.

I.52^PO. Să se rezolve ecuația:

$$x \cdot \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 3 - \frac{1}{5} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12}.$$

(*G. M.*, *E*: *7 916*)

R. Avem:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{12}{12} - \frac{6}{12} + \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{12 - 6 + 4 - 3}{12} = \frac{7}{12},$$

$$3 - \frac{1}{5} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} = \frac{180}{60} - \frac{12}{60} + \frac{6}{60} - \frac{5}{60} = \frac{180 - 12 + 6 - 5}{60} = \frac{169}{60}$$

deci ecuația se mai scrie $x \cdot \frac{7}{12} = \frac{169}{60}$ de unde $x = \frac{169}{60} \cdot \frac{12}{7} = \frac{169}{35}$.

I.53[PO]. Să se determine toate numerele naturale nenule x, y, z care au proprietatea:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14$$

(*Aurel Ene, G. M. E: 8440*)

R. Deoarece $x^2 \leqslant x^2 + y^2 + z^2$ rezultă $x^2 \leqslant 14$, deci x poate fi cel mult 3 (căci $4^2 = 16 > 14$).

Dacă $x = 3$ atunci $x^2 = 9$, deci $y^2 + z^2 = 5$ și rezultă $y = 1$, $z = 2$ sau $y = 2$, $z = 1$.

Dacă $x = 2$ atunci $x^2 = 4$ și deci $y^2 + z^2 = 11$ dar nu există y și z naturale care să satisfacă această relație.

Dacă $x = 1$, atunci $x^2 = 1$ și deci $y^2 + z^2 = 13$, de unde $y = 3$, $z = 2$, sau $y = 2$, $z = 3$.

În concluzie, tripletele de numere (x, y, z), care verifică egalitatea din enunț sînt:

$(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$.

I.54[M]. Mai mulți elevi vor să cumpere în comun un obiect, însă le lipsesc 20 de lei. Atunci fiecare dintre ei a mai adăugat același număr (natural) de lei și tot au lipsit 3 lei. Cîți elevi sînt?

R. Fie x numărul de elevi. Adăugînd fiecare același număr de lei, a rezultat o sumă de $20 - 3 = 17$ lei. Dar la această sumă au contribuit fiecare, cu același număr de lei. Cum 17 este prim, rezultă că au fost 17 elevi.

I.55[M]. Tatăl și fiul au hotărît să măsoare cu pasul distanța dintre doi pomi și pentru aceasta au pornit simultan de la unul și același pom. Lungimea pasului tatălui este de 70 cm, iar lungimea pasului fiului este de 56 cm. Găsiți distanța dintre acești pomi, știind că, în afara coincidenței din dreptul primului pom, urmele lor au coincis de 10 ori, ultima oară coincizînd în dreptul pomului al doilea.

R. Deoarece cel mai mic multiplu comun al numerelor 70 și 56 este 280, rezultă că urmele vor coincide din 280 cm în 280 cm. Urmele reîntîlnindu-se de 10 ori, în total au fost parcurse 10 intervale de cîte 280 cm, adică 2800 cm = 28 m.

Deci distanța dintre pomi este de 28 m.

I.56[M]. Să se afle toate numerele naturale de patru cifre scrise în baza 10 și care îndeplinesc, în același timp, următoarele condiții: a) Au cifra sutelor 9; b) Au cifra zecilor 0; c) Sînt divizibile cu 18. Să se adauge la condițiile de mai sus, una din condițiile de mai jos, astfel încît problema să admită trei soluții: d) Sînt numere pare e) Sînt numere mai mici decît 1000; f) Sînt numere divizibile cu 4.

R. Numerele căutate sînt de forma $\overline{a90b}$, cu $a, b, \in \{0, \ldots, 9\}$, $a \neq 0$, și sînt divizibile cu 18, deci cu 2 și cu 9. Pentru a fi divizibile cu 2 este necesar (și suficient) ca b să fie par, iar pentru a fi divizibile cu 9 trebuie ca $a + 9 + 0 + b$ să se dividă la 9, adică $(a + b) \vdots 9$. Dar $a + b \leqslant 18$ și egalitatea se realizează pentru $a = b = 9$. Dar acest caz este exclus căci b trebuie să fie par. Rămîne $a + b = 9$. Dacă $b = 0$, atunci $a = 9$. Dacă $b = 2$, atunci $a = 7$, dacă $b = 4$ avem $a = 5$, dacă $b = 6$, avem $a = 3$, iar dacă $b = 8$ avem $a = 1$. Așadar, numerele căutate sînt:

9900, 7902, 5904, 3906, 1908.

Adăugînd ultima condiție f), obținem trei soluții 9900, 5904, 1908.

I.57[PO]. Să se determine perechile de numere naturale avînd suma pătratelor egală cu 50.

R. Fie a și b două numere naturale cu suma pătratelor lor egală cu 50. Așadar:

$$a^2 + b^2 = 50.$$

Evident, $a^2 < 50$, deci $a < 7$. Dacă $a = 7$ rezultă $b = 1$. Dacă $a \in \{2, 3, 6\}$ nu rezultă b natural. Dacă $a = 4$ rezultă $b = 6$, iar dacă $a = 5$ rezultă $b = 5$.

Rezultă perechile (1,7), (4,6), (5,5) (7,1) (6,4).

I.58[M]**.** Dacă, într-o clasă, se așează cîte doi elevi într-o bancă, rămîn 3 elevi în picioare. Dacă se așează trei elevi într-o bancă, rămîn 4 bănci libere. Cîți elevi și cîte bănci sînt în clasă.

R. Dacă notăm cu x numărul băncilor, în primul caz, cînd rămîn 3 elevi în picioare, avem $2x + 3$ elevi, iar în al doilea caz avem $3(x - 4)$ elevi. Așadar $2x + 3 = 3(x - 4)$, de unde $x = 15$, astfel că numărul elevilor este $2 \cdot 15 + 3 = 33$.

I.59[PO]**.** Un număr de două cifre este $\dfrac{2}{9}$ din răsturnatul său. Care este numărul?

R. Fie $\overline{ab}$ numărul căutat. Așadar, $\overline{ab} = \dfrac{2}{9}\,\overline{ba}$ sau $9\,\overline{ab} = 2\,\overline{ba}$ sau $9.\ (10a + b) = 2(10b + a)$ sau încă $90a + 9b = 20b + 2a$, de unde $90a - 2a = 20b - 9b$, deci $88a = 11b$ sau $8a = b$. Cum a și b sînt cifre (nenule) rezultă $a = 1$, $b = 8$ deci numărul căutat este 18.

I.60[M]**.** Un elev a scris toate numerele naturale mai mari decît 0 și mai mici sau egale cu 100. Să se afle:

a) De cîte ori a fost folosită cifra 0;

b) De cîte ori a fost folosită cifra 1;

c) De cîte ori a fost folosită cifra 3.

R. a) Cifra 0 este folosită pentru scrierea numerelor 0, 10, 20, 30, ..., 100, deci de 12 ori.

b) Cifra 1 este folosită pentru scrierea numerelor 1, 10, 11, 12, ..., 18, 19, 21, 31, 41, ..., 91, 100, deci de 22 ori.

c) Cifra 3 este folosită pentru scrierea numerelor 3, 13, 23, 30, 31, 32, 33, 34 ..., 39, 43, 53, ..., 93, deci de 20 ori.

I.61[PO]**.** Dintre numerele de forma $\overline{71x84y}$ divizibile cu 18, care este cel mai mare și care este cel mai mic?

R. Un număr este divizibil cu 18 dacă este divizibil cu 2 și cu 9. Suma cifrelor numărului dat este $7 + 1 + x + 8 + 4 + y = 20 + x + y = 18 + (2 + x + y)$. Dacă un număr este divizibil cu 9 atunci și suma cifrelor sale este divizibilă cu 9, deci trebuie ca $2 + x + y$ să se dividă la 9, deci sau $x + y = 7$, sau $x + y = 16$. Numărul dat fiind divizibil cu 2 trebuie ca y să fie par. Cel mai mic număr de tipul căutat se obține făcînd, în relația $x + y = 7$, $x = 1$, deci $y = 6$, iar cel mai mare se obține făcînd în relația $x + y = 16$, $x = 8$, deci $y = 8$.

I.62. Completați desenul de mai jos astfel încît suma numerelor din oricare trei căsuțe vecine să fie egală cu 15. Justificare.

6								4			

R. Numerotăm căsuţele de la I la XII :

	$\overbrace{\quad\quad}^{9}$			$\overbrace{\quad\quad}^{9}$			$\overbrace{\quad\quad}^{9}$			$\overbrace{\quad\quad}^{9}$	
			6			6		4	6		
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
				5			5				

Pentru ca suma numerelor din primele trei căsuţe să fie 15, numerele din căsuţele II şi III trebuie să aibă suma egală cu 9. Căsuţa IV trebuie completată deci cu 6. Analog se arată că şi în căsuţeele VII şi X trebuie scris numărul 6. De aici ecompletarea tabelului decurge imediat. VIII $\to$ 5, VI $\to$ 4, XI $\to$ 5, etc. Se obţine :

6	5	4	6	5	4	6	5	4	6	5	4

I.63. Adăugaţi trei cifre la dreapta numărului 523 astfel încît numărul obţinut să se dividă cu 7, 8 şi 9.

R. Fie a, b, c cifrele căutate şi $N = \overline{523abc}$. Deoarece N se divide cu 7, 8 şi 9 rezultă că $\overline{523abc}$ este multiplu de 504.

Dar :

$\overline{523abc} = 523000 + \overline{abc} = 1\,037 \cdot 504 + 352 + \overline{abc}$ deci trebuie ca :

$$352 + \overline{abc} = k \cdot 504 \tag{1}$$

Pentru $k = 1$ obţinem $\overline{abc} = 504 - 352 = 152$, iar pentru $k = 2$, $\overline{abc} = 1008 - 352 = 656$, adică $a = 1$, $b = 5$, $c = 2$ sau $a = 6$, $b = 5$, $c = 6$ Pentru $k \geqslant 3$ egalitatea (1) nu poate avea loc, întrucît ar rezulta că $\overline{abc}$ are mai mult de trei cifre.

I.64. Se consideră numărul 1234567891011...99100. Să se suprime 100 de cifre astfel încît numărul rămas să fie cel mai mare posibil.

R. Pentru ca numărul rămas după suprimarea celor 100 de cifre să fie cel mai mare, primele cifre ale sale trebuie să fie cît mai mari posibile. Putem face ca el să înceapă cu 5 de 9, aceştia provenind de la 9, 19, 29,39 şi 49. Pentru aceasta este necesar să ştergem $8 + 19 + 19 + 19 + 19 = 84$ cifre.

Următoarea cifră nu mai poate fi 9, deoarece am avea de şters încă 19 cifre:

$$5, 0, 5, 1, 5, 2, 5, 3, 5, 4, 5, 5, 5, 6, 5, 7, 5, 8, 5 \tag{1}$$

deci am suprima în total $84 + 19 = 103$ cifre. Cel mai apropiat 8 dintre cifrele rămase se obţine suprimînd 17 cifre, ceea ce nu este posibil pentru că din nou, $84 + 17 = 101 > 100$. De aceea vom face ca următoarea cifră să fie 8, ştergînd încă 15 dintre cifrele (1). Am suprimat astfel $84 + 15 = 99$ cifre. Mai trebuie ştearsă o cifră; evident, vom şterge cifra 5 de la numărul58. Aşadar, numărul căutat este 9999978596061 ... 99 100.

I.65. Să se determine toate numerele de două cifre, scrise în baza zece, pentru care suma dintre număr şi răsturnatul său este un pătrat perfect.

R. Fie $\overline{xy}$ un număr cu proprietatea din enunţ. Rezultă $\overline{xy} + \overline{yx} = 11(x + y)$. Cum $x + y \leqslant 18$ şi $11(x + y)$ este un pătrat perfect, deducem că $x + y = 11$. Considerînd toate perechile de cifre a căror sumă este 11 găsim numerele cu proprietatea din enunţ :

29, 92, 38, 83, 47, 74, 56, 65.

I.66. Să se afle cel mai mare multiplu de 8 care are toate cifrele distincte.

R. Analog criteriului de divizibilitate cu 4, un număr este divizibil cu 8 dacă ultimele sale trei cifre formează un număr divizibil cu 8. Cel mai mare număr cu toate cifrele distincte este 9876543210. Acest număr nu este multiplu de 8. Păstrind ordinea primelor şapte cifre şi observind că printre numerele 012, 021, 102, 120 şi 201 există unul singur divizibil cu 8, anume 120, deducem că numărul căutat este 9876543120.

I.67. Fără a efectua împărţirea, să se determine restul împărţirii numărului 9876543210 la 36.

R. Deoarece suma cifrelor numărului $N = 9876543210$ este 45 rezultă că N se divide cu 9. De asemenea, N este par, deci N se divide cu 18.

Fie $N = 36q + r$, $0 \leqslant r < 36$.

Cum N şi $36q$ se divid cu 18, deducem că şi r se divide cu 18, adică r poate fi doar zero şi 18.

Dar $r \neq 0$, căci N nu se divide cu 4. Prin urmare, $r = 18$.

I.68. Cîte cifre se folosesc pentru a scrie toate numerele de la 1 la 999?

R. Există 9 numere de o cifră, $99 - 9 = 90$ numere de două cifre şi $999 - 90 - 9 = 900$ numere de trei cifre. Pentru scrierea tuturor numerelor de la 1 la 999 se folosesc deci $9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 = 2\,889$ cifre.

I.69. Să se afle numărul maxim de cifre ale unui număr care are proprietatea că oricare două cifre vecine ale sale formează un număr divizibil cu 23.

R. Numerele de două cifre care se divid cu 23 sînt : 23, 46, 69, 92, (1). Deci ultima cifră a unui număr cu proprietatea din enunţ poate fi doar 3, 6, 9 sau 2.

Fie N unul dintre numerele căutate (cu număr maxim de cifre). Ultima cifră a lui N este 3 (dacă N s-ar termina în 6, 9 sau 2 el nu ar avea un număr maxim de cifre, deoarece adăugînd pe 9, 2 şi 3 respectiv, am obţine un număr cu proprietatea enunţată ce are cu o cifră mai mult decît N).

Numărul format cu ultimele două cifre ale lui N se divide cu 23 deci este unul din numerele (1). Rezultă că penultima cifră a lui N este 2. În mod analog se deduce că cifra care îi precede lui 2 este 9, că cea de la stînga lui 9 este 6, iar cea de la stînga lui 6 este 4. Cum nici unul dintre numerele (1) nu se termină în 4, rezultă că $N = 46\,923$, deci numărul maxim de cifre este 5.

I.70. Să se determine locul primului termen din şirul 0, 5, 10, 15, 20, ...
care are suma cifrelor egală cu 45.

R. Cel mai mic număr natural care are suma cifrelor egală cu 45 este 99 999. Acest număr nu aparţine însă şirului dat, deoarece nu se divide cu 5.

Întrucît şirul

$$0,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20,\ \ldots$$

conţine şi numere de şase cifre cu proprietatea cerută (de exemplu 888 885), primul termen al şirului dat care are suma cifrelor egală cu 45 trebuie căutat printre numerele de şase cifre ca e se termină în 0 sau 5. Singurul număr cu aceste proprietăţi care se termină în 0 este 999 990 şi nu este cel mai mic posibil, căci $999\,990 > 888\,885$.

Numerele rămase se termină în 5, deci au suma primelor cinci cifre egală cu 40; cel mai mic dintre ele începe cu 4 (în caz contrar, suma primelor cinci cifre ale sale ar fi cel mult $3 + 9 + 9 + 9 + 9 = 39 < 40$).

Prin urmare primul număr din şirul dat cu suma cifrelor 45 este 499 995; el ocupă locul $499\,995 : 5 + 1 = 100\,000$.

I.71. Să se arate că orice număr natural mai mare ca 3 se poate scrie ca o sumă de numere prime.

R. Dacă numărul n este par atunci $n = 2k$, unde k este număr natural mai mare sau egal cu 2. În acest caz numărul n se scrie:

$$n = \underbrace{2 + 2 + \ldots + 2}_{k \text{ termeni}}.$$

Dacă numărul n este impar, rezultă $n = 2k + 1$ unde k este număr natural mai mare sau egal cu 2. În acest caz numărul n se scrie:

$$n = 3 + \underbrace{2 + 2 + \ldots + 2}_{k-1 \text{ termeni}}$$

sau

$$n = 3 + 2(k - 1) = 2k + 1.$$

De fiecare dată k este mai mare sau egal cu 2, deoarece n este mai mare decît 3.

I.72. Să se determine cifrele distincte x, y, z scrise în baza 10, ştiind că: $\overline{xx} + \overline{yx} + \overline{zx} = \overline{xy3}$.

R. Din egalitatea din enunţ rezultă că 3 este ultima cifră a numărului $x + x + x = 3x$. Deoarece numai pentru $x = 1$ ultima cifră a lui $3x$ este 3, rezultă că $x = 1$. Pentru $x = 1$ egalitatea din enunţ devine $11 + \overline{y1} + \overline{z1} = \overline{1y3}$ sau $11 + 10y + 1 + 10z + 1 = 100 + 10y + 3$ (1).

Făcînd reducerile în egalitatea (1) obţinem $10z = 90$ deci $z = 9$. Cum în egalitatea (1) y s-a redus, rezultă că y este arbitrar, cu condiţia ca cifrele x, y, z să fie distincte, Cum $x = 1$ şi $z = 9$ rezultă $y \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Deci problema admite şapte soluţii.

I.73. Să se găsească toate perechile de numere naturale a căror sumă este 87 şi pentru care 87 este divizibil cu diferenţa lor.

R. Notăm cu a şi b cele două numere naturale. Atunci $a + b = 87$ şi 87 este divizibil cu $a - b$. Deci $a - b$ este unul din divizorii lui 87 adică $a - b$ este unul din numerele 1, 3, 29, 87. Rezultă situaţiile:

I). $a + b = 87$, $a - b = 1$ II) $a + b = 87$, $a - b = 3$;

III). $a + b = 87$, $a - b = 29$ IV). $a + b = 87$, $a - b = 87$.

În fiecare din cele patru cazuri cunoaştem suma şi diferenţa celor două numere a şi b. Rezultă soluţiile în fiecare caz:

I). $a = 44$, $b = 43$; II). $a = 45$, $b = 42$

III). $a = 58$, $b = 29$; IV). $a = 87$, $b = 0$.

I.74. Fie A mulţimea numerelor de forma $\overline{12y}$ divizibile cu 12 şi B mulţimea numerelor de forma $\overline{1ab}$ divizibile cu 15.

a) Să se determine mulţimile A şi B.
b) Să se afle $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

R. a). Deoarece $\overline{12y}$ este divizibil cu 12 rezultă că $\overline{12y}$ este divizibil cu 4 şi cu 3. Din condiţia de divizibilitate cu 4 rezultă că $y \in \{0, 4, 8\}$. Din condiţia de divizibilitate cu 3 rezultă că $1 + 2 + y = M.3$ (1) şi cum $y \in \{0, 4, 8\}$ rezultă că $y = 0$ este singura cifră care verifică (1). Deci $A = \{120\}$. Deoarece $\overline{1ab}$ este divizibil cu 15 rezultă că $\overline{1ab}$ este divizibil cu 5 şi cu 3. Din condiţia de divizibilitate cu 5 a numărului $\overline{1ab}$ rezultă că $b \in \{0, 5\}$. Dacă $b = 0$ rezultă că numărul $\overline{1a0}$ se divide cu 3 pentru $a \in \{2, 5, 8\}$. Dacă $b = 5$ rezultă că numărul $\overline{1a5}$ se divide cu 3 pentru $a \in \{0, 3, 6, 9\}$. Deci $B = \{120, 150, 180, 105, 135, 165, 195\}$.

b). Deoarece $A \subset B$ rezultă că $A \cup B = B$ şi $A \cap B = A$. De asemenea, avem: $A - B = \emptyset$, $B \setminus A = \{150, 180, 105, 135, 165, 195\}$.

I.75. Arătaţi că diferenţa dintre un număr de trei cifre şi răsturnatul său nu poate fi pătrat perfect.

R. Fie $N = \overline{abc}$, unde a, b, c sînt cifre şi $a > c$. Avem : $\overline{abc} - \overline{cba} = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99a - 99c = 99(a - c)$. Pentru ca expresia $9.11(a - c)$ să fie pătrat perfect ar trebui ca $a - c$ să fie o putere impară a lui 11 ceea ce este imposibil deoarece $a - c < 9$.

I.76. Să se determine trei cifre a, b, c astfel încît $\overline{bca}_{(9)} = \overline{acb}_{(7)}$, unde indicii sînt baze de numeraţie.

R. Avem :

$$9^2b + 9c + a = 7^2a + 7c + b$$

sau

$$81b + 9c + a = 49a + 7c + b$$

sau $2c = 48a - 80b$ de unde $c = 8(3a - 5b)$. Dar cum $0 \leqslant c \leqslant 6$ rezultă $c = 0$, deci $3a = 5b$ şi ţinînd cont că $0 \leqslant a \leqslant 6$, $0 \leqslant b \leqslant 6$ obţinem $b = 3$, $a = 5$. Deci $\overline{305}_{(9)} = \overline{503}_{(7)}$.

I.77. Să se demonstreze că dacă printre ultimele trei cifre ale unui număr există cifra 9, atunci numărul nu se divide cu 125.

R. Vom folosi următorul criteriu : Un număr natural este divizibil cu 5^p, $p \in \mathbb{N}$ dacă şi numai dacă numărul format cu ultimele p cifre este divizibil cu 5^p.

Luînd $p = 3$ obţinem că un număr natural este divizibil prin 125, dacă şi numai dacă numărul format din ultimele trei cifre se împarte exact la 125. Dar numerele formate din trei cifre şi divizibile cu 125 sînt 000, 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875. Deci, dacă printre ultimele trei cifre ale unui număr există cifra 9 atunci acel număr nu se divide cu 125.

I.78^M. La sfîrşitul unui an şcolar, fiecare dintre elevii unei clase au primit cîte o fotografie de la fiecare dintre colegii săi. În total au fost schimbate 992 fotografii. Cîţi elevi erau în clasă?

R. Dacă notăm prin n numărul de elevi din clasă,un elev a primit $n - 1$ fotografii, deci în total, au fost schimbate $n(n - 1)$ fotografii. Deci $n(n - 1) = 992 = 31 \cdot 32$. Rezultă $n = 32$, deoarece numai unul dintre numerele $n - 1$ şi n este par şi atunci sau n se divide cu $32 = 2^5$, sau $n - 1$ se divide cu 32 şi $n - 1$ şi n sînt consecutive.

I.79^M. Fiecare din cei 80 elevi ai unui colectiv ştiu cel puţin una din limbile franceză şi engleză. Un număr de 41 ştiu limba franceză, iar 60, limba engleză. Cîţi dintre elevi ştiu numai engleza şi cîţi ştiu numai franceza? Cîţi ştiu ambele limbi?

R. Ambele limbi le știu $41 + 60 - 80 = 21$ (elevi). Numai franceza o știu $41 - 21 = 20$ (elevi), iar engleza o știu numai $60 - 21 = 39$ (elevi).

I.80[PO]. Să se găsească numărul x știind că:

$$6 - (18 - 12) : 6 = [8 - 3 \cdot (9 - 7)] \cdot x.$$

R. Avem:

$$6 - (18 - 12) : 6 = 6 - 6 : 6 = 6 - 1 = 5,$$

$$8 - 3 \cdot (9 - 7) = 8 - 3 \cdot 2 = 8 - 6 = 2$$

deci ecuația devine $5 = 2x$, de unde $x = \frac{5}{2}$.

I.81[PO]. Să se găsească cu cît se modifică produsul a patru numere dacă primul se mărește cu jumătatea lui, al doilea se mărește cu a treia parte din el, al treilea se micșorează cu a patra parte din el, iar al patrulea se micșorează cu a treia parte din el.

R. Fie a, b, c, d cele patru numere. Numerele devin

$$a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}, \quad b + \frac{b}{3} = \frac{4b}{3}, \quad c - \frac{c}{4} = \frac{3c}{4}, \quad d - \frac{d}{3} = \frac{2d}{3},$$

iar produsul lor devine:

$$\frac{3a}{2} \cdot \frac{4b}{3} \cdot \frac{3c}{4} \cdot \frac{2d}{3} = abcd.$$

Deci produsul nu se modifică.

I.82[PO]. Într-un săculeț sînt 10 bile albe, 12 bile negre și 16 bile roșii. Care este numărul cel mai mic de bile pe care trebuie să-l scoatem, fără a ne uita în săculeț, pentru a fi siguri că am scos 3 bile de aceeași culoare? De ce?

R. Numărul minim de bile pe care trebuie să-l scoatem din săculeț pentru a fi siguri că am scos 3 bile de aceeași culoare este 7, deoarece printre primele 6 putem avea cîte două din fiecare culoare. A șaptea va fi, în mod cert, de una din cele trei culori.

I.83[M]. Suma dintre un număr prim și un număr natural impar este 24735. Să se afle numerele.

R. Știm că suma a două numere impare este un număr par. Dacă numărul prim dat în problemă este mai mare sau egal cu 3, atunci el este impar și problema nu este posibilă, căci 24 735 este impar. Deci numărul prim este 2, iar cel impar este $24\,735 - 2 = 24\,733$.

I.84[M]. Mai mulți elevi și-au schimbat, cu ocazia unei întîlniri prietenești, fotografii unul cu celălalt, astfel încît fiecare elev a primit cîte o fotografie de la fiecare elev. Să se arate că, oricare ar fi numărul elevilor respectivi, numărul total de fotografii este par.

R. Notînd cu n numărul elevilor, am văzut (v. problema nr. 1.78 din acest paragraf) că numărul total de fotografii schimbate este $n(n-1)$. Acest număr, fiind un produs de două numere naturale consecutive, este întotdeauna un număr par.

1.85[PO]. La o împărțire de numere naturale se știe că deîmpărțitul este 5 883, iar restul 1.

a) Să se afle împărțitorul și cîtul, știind că sînt diferite de 1 și că împărțitorul este mai mare decît cîtul.

b) Cîte soluții are problema?

R. Potrivit teoremei împărțirii cu rest, $D = Î \cdot C + R$, deci, în cazul problemei noastre, $5\,883 = Î \cdot C + 1$, de unde $Î \cdot C = 5\,882 = 2 \cdot 17 \cdot 173$. Avem situațiile $Î = 173$, $C = 34$, $Î = 346$, $C = 17$; $Î = 2\,941$, $C = 2$, deci 3 soluții.

1.86[PO]. a) Dovediți că suma a trei numere naturale consecutive este divizibilă cu 3;

b) În ce caz suma a trei numere naturale consecutive este divizibilă cu 6?

R. a). Fie $a-1$, a, $a+1$ cele trei numere naturale consecutive, $a \geqslant 1$. Atunci suma lor este $(a-1)+a+(a+1)=3a$, ceea ce dovedește că suma lor este un număr divizibil cu 3.

b). Suma este divizibilă cu 6 cînd a este divizibil cu 2.

1.87[PO]. Se consideră numărul de patru cifre $N = \overline{a23b}$ (a, b sînt cifre).

a) Să se determine a și b astfel ca numărul N să fie multiplu de 18;

b) Să se determine a și b astfel ca N să fie divizibil cu 36. Aceeași întrebare pentru 72.

c) Să se determine a și b astfel ca numărul N să fie multiplu de 45.

R. a). Numărul N este divizibil cu 18 dacă este divizibil și cu 2 și cu 9. Așadar b trebuie să fie număr par și suma $a+2+3+b=5+a+b$ să fie un număr divizibil cu 9. Cum $a+b \leqslant 18$ rezultă sau $a+b+5=18$, sau $a+b+5=9$. În primul caz rezultă $a+b=13$ cu soluțiile $(a, b) \in \{(9, 4), (7, 6), (5, 8)\}$. În al doilea caz avem $a+b=4$ cu soluțiile $(a, b) \in \{(4, 0), (2, 2)\}$.

Așadar, numerele căutate sînt:

$$9234,\ 7236,\ 5238,\ 4230,\ 2232. \tag{1}$$

b). Fiind divizibil cu 36, N este divizibil cu 18. Dintre numerele din șirul (1) sînt divizibile cu 4 numerele 7236, 2232. Dintre acestea, este divizibil cu 72 numai 2232.

c). Numărul căutat este 4230.

1.88[M]. Se consideră mulțimile:

$$A = \{1, 2, 3, 4\},\ B = \{1, 2\},\ C = \{6, 7\},\ D = \{6, 8, 9\}.$$

i). Să se afle valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a). $1 \in A$; b). $2 \in C$; c). $6 \in C$; d). $A \subseteq A$; e). $A \supseteq B$; f) $A = B$.

ii). Să se afle:

a). $A \cup B$; b). $A \cup C$; c). $A \cap B$; d). $C \cap D$; e). $B \cap C$; f). $C - D$; g). $D - C$.

R. i). a). Propoziţia este adevărată deci valoarea de adevăr a propoziţiei este 1, căci elementul 1 aparţine mulţimii A. b). Valoarea de adevăr a propoziţiei este 0 căci elementul 2 nu aparţine lui C. c). Valoarea de adevăr a propoziţiei „$6 \in C$" este 1 căci elementul 6 aparţine, în adevăr, lui C. d). Valoarea de adevăr a propoziţiei „$A \subseteq A$" este 1 căci orice mulţime este inclusă (nestrict) în ea însăşi. Propoziţia „$A \subset A$", în schimb, este falsă. e). A include pe B deci valoarea de adevăr a propoziţiei este 1, căci orice element al lui B se găseşte şi în A. f). Conform definiţiei, două mulţimi sînt egale dacă au aceleaşi elemente. Cum, de exemplu, $4 \in A$ şi $4 \notin B$ rezultă că propoziţia „$A = B$" este falsă, deci valoarea sa de adevăr este 0.

ii). Potrivit definiţiei :

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ sau } x \in B\}:$$

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ şi } x \in B\}:$$

$$A - B = \{x | x \in A \text{ şi } x \notin B\}.$$

În cazul nostru :

$$a) \quad A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

(elementele comune, 1 şi 2, se scriu o singură dată),

$$b) \; A \cap B = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 2\} = \{1, 2\},$$

$$c) \; A \cup C = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{6, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\},$$

$$d) \; C \cap D = \{6, 7\} \cap \{6, 8, 9\} = \{6\},$$

$$e) \; B \cap C = \{1, 2\} \cap \{6, 7\} = \emptyset,$$

$$f) \; C - D = \{6, 7\} - \{6, 8, 9\} = \{7\},$$

$$g) \; D - C = \{6, 8, 9\} - \{6, 7\} = \{8, 9\}.$$

I.89[M]. Să se reprezinte fiecare din următoarele mulţimi scriind elementele sale între acolade :

$$A = \{x | x \in \mathbb{N},\ 2x = 6\};$$

$$B = \{x | x \in \mathbb{N},\ 2x + 1 = 10\};$$

$$C = \{x | x \in \mathbb{N},\ 2x + 1 \leqslant 8\};$$

$$D = \{x | x \in \mathbb{N},\ x + 1 < 7\};$$

$$E = \{x | x \in \mathbb{N}^*,\ 3x < 8\};$$

$$F = \{x | x \in \mathbb{Q},\ 2x = 7{,}25\};$$

$$G = \left\{x | x \in \mathbb{Q}^*,\ \frac{2}{3} x = 1\right\}.$$

R. Pentru ecuaţia $2x = 6$ avem soluţia $x = 6 : 2 = 3$, deci $A = \{3\}$. Ecuaţia $2x + 1 = 10$ devine, scăzînd ambilor membri pe 1, $2x = 10 - 1$, deci $x = 9 : 2 = 4{,}5 \notin \mathbb{N}$ deci $B = \emptyset$. Inecuaţia $2x + 1 \leqslant 8$ devine $2x \leqslant 8 - 1$, deci $x \leqslant 7 : 2 = 3{,}5$. Numerele naturale x care verifică inegalitatea $x \leqslant 3{,}5$ sînt 0, 1, 2, 3, deci $C = \{0, 1, 2, 3\}$. Inecuaţia $x + 1 < 7$ se scrie şi $x < 7 - 1$, deci $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Inecuaţia $3x < 8$ se scrie $x < 8 : 3$, $x < 2{,}(6)$, deci $E = \{1, 2\}$. Ecuaţia $2x = 7{,}25$ are ca soluţie $x = 7{,}25 : 2 = 3{,}625$, deci $F = \{3{,}625\}$. Ecuaţia $\frac{2}{3} \cdot x = 1$ are soluţia $x = 1 : \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$, deci $G = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

I.90. Fie $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 150\}$. Să se precizeze trei elemente care aparţin mulţimii şi trei elemente care nu aparţin mulţimii.

R. Avem, de exemplu, 2, 8, $16 \in A$ şi 200, 159, $1\,000 \notin A$.

I.91. Care din următoarele mulţimi sînt egale şi care nu sînt egale:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ B = \{2, 1, 3, 5\},\ C = \{5, 1, 3, 4, 2\},$$
$$D = \{5, 1, 3, 2\}.$$

R. Avem $A = C$, $B = D$, $A \neq B$, $A \neq D$, $B \neq C$, $C \neq D$.

I.92. Să se determine mulţimea:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este divizor al lui } 18\}.$$

R. Divizorii lui 18 sînt 1, 2, 3, 6, 9, 18, deci $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$.

I.93. Fie $A = \{1, 2, 3, \ldots, 54\}$. Să se determine:

$$B = \{x \in A \mid x \text{ este multiplu de } 6\}.$$

R. Multiplii lui 6, aparţinînd lui A, sînt 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, deci $B = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54\}$.

I.94. Să se determine mulţimile:

$$M = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2n,\ n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\},$$
$$P = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 4m + 6n,\ m = 1, 2, 3,\ n = -1, 0\}.$$

R. Avem $M = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$. În cazul lui P fie pentru n valoarea -1. Atunci $x = 4m + 6(-1)$ şi:

pentru $m = 1$ obţinem $x = 4 \cdot 1 + 6(-1) = 4 - 6 = -2 \notin \mathbb{N}$;
pentru $m = 2$ obţinem $x = 4 \cdot 2 + 6(-1) = 8 - 6 = 2 \in \mathbb{N}$
pentru $m = 3$ obţinem $x = 4 \cdot 3 + 6(-1) = 12 - 6 = 6 \in \mathbb{N}$;
pentru $n = 0$ vom avea $x = 4m + 6 \cdot 0 = 4m$ şi:
pentru $m = 1$ obţinem $x = 4 \cdot 1 = 4 \in \mathbb{N}$
pentru $m = 2$ obţinem $x = 4 \cdot 2 = 8 \in \mathbb{N}$
pentru $m = 3$ obţinem $x = 4 \cdot 3 = 12 \in \mathbb{N}$.

Deci $P = \{2, 4, 6, 8, 12\}$.

I.95^{M}. Să se reprezinte fiecare din următoarele mulţimi scriind elementele sale între acolade:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ -1 \leqslant x < 4\};$$
$$B = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ -3 \leqslant x < 0\};$$
$$C = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ -3 \leqslant x \leqslant 3\};$$
$$D = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ -2 \leqslant x < 1\}.$$

R. Avem:

$A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{-3, -2, -1\}$, $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $D = \{-2, -1, 0\}$.

I.96[M]. Se consideră mulţimile:

$A = \{-2, -3, 0, 1\}$; $B = \{-2, 0\}$; $C = \{-4, -5, 5\}$.

Să se afle:

i) $A \cup B$; ii) $A \cup C$; iii) $A \cap B$; iv) $A \cap C$; v) $A - C$.

R. Avem:

$$A \cup B = \{-3, -2, 0, 1\};\ A \cup C = \{-5 -4, -3, -2, 0, 1, 5\};\ A \cap B = \{-2, 0\}$$

$$A \cap C = \emptyset;\ A - C = \{-2, -3, 0, 1\}.$$

I.97[M]. Să se determine mulţimile X şi Y, ştiind că sînt îndeplinite condiţiile:

i). $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4\}$;

ii). $X \cap Y = \{2, 3\}$;

iii). $X - Y = \{1\}$.

R. Din condiţia iii) rezultă $1 \in X$ şi $1 \notin Y$. Din condiţia ii) rezultă $2 \in X$, $3 \in X$, $2 \in Y$, $3 \in Y$. Cum $4 \in X \cup Y$ şi $4 \notin X \cap Y$ rezultă sau $4 \in X$, sau $4 \in Y$, respectiv $4 \notin X$ sau $4 \notin Y$. Nu putem avea $4 \in X$ căci ar rezulta $4 \in X - Y$, contrar cu iii), deci $4 \in Y$. Atunci:

$$X = \{1, 2, 3\},\ Y = \{2, 3, 4\}.$$

I.98. Există mulţimea X care satisface egalitatea:

$$X \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 4\}?$$

Muţimea $\{1, 2, 5\}$ satisface condiţia? Dar mulţimea $\{1, 4\}$? Cîte mulţimi X satisfac condiţia?

R. Mulţimea $\{1, 2, 5\}$ nu satisface relaţia din enunţ căci:

$$\{1, 2, 5\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 5\} \neq \{1, 2, 4\}.$$

În schimb, mulţimea $\{1, 4\}$ satisface relaţia. Mulţimile X care satisfac relaţia sînt $\{4\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$, $\{1, 2, 4\}$, deci, în total, 4 mulţimi căci din relaţia dată rezultă în mod necesar $4 \in X$, elementele 1 şi 2 putînd aparţine sau nu lui X.

I.99[M]. Ştim că $A = B \cap A$ şi $B = A \cap B$. Mulţimile A şi B au elemente comune? Au şi elemente necomune? Consideraţi un exemplu.

R. Evident, $A \cap B = B \cap A$ deci $A = B$. Răspunsul la prima întrebare este, deci, afirmativ, iar la a doua negativ. Considerînd, de pildă, $A = \{1, 5\}$, $B = \{2, 7\}$, vedem că nu se verifică relaţiile.

I.100. Fie mulţimile:

$$A = \{1, 3, 5, 7\},\ B = \{2, 4, 8, 9\}.$$

Care din următoarele afirmaţii:

a) $3 \in A$ şi $5 \in B$; b). $1 \in A$ sau $2 \in B$; c). $9 \in A$ şi $3 \in B$; d). $4 \notin A$ sau $5 \in B$, sînt adevărate?

R. a). Afirmaţia este falsă căci $5 \notin B$; b). Afirmaţia este adevărată căci, de exemplu, $1 \in A$; c). Afirmaţia este falsă căci $9 \notin A$; d). Afirmaţia este adevărată căci, de exemplu, $4 \notin A$.

I.101. Să se calculeze $D_{15} \cup D_{18}$, $D_{24} \cup D_{30}$, $D_{36} - D_{24}$, unde D_a reprezintă mulţimea divizorilor naturali ai lui $a \in \mathbb{N}^*$.

R. Avem:

$$D_{15} = \{1, 3, 5, 15\},\ D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\},$$

$$D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12, 24\},\ D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\},$$

$$D_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

deci:

$$D_{15} \cup D_{18} = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 15, 18\},$$

$$D_{24} \cup D_{30} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 24, 30\}$$

$$D_{36} - D_{24} = \{9, 18, 36\}.$$

I.102. Fie $A = \{a \in \mathbb{N} \mid (a, 15)_* = 3,\ a < 20\}$, $B = A - \{a \in \mathbb{N} \mid [a, 9]_* = 18\}$.
Să se determine B.

R. Numerele a cu proprietatea $(a, 15)_* = 3$ sînt acelea care se divid la 3 şi nu se divid la 5. Acestea sînt 3, 6, 9, 12, 18, dacă punem condiţia $a < 20$. Deci $A = \{3, 6, 9, 12, 18\}$. Numerele naturale a care satisfac $[a, 9]_* = 18$ sînt 2, 6, 18. Deci $B = \{3, 6, 9, 12, 18\} - \{2, 6, 18\} = \{3, 9, 12\}$.

I.103. Fie $a \in \mathbb{N}^*$. Să se determine:

$$\{x \mid x \in \mathbb{N},\ x \leqslant a\} \cap \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x \geqslant a\}.$$

R. Dacă $t \in \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x \leqslant a\} \cap \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \geqslant a\}$ rezultă $t \leqslant a$, $t \geqslant a$, deci $t = a$; deci:

$$\{x \mid x \in \mathbb{N},\ x \leqslant a\} \cap \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x \geqslant a\} = \{a\}.$$

I.104. Fie P mulţimea triunghiurilor, A mulţimea triunghiurilor dreptunghice, B mulţimea triunghiurilor echilaterale, C mulţimea triunghiurilor isoscele. Care dintre relaţiile:

a). $A \cup B \cup C = P$; b). $A \cap B = C$; c). $C \cap B = C$

sînt adevărate?

R. a°). Relaţia nu este adevărată căci, de exemplu, un triunghi oarecare care nu este nici isoscel, nici dreptunghic nu este în $A \cup B \cup C$; b). Relaţia este falsă căci un triunghi dreptunghic nu este întotdeauna isoscel c). Relaţia este adevărată, căci orice triunghi echilateral este, în particular, isoscel.

I.105. Să se determine mulţimile A şi B ştiind că:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$
$$A \cap B = \{4, 6, 9\}$$
$$A \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$$
$$B \cup \{4, 8\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

CAPITOLUL II

RAPOARTE ȘI PROPORȚII

II.1. Verificați care dintre rapoartele $\frac{4}{6}$; $\frac{6}{6}$; $\frac{8}{12}$; $\frac{1}{1,5}$; $\frac{1}{4}$ formează proporții cu raportul $\frac{2}{3}$.

R. a) $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$ este o proporție, deoarece $2\cdot 6=4\cdot 3$; $6\cdot 3\neq 6\cdot 2$, deci $\frac{6}{6}$ nu formează proporții cu raportul $\frac{2}{3}$. La fel $\frac{8}{12}$ și $\frac{1}{1,5}$ formează proporții cu raportul $\frac{2}{3}$, iar $\frac{1}{4}$ nu formează proporții cu $\frac{2}{3}$.

II.2. Numerele 3 ; 15 ; 9 ; 5 pot forma o proporție? Dar numerele : a). 3 ; 0,(6) ; 2 ; 1. b). 2 ; 3 ; 1 ; 1,5. c). 2 ; 3 ; 8 ; 9. d). 1, 6, $\frac{1}{2}$, 3.

R. Da, pentru că $3\cdot 15=9\cdot 5$, deci, formează, de exemplu, proporția : $\frac{3}{9}=\frac{5}{15}$; a) Avem $3\cdot 0,(6)=2\cdot 1$, deci există, de exemplu, proporția $\frac{3}{2}=\frac{1}{0,(6)}$; b) Există, de exemplu, proporția : $\frac{2}{3}=\frac{1}{1,5}$; c) Nu. d) $\frac{1}{2}\cdot 6=1\cdot 3$, avem deci $\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{3}{6}$.

II.3. Există y și x astfel încît :

a). $\frac{5}{7}=\frac{x}{y}$; b). $\frac{x}{6}=\frac{y}{8}$; c). $\frac{3}{x}=\frac{y}{4}$?

Dați exemple.

R. a) Da, de exemplu : $x=10$ și $y=14$; b) Da, $x=3$ și $y=4$; c) $x=2$ și $y=6$ și altele.

II.4. Există x astfel încît : $\frac{x}{0,2}=\frac{0,5}{0,1}$? Sînt mai multe valori ale lui x care verifică egalitatea dată?

R. Da, $x = 1$ şi este unic.

II.5. Aflaţi x din:

a). $\dfrac{3}{5} = \dfrac{4}{x}$; b). $\dfrac{1}{\frac{1}{2}} = \dfrac{x}{2}$; c). $\dfrac{5}{x} = 1$; d). $\dfrac{x}{0{,}5} = \dfrac{0{,}2}{0{,}01}$

e). $\dfrac{1}{\frac{1}{3}} = \dfrac{0}{x}$; f). $\dfrac{5}{7} = \dfrac{x}{0{,}2}$; g). $\dfrac{1}{\frac{1}{5}} = \dfrac{5}{x}$;

h). $\dfrac{x}{10-10:10} = \dfrac{3-3:3}{6}$; i). $\dfrac{8\cdot 5 - 3\cdot 5}{4\cdot 3} = \dfrac{x}{6}$.

j). $\dfrac{2^3\cdot 3^4}{3^2\cdot 2^2} = \dfrac{5\cdot 3^2\cdot 2}{x}$; k). $\dfrac{\frac{1}{5}}{0{,}37} = \dfrac{x}{3\left(2\frac{2}{3}+3{,}5\right)}$.

l). $\dfrac{8\cdot 2 - 2.3}{x} = \dfrac{4}{8\cdot 23 - 3\cdot 4}$; m). $\dfrac{13{,}2 - 5(0+1)}{8} = \dfrac{8{,}2}{x}$.

R. a) Aplicînd proprietatea fundamentală a proporţiilor, obţinem: $x = \dfrac{4\cdot 5}{3}$, $x = 6{,}(6)$; b) $x = \dfrac{1\cdot 2}{\frac{1}{2}}$, $x = 4$; c) $x = 5$; d) $x = \dfrac{0{,}5\cdot 0{,}2}{0{,}01}$, $x = 10$; e) Nu există x cu această proprietate, deoarece $1\cdot x = 0\cdot \dfrac{1}{3}$ implică $x = 0$, dar $\dfrac{0}{0}$ nu există. f) $x = \dfrac{0{,}2\cdot 5}{7}$, $x = \dfrac{1}{7}$; g) $x = 1$; h) $x = \dfrac{(10-10:10)(3-3:3)}{6}$, $x = \dfrac{(10-1)(3-1)}{6}$, $x = 3$; i) $x = \dfrac{6(8\cdot 5 - 3\cdot 5)}{3\cdot 4}$, $x = \dfrac{75}{6}$; j) $x = \dfrac{3^2\cdot 2^2\cdot 5\cdot 3^2\cdot 2}{2^3\cdot 3^4}$, $x = 5$; k) $x = 10$; l) $x = 430$; m) $x = 8$.

II.6. Determinaţi numerele raţionale x, y ştiind că $x + y = 10$ şi că $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{5}$.

R. Aplicăm proprietatea fundamentală a şirului de rapoarte egale. Obţinem: $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{x+y}{3+5} = \dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4}$. Din $\dfrac{x}{3} = \dfrac{5}{4}$ rezultă $x = \dfrac{15}{4}$ iar din $\dfrac{y}{5} = \dfrac{5}{4}$ rezultă $y = \dfrac{25}{4}$.

II.7. Fie şirul de rapoarte egale: $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z}{5}$. Determinaţi numerele raţionale x, y, z ştiind că $x + y + z = 24$.

R. Avem: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{3+4+5} = \frac{24}{12} = 2$, de unde rezultă $x = 6$, $y = 8$, $z = 10$

II.8. Determinați x, y, z, știind că: $\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}$ și că a). $x + y = 70$; b). $z - y = 4$.

R. a) Avem, din primele două rapoarte: $\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = \frac{x+y}{7} = 10$, deci $x=50$, $y = 20$ și $z = 60$.

b) $\frac{z}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z-y}{4} = 1$, deci $z = 6$, $y = 2$ și $x = 5$.

II.9. Determinați x, y, z știind că: $2x + 3y + 4z = 100$ și că

$$\frac{x}{0{,}1} = \frac{y}{0{,}2} = \frac{z}{0{,}3}.$$

R. Amplificăm primul raport cu 2, al doilea cu 3, al treilea cu 4 și aplicăm proprietatea fundamentală. Obținem: $\frac{2x}{0{,}2} = \frac{3y}{0{,}6} = \frac{4z}{1{,}2} = \frac{2x+3y+4z}{0{,}2+0{,}6+1{,}2} = \frac{100}{2} = 50$, de unde: $\frac{x}{0{,}1} = 50$, deci $x = 5$, $\frac{y}{0{,}2} = 50$, deci $y = 10$ și $\frac{z}{0{,}3} = 50$, deci $z = 15$.

II.10^{M}. Se știe că: $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$. Calculați: $\frac{2x}{2x+3y}$.

R. Înmulțim rapoartele cu 2/3 și apoi adunăm numărătorii la numitori. Obținem:

$$\frac{2x}{3y} = \frac{4}{9}, \quad \frac{2x}{2x+3y} = \frac{4}{4+9}, \text{ deci: } \frac{2x}{2x+3y} = \frac{}{13}.$$

II.11^{PO}. Determinați numerele x, y, z știind că:

$$x + y + z = 45; \quad \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \text{ și } \frac{y}{6} = \frac{z}{8}.$$

R. Avem $\frac{y}{6} = \frac{z}{8}$ echivalent cu $\frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ și împreună cu proporția din ipoteză $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$, obținem șirul de rapoarte egale $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ căruia îi aplicăm proprietatea fundamentală. Rezultă $x = 10$, $y = 15$, $z = 20$.

II.12^{PO}. Fie proporțiile:

$\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ și $\frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ cu x, y, z numere raționale pozitive.

1). Determinați k și p astfel încît să avem:

$$\frac{x}{8} = \frac{y}{k} = \frac{z}{p}.$$

2). Pentru $k = 12$ și $p = 15$, determinați x, y, z știind că:

a). $x + y + z = 70$.

b). $x^2 + y^2 + z^2 = 433$.

R. 1) Din $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ rezultă $\frac{x}{8} = \frac{y}{12}$, deci $k = 12$. La fel din $\frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ rezultă $\frac{y}{12} = \frac{z}{15}$, de unde $p = 15$.

2) a) Din șirul: $\frac{x}{8} = \frac{y}{12} = \frac{z}{15} = \frac{x+y+z}{8+12+15} = \frac{70}{35} = 2$ rezultă $x = 16$, $y = 24$ și $z = 30$. b) Dacă $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$, atunci $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ și aplicînd acest rezultat obținem: $\frac{x^2}{64} = \frac{y^2}{144} = \frac{z^2}{225} = \frac{x^2+y^2+z^2}{64+144+225} = 1$, de unde $x^2 = 64$, adică $x = 8$ și $y = 12$, $z = 15$.

II.13. Determinați laturile unui triunghi cu perimetrul 24, știind că sînt proporționale cu 3, 4, 5.

R. Avem $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{12} = \frac{24}{12} = 2$, deci $x = 6$, $y = 8$ și $z = 10$.

II.14. Determinați numerele x, y, z știind că suma lor este 47 și că sînt invers proporționale cu numerele 3, 4, 5.

R. Avem: $\frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{4}} = \frac{z}{\frac{1}{5}} = \frac{x+y+z}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}} = \frac{47}{\frac{47}{60}} = 60$,

deci $x = 20$, $y = 15$ și $z = 12$.

II.15. Aflați x pozitiv din:

a). $\frac{5}{x} = \frac{x}{20}$; b). $\frac{0,4}{x} = \frac{x}{0,9}$; c). $\frac{x}{1,21} = \frac{1,69}{x}$.

R. a) Avem $x^2 = 100$, $x = 10$ b). $x = 0,6$; c) $x = 1,43$.

CAPITOLUL III

OPERAŢII CU NUMERE ÎNTREGI ŞI RAŢIONALE

§. 1. Numere întregi. Operaţii cu numere întregi.

III.1.1. Să se stabilească dacă următoarele egalităţi sînt adevărate:

a) $-1 = 2 - 1$; b) $-1 = (-1)^2$; c) $0^2 = 0$; d) $1 = (-1)^2$;

e) $-2 = 2$; f) $|-2| = 2$; g) $a^2 = a^3, a \in \mathbb{Z}$; h) $3x = 2x, x \in \mathbb{Z}$;

i) $|0| = 0$; j) $\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$; k) $\frac{5}{10} = \frac{4}{8}$; l) $\frac{-1}{-2} = \frac{+1}{+2}$;

m) $\frac{0}{3} = \frac{0}{4}$; n) $6 \cdot 6 = (-6) \cdot (-6)$; o) $\frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$, $b \neq 0$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

R. Sînt adevărate egalităţile: c); d) (căci $(-1)^2 = (-1)(-1) = 1$); f); g) pentru $a = 1$ sau $a = 0$; h) pentru $x = 0$; i); k); l); m); n); o) pentru $a = b$ sau $a = 0$.

III.1.2. Să se stabilească valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii:

a) $1 \neq (-1)^2$; b) $|-2| = |+2|$; c) $|-3| > -3$; d) $4 > 4$;

e) $4 = 4$; f) $a^2 \neq a, a \in \mathbb{Z}$; g) $\frac{a}{b} = 1$, $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0)$; h) $|ab| = |a||b|$, $(\forall)\, a, b \in \mathbb{Z}$; i) $|-4| > |3|$; j) $a^2 > 0$, $a \in \mathbb{Z}$; k) $6 + |-6| = 0$; l) $5 + (|-5|) \neq 0$; m) $3^2 \neq (-3)^2$; n) $-(-6) = 6$;

o) $a + b = b + a$, $(\forall)\, a, b \in \mathbb{Z}$; p) $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(\forall)\, a, b, c \in \mathbb{Z}$; q) $ab = ba$, $(\forall)\, a, b \in \mathbb{Z}$; r) $(ab)c = a(bc)$, $(\forall)\, a, b, c \in \mathbb{Z}$.

R. Asociind valoarea de adevăr 1 unei propoziţii adevărate şi valoarea de adevăr 0 unei propoziţii false vom avea a) 0; b) 1; c) 1; d) 0; e) 1; f) 1 pentru $a = 0$ sau $a = 1$ şi 0 pentru $a \in \mathbb{Z} - \{0, 1\}$; g) 0 pentru $a \neq b$ şi 1 pentru $a = b$; h) 1; i) 1; j) 0 pentru $a = 0$ şi 1 pentru $a \in \mathbb{Z} - \{0\}$; k) 0; l) 1; m) 0; n) 1; o) 1; p) 1; q) 1; r) 1.

III.1.3. Să se efectueze:

a) $15 + 8$; b) $6 + 237$; c) $-7 + (-69)$; d) $0 + (-0)$;
e) $-a^2 + (-a^2)$, $a \in \mathbb{Z}$; f) $|-6| + 6$; g) $|a^2| + |-a^2|$, $a \in \mathbb{Z}$;
h) $\frac{2}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right)$; i) $-\frac{a}{b} + \frac{2a}{2b}$, $a, b \in \mathbb{Q}$; j) $-a + 2a$, $a \in \mathbb{Z}$;
k) $3x + (-2x)$, $x \in \mathbb{Q}$; l) $1001\,a + (-201\,a)$, $a \in \mathbb{Q}$.

R. Avem: a) 23; b) 243; c) -76; d) 0; e) $-2a^2$; f) 12; g) $2a^2$; h) 0; i) 0; j) a; k) x; l) $800\,a$.

III.1.4. Să se scrie opusul pentru fiecare din numerele întregi:

a) 0; b) 6; c) a, $a \in \mathbb{Z}$; d) $2a + (-3a)$, $a \in \mathbb{Z}$; e) $(-1)^2$;
f) $(-x)^3$, $x \in \mathbb{Z}$; g) $|-2|$; h) $|-2a| + |-3a|$, $a \in \mathbb{Z}$.

R. Opusul, pentru fiecare caz; este: a) 0; b) -6; c) $-a$; d) a, căci $2a + (-3a) = -a$); e) -1, căci $(-1)^2 = 1$; f) x^3, căci $(-x)^3 = -x^3$; g) -2, căci $|-2| = 2$; h) $-5|a|$, căci $|-2a| + |-3a| = 5|a|$.

III.1.5. Să se efectueze:

a) $-5 - 3$; b) $-5 - (-2)$; c) $17 - (+8)$; d) $-3x - 2x$;
e) $-2a - (-7a)$; f) $|-2| - |-3|$; g) $-(2+3) - (5-3)$;
h) $(-a^3) - (-a)^3$, $a \in \mathbb{Z}$; i) $0 - 2$.

R. Avem: a) -8; b) -3; c) 9; d) $-5x$; e) $5a$; f) -1; g) -7; h) 0; i) -2.

III.1.6. Să se desfacă parantezele în exercițiile:

a) $-(-6)$; b) $+(-61)$; c) $-(+32)$; d) $+(+48)$; e) $-1 - (-2-3)$; f) $3 + (-2+5)$; g) $-6 + (7-8)$; h) $-(-2a + 3a) + (-2a - 3a)$; i) $-(x^2 + 3x^2) - (-2x^2 - 5x^2)$.

R. Avem: a) 6; b) -61; c) -32; d) $+48$; e) $-1 + 2 + 3$; f) $3 - 2 + 5$; g) $-6 + 7 - 8$; h) $2a - 3a - 2a - 3a$; i) $-x^2 - 3x^2 + 2x^2 + 5x^2$.

III.1.7. Să se desfacă parantezele în exercițiile:

a) $2 - [3 - (-5+7) - (-2-3)]$; b) $2 + \{-3 - 5 - (-6-8)]\}$;
c) $-(-6-7) - [-6 - (-5-3)]$.

R. Avem:

a) $2 - [3 - (-5+7) - (-2-3)] = 2 - (3 + 5 - 7 + 2 + 3) = 2 - 3 - 5 + 7 - 2 - 3$;

b) $2 + \{-3 - [5 - (6-8)]\} = 2 + [-3 - (5 - 6 + 8)] = 2 + -3 - 5 + 6 - 8 = 2 - 3 - 5 + 6 - 8$;

c) $-(-6-7) - [-6 - (-5-3)] = 6 + 7 - (-6 + 5 + 3) = 6 + 7 + 6 - 5 - 3$.

III.1.8. Să se efectueze:

a) $6\cdot(-3)$; b) $0\cdot(-5)$; c) $0\cdot0$; d) $a\cdot0$, $a\in\mathbb{Z}$; e) $(-5)\cdot(-3)$; f) $(+5)\cdot(+7)$; g) $(-5)\cdot(+9)$; h) $(-1)\cdot(+3)\cdot(-6)$; i) $(-5)\cdot(-2)\cdot(-3)$.

R. Avem rezultatele: a) -18; b) 0; c) 0; d) 0; e) 15; f) 35; g) -45; h) 18; i) -30.

III.1.9. i) Să se verifice proprietatea de comutativitate a adunării numerelor întregi pe exemplele:

a) $2+8=8+2$; b) $(-3)+(-5)=(-5)+(-3)$; c) $(+6)+(-18)=(-18)+(+6)$; d) $(-274)+(+356)=(+356)+(-274)$; e) $2a+(-3b)=(-3b)+2a$, $a, b\in\mathbb{Z}$;

ii) Să se verifice proprietatea de asociativitate a adunării numerelor întregi pe exemplele:

a) $(-2)+[(-3)+(+5)]=[(-2)+(-3)]+(+5)$;

b) $(+243)+[(-6)+(-18)]=[(+243)+(-6)]+(-18)$;

c) $(-6)+[(-8)+(-18)]=[(-6)+(-8)]+(-18)$;

d) $(+3)+[(+5)+(+702)]=[(+3)+(+5)]+(+702)$;

e) $(-3a)+[(-5a)+(+6a)]=[(-3a)+(-5a)]+(+6a), a\in\mathbb{Z}$;

f) $(-7b)+[(+5c)+(-3a)]=[(-7b)+(+5c)]+(-3a)$; $a, b, c\in\mathbb{Z}$.

iii) Să se verifice proprietatea de comutativitate a înmulțirii numerelor întregi pe exemplele:

a) $(-6)\cdot(+9)=(+9)\cdot(-6)$; b) $(+3)\cdot(+7)=(+7)\cdot(+3)$; c) $0\cdot5=5\cdot0$; d) $(15)\cdot(-204)=(-204)\cdot(15)$; e) $(+3a)\cdot(-5b)=(-5b)(+3a)$, $a, b\in\mathbb{Z}$;

iv) Să se verifice proprietatea de asociativitate a înmulțirii numerelor întregi pe exemplele:

a) $(-3)\cdot[(-5)\cdot(+2)]=[(-3)\cdot(-5)]\cdot(+2)$;

b) $(+18)\cdot[(+62)\cdot(34)]=[(+18)\cdot(+62)]\cdot(34)$;

c) $(-62)\cdot[(-324)\cdot(-421)]=[(-62)\cdot(-324)]\cdot(-421)$;

d) $(+3a)\cdot[(-4b)\cdot(+5c)]=[(+3a)\cdot(-4b)]\cdot(+5c)$, $a, b, c\in\mathbb{Z}$;

v) Să se verifice proprietatea de distributivitate a înmulțirii față de adunarea numerelor întregi pe exemplele:

a) $(-3)\cdot[(+6)+(-15)]=(-3)\cdot(+6)+(-3)\cdot(-15)$;

b) $(+18)\cdot[(-6)+(+17)]=(+18)\cdot(-6)+(+18)\cdot(+17)$;

c) $(-3a)\cdot[(-5b)+(+6c)]=(-3a)\cdot(-5b)+(-3a)\cdot(+6c)$, $a, b, c\in\mathbb{Z}$;

vi) Să se verifice proprietatea de distributivitate a înmulţirii faţă de scăderea numerelor întregi pe exemplele:

a) $(-2)\cdot[(-6)-(-4)]=(-2)\cdot(-6)-(-2)\cdot(-4)$;

b) $(+243)\cdot[(-8)-(-12)]=(+243)\cdot(-8)-(+243)\cdot(-12)$;

c) $(+6)\cdot[(+3)-(+18)]=(+6)\cdot(+3)-(+6)\cdot(+18)$;

d) $(-2)\cdot[(+3a)-(-5b)]=(-2)\cdot(+3a)-(-2)\cdot(-5b)$, $a, b\in\mathbb{Z}$.

R. Efectuînd calculele, egalităţile de la punctele i) — vi) rezultă imediat.

III.1.10. Să se scoată factorul comun în exercițiile:

a) $(-2)\cdot(+8)-(-2)\cdot(+7)$; b) $(+15)\cdot(-16)+(-17)\cdot(-16)$;

c) $(+a)\cdot(-2)-(-b)\cdot(-2)$; d) $(-x)(-3)+(-x)(+5)$, $x\in\mathbb{Z}$.

R. Avem:

a) $(-2)\cdot(+8)-(-2)\cdot(+7)=(-2)[(+8)-(+7)]$;

b) $(+15)\cdot(-16)+(-17)\cdot(-16)=[(+15)+(-17)]\cdot(-16)$;

c) $(+a)\cdot(-2)-(-b)\cdot(-2)=[(+a)-(-b)]\cdot(-2)$;

d) $(-x)\cdot(-3)+(-x)\cdot(+5)=(-x)\cdot[(-3)+(+5)]$.

III.1.11. Să se efectueze:

a) $2\cdot3+5$; b) $2\cdot3+5\cdot18$; c) $(-2)\cdot(-3)+(+6)\cdot(-9)$; d) $(-2)\cdot(-3)\cdot(-5)+(+6)\cdot(+8)\cdot(-9)$; e) $(-16)\cdot(+7)+(-5)\cdot(-3)\cdot0$; f) $(-2)\cdot[(+3)\cdot(-5)+(-4)\cdot(+3)]$; g) $(+7)\cdot(-6)[0\cdot(-5)(-3)+(-3)\cdot(+2)]+(-7)$; h) $\{1+2\cdot[1-(-2)\cdot(-3)]\}\cdot(-10)$; i) $6\cdot[(-3)+(-7)-(-9)(-2)]\cdot[(-5)\cdot(-3)+(-13)]$; j) $(-8)\cdot(-7)\cdot(-6)\cdot(-5)\cdot(-4)\cdot(-3)\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot0$; k) $(-3)+(-5)\cdot(+2)-(-3)\cdot(-4)[(+3)\cdot(-5)+(-7)\cdot2]$; l) $(-10)[10-(-10)]$; m) $6+\{6+[6+6(+2\cdot3)]\}$; n) $(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)$; o) $5\cdot0+(-5)\cdot0$.

R. Avem rezultatele: a) 11; b) 96; c) -48; d) -462; e) -112; f) 54; g) 245; h) 90; i) -336; j) 0; k) 335; l) 0; m) 54; n) 0; o) 0.

III.1.12. Să se efectueze:

a) $56:7$; b) $0:3$; c) $(-4):(-1)$; d) $(+5):(-5)$; e) $(-18):(+3)$; f) $16:(-8)$; g) $26:(+13)$.

R. Avem: a) 8; b) 0; c) 4; d) -1; e) -6; f) -2; g) 2.

III.1.13. Să se efectueze:

a) $(-3483):(+27)$; b) $(-19474):(-749)$; c) $(+1708974):(-3249)$;
d) $(+144):(+12)$; e) $(+1001):[(-11)\cdot(-13)]$.

R. Avem: a) -129; b) 26; c) -526; d) 12; e) 7.

III.1.14. Să se efectueze:

a) $2\cdot\{3+(-5)\cdot[6:(-2)+1]\}+5\cdot[(-6)\cdot(-7):(-3)+2]$;

b) $24:\{[30+(-6)\cdot(-5)]:60+2\}+15:[(-3)\cdot(-1)]$;

c) $16:2:8+(-6):(-2):(-1)+(-7)\cdot(-8)+3\cdot(-5):15$;

d) $(-10)\cdot[4+4\cdot(10+(10:5)]+7\cdot(-6):[21-(5+2)]$.

R. Avem:

a) $2\cdot\{3+(-5)\cdot[6:(-2)+1]\}+5\cdot[(-6)\cdot(-7):(-3)+2]=2\cdot[3+(-5)\cdot(-3+1)]+5\cdot(-14+2)=2\cdot[3+(-5)\cdot(-2)]+5\cdot(-12)=2\cdot(3+10)-60=2\cdot13-60=26-60=-34$;

b) $24:\{[30+(-6)\cdot(-5)]:60+2\}+15:[(-3)\cdot(-1)]=24:[(30+30):60+2]+15:3=24:(60:60+2)+5=24:(1+2)+5=24:3+5=8+5=13$;

c) $16:2:8+(-6):(-2):(-1)+(-7)\cdot(-8)+3\cdot(-5):15=8:8+3:(-1)+56+(-15):15=1-3+56-1=53$;

d) $(-10)\cdot[4+4\cdot(10+10:5)]+7\cdot(-6):[21-(5+2)]=(-10)\cdot[4+4\cdot(10+2)]+7\cdot(-6):(21-7)=(-10)\cdot(4+4\cdot12)+(-42):14=(-10)\cdot(4+48)-3=(-10)\cdot(+52)-3=-520-3=-523$.

III.1.15. Să se efectueze:

a) 0^4; b) 0^n, $n\in\mathbb{N}^*$; c) $(-1)^4$; d) $(-1)^{2n}$, $n\in\mathbb{N}^*$; e) 4^0; f) $(-5)^0$;
g) $(-1)^{2n-1}$; h) $(-2)^6$; i) $(-3)^5$; j) $(3\cdot8)^0$; k) $(a\cdot b)^0$, a, $b\in\mathbb{Z}^*$.

R. Deoarece, potrivit definiției, $a^n=\underbrace{a\cdot a\ldots a}_{n \text{ ori}}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $a\in\mathbb{Z}$ și $a^0=1$, avem: a) 0; b) 0; c) 1; d) 1; e) 1; f) 1; g) -1; h) 64; i) -243; j) 1; k) 1.

III.1.16. Să se scrie rezultatul sub formă de putere:

a) $(-4)^0\cdot(-4)^0$; b) $(-3)^4\cdot(-3)^7$; c) $(+4)^9\cdot(+4)^{11}$; d) $(-a)^0\cdot(-a)^6$, $a\in\mathbb{Z}^*$; e) $(-x)^9\cdot(-x)^{26}$, $x\in\mathbb{Z}$; f) $(-3)^1\cdot(-3)^2\cdot(-3)^3$;
g) $(-5)^9\cdot(-5)^6$; h) $3^a\cdot3^{2a}$, $a\in\mathbb{N}$.

R. Deoarece $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$, $(\forall)$ m, $n\in\mathbb{N}$, $a\in\mathbb{Z}^*$ rezultă: a) $(-4)^0$; b) $(-3)^{11}$; c) $(+4)^{20}$; d) $(-a)^6$; e) $(-x)^{35}$; f) $(-3)^6$; g) $(-5)^{15}$; h) 3^{3a}.

III.1.17. Să se scrie sub formă de putere:

a) $(0^4)^5$; b) $[(-3)^6]^0$; c) $[(-5)^8]^9$; d) $[(+6)^5]^7$; e) $[(-c)^5]^3$;
f) $[(-2)^a]^2$; g) $(3^a)^b$; h) $[(+1)^a]^b$ cu a, $b\in\mathbb{N}^*$, $c\in\mathbb{Z}$.

R. Deoarece $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, $(\forall)\ a \in \mathbb{Z}^*$, m, $n \in \mathbb{N}$, rezultă : a) 0^{20}; b) $(-3)^0$; c) $(-5)^{72}$; d) $(+6)^{35}$; e) $(-c)^{15}$; f) $(-2)^{2a}$; g) $3^{a \cdot b}$; h) $1^{a \cdot b}$.

III.1.18. Să se scrie sub formă de produs de puteri :

a) $(0 \cdot 0)^3$; b) $[(-1) \cdot (-1)]^5$; c) $[(-3) \cdot (+2)]^7$; d) $[(-6) \cdot (-7)]^a$; $a \in \mathbb{N}$; e) $[(-a) \cdot (-b)]^c$, a, $b \in \mathbb{Z}$; f) $[(-8) \cdot (-5)]^0$; g) $[(-3) \cdot (+a)]^b$ $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$.

R. Deoarece $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, $(\forall)\ a$, $b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, avem : a) $0^3 \cdot 0^3$; b) $(-1)^5 \cdot (-)^5$; c) $(-3)^5 \cdot (+2)^7$; d) $(-6)^a \cdot (-7)^a$; e) $(-a)^7 \cdot (-b)^6$; f) $(-8)^0 \cdot (-5)^0$; g) $(-3)^b \cdot (+a)^b$.

III.1.19. Să se scrie sub formă de putere :

a) $(-1)^6 : (-1)^3$; b) $(+2)^9 : (+2)^5$; c) $(-5)^{2 \cdot a} : (-5)^a$, $a \in \mathbb{N}$; d) $(2 \cdot 3)^8 : (2 \cdot 3)^6$; e) $a^9 : a^5$, $a \in \mathbb{Z}$.

R. Deoarece $a^m : a^n = a^{m-n}$, $(\forall)\ a \in \mathbb{Z}^*$ m, $n \in \mathbb{N}$, $m > n$, rezultă : a) $(-1)^3$; b) $(+2)^4$; c) $(-5)^a$; d) $(2 \cdot 3)^2$; e) a^4.

III.1.20. Să se scrie sub formă de putere :

a) $2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^8$; b) $[(-3)^7 : (-3)^2]^5$; c) $(16^6 \cdot 16^4)^3 : (16^5 : 16^2)$; d) $[(a^4 \cdot a^7) : a^5]^6$, $a \in \mathbb{Z}^*$; e) $[(-7)^a \cdot (-7)^b]^c$, a, b, $c \in \mathbb{N}$; f) $(a^b \cdot a^c)^d$, $a \in \mathbb{Z}$, b, c, $d \in \mathbb{N}$; g) $(a^n : a^m)^k$, $a \in \mathbb{Z}^*$, m, n, $k \in \mathbb{N}$, $n > m$.

R. Avem : a) 2^{16}; b) $(-3)^{25}$; c) 16^{27}; d) a^{36}; e) $(-7)^{(a+b)c}$; f) $a^{(b+c) \cdot d}$; g) $a^{(n-m) \cdot k}$

III.1.21. Să se efectueze :

a) $2^3 + 8$; b) $(-1)^3 \cdot (-1)^5 + 6^0$; c) $[(+2) \cdot 3 \cdot (-5) + 8 \cdot (-2)]^6 : [(+5) \cdot (-3) - (-6) \cdot (+9) + (-1) \cdot (7) \cdot (-1)]^4$; d) $[(2^2)^2]^2$; e) $(5^{30} \cdot 5^{20})^{40} - (-5)^{60} \cdot (-5)^{40} \cdot (-5)^{30} \cdot (-5)^{70}$; f) $[2 \cdot (-3)]^6 + [9 \cdot (-4)]^3$; g) $[3^{20} : (-3)^{16}]^5 : 3^{18}$; h) $[a^7 \cdot (-a)^5]^3 + [(-a)^3 \cdot (-a)^{15}]^2$.

R. Avem : a) 16; b) 2; c) 2116; d) 256; e) 0; f) 0; g) 9; h) 0.

III.1.22. Să se precizeze care din inegalitățile :

a) $2 \geqslant 0$; b) $a \leqslant b$, a, $b \in \mathbb{Z}$; c) $3 \geqslant 3$; d) $5 < 9$; e) $a^2 > a$, $a \in \mathbb{Z} - \{0, 1\}$; f) $2^3 < 3^2$.

sînt stricte.

R. Sînt stricte inegalitățile d), e), f).

III.1.23. Fie $a, b \in \mathbb{Z}$. Ce se poate spune despre a şi b dacă $a \leqslant b$ şi $b \leqslant a$?

R. Numerele a şi b sînt egale.

III.1.24. Care numere întregi a satisfac inegalitatea $a^2 \leqslant a$?

R. Nu există nici un număr strict negativ a cu proprietatea din enunţ căci $a^2 > 0$, $a < 0$ şi inegalitatea nu poate avea loc (un număr strict pozitiv nu poate fi mai mic decît un număr strict negativ). Verifică $a = 0$ şi, de asemenea, $a = 1$. Pentru $a \geqslant 2$ se observă că $a^2 > a$, deci singurele numere întregi care verifică relaţia $a^2 \leqslant a$ sînt 0 şi 1.

III.1.25. Pentru ce valori ale lui $m, n, p \in \mathbb{N}$, numărul:

$$\frac{1}{2}(-1)^m + \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{6}(-1)^p$$

este întreg?

R. Se ştie că dacă m este par atunci $(-1)^m = 1$, iar dacă m este impar, $(-1)^m = -1$. Trebuie, aşa dar, să cercetăm toate modurile de a alege semnele $+$ şi $-$ în aşa fel încît suma:

$$\pm\frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6}$$

să fie un număr întreg. Verificînd toate variantele posibile găsim

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1; \quad -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 0;$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = -1; \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = 0$$

deci avem cazurile:

a) m, n, p pare; b) m, impar, n şi p pare; c) m, n, p impare; c) m par, n şi p impare.

III.1.26 PO. Să se găsească toate perechile (a, b) de numere întregi cu proprietatea că suma lor este egală cu produsul lor.

R. O astfel de pereche este, desigur, $(0, 0)$. Dacă $a = 0$, din $a + b = ab$ rezultă $b = 0$. Fie, deci, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Atunci $a = ab - b = b(a - 1)$ şi, de asemenea, $b = a(b - 1)$. Se observă că nu putem avea $a = 1$ căci ar rezulta $a = 0$, absurd (şi nici $b = 1$). Dar a şi $a - 1$ sint numere întregi consecutive şi nu au nici un divizor comun (dacă ar avea, acest divizor ar trebui să dividă şi pe $a-(a-1)=1$), deci din $a=b(a-1)$ rezultă $a \mid b$. Analog se arată că $b \mid a$. Deci sau $a = b$, sau $a = -b$. Dacă $a = b$ rezultă $a^2 = 2a$, adică $a = 2$ (cazul $a = 0$ l-am analizat, iar dacă $a = -b$ atunci $ab = 0$, deci sau $a = 0$ sau $b = 0$, cazuri analizate anterior).

Aşadar, singurele perechi (a, b) care satisfac enunţul sînt $(0, 0)$ şi $(2, 2)$.

III.1.27 PO. Suma a două numere întregi este -24, iar cîtul lor este 3, (împărţirea făcîndu-se exact). Să se găsească numerele.

R. Din enunţ rezultă că deîmpărţitul este $3x$ iar împărţitorul este x. Deoarece $3x + x = -24$ rezultă $4x = -24$ deci $x = -6$ iar $3x$ este -18.

III.1.28[M]**.** Numerele a, b, c, d, e, f, g, h sînt numere întregi diferite de 0. Se consideră, de asemenea, numerele x, y, z astfel încît:

$$x = ab^2c^4d^3e^5f^3gh^3; \quad y = bc^7de^6f^2gh^3; \quad z = a^3b^3cd^8ef^3g^2.$$

Pot fi x, y, z simultan negative?

R. Se observă că o putere pară a unuia din numerele a, b, c, d, e, f, g, h nu modifică semnul numerelor x, y, z (acesta fiind mereu $+$). Aşadar, semnele numerelor x, y, z sînt date de produsul puterilor, impare ale numerelor a, b, c, d, e, f, g, h, adică de numerele:

$$ad^3e^5f^3gh^3; \; bc^7dgh^3, \; a^3b^3cef^3.$$

Dacă toate aceste numere ar fi negative atunci şi produsul lor:

$$(ad^3e^5f^3gh^3) \cdot (bc^7dgh^3) \cdot (a^3b^3cef^3) = a^4b^4c^8d^4e^6f^6g^2h^6$$

ar fi un număr negativ, absurd căci acest ultim produs este format numai din puteri pare ale unor numere întregi.

Deci, x, y, z nu pot fi simultan negative.

III.1.29. Există $x \in \mathbb{Z}$ astfel ca $x^2 = -4$? Dar $x^2 = 0{,}2$?

R. Nu există un astfel de x căci puterea pară a unui număr întreg este un număr natural, pe cînd -4, respectiv $0{,}2$ nu sînt numere naturale.

III.1.30. Pentru ce valori întregi ale lui n, numărul $\dfrac{n^2+4}{n}$ este întreg?

R. Deoarece $\dfrac{n^2+4}{n} = \dfrac{n^2}{n} + \dfrac{4}{n} = n + \dfrac{4}{n}$, rezultă că numărul $\dfrac{4}{n}$ trebuie să fie întreg deci n divide pe 4, adică $n \in \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$.

III.1.31[PO]**.** Poate fi numărul $\dfrac{n^2+n+1}{n+1}$ întreg?

R. Avem $\dfrac{n^2+n+1}{n+1} = \dfrac{n(n+1)+1}{n+1} = \dfrac{n(n+1)}{n+1} + \dfrac{1}{n+1} = n + \dfrac{1}{n+1}$.

Trebuie deci ca $\dfrac{1}{n+1}$ să fie întreg, lucru posibil dacă $n+1 = 1$, deci $n = 0$, sau $n+1 = -1$ adică $n = -2$. Deci $n \in \{-2, 0\}$.

III.1.32. Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$; b) $-3 \in \mathbb{N}$; c) $0 \in \mathbb{Z}^*$; d) $0 \in \mathbb{N}$; e) $\mathbb{N} = \mathbb{Z}$; f) $\mathbb{Z} - \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$; g) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z} \cup \mathbb{N}$; h) $\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \cup \mathbb{N}$; i) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$.

R. Avem: a) 1; b) 0; c) 0; d) 1; e) 0; f) 1; g) 1; h) 1; i) 1.

III.1.33. Există $x \in \mathbb{Z}$ astfel încît $|x| + |x-2| = 0$? Dar $|x| + |x-2| > 0$?

R. Deoarece $|x| \geqslant 0$, $(\forall)\, x \in \mathbb{Z}$, pentru ca $|x| + |x-2|$ să fie egal cu 0 trebuie ca $|x| = |x-2| = 0$, absurd căci rezultă, pe de o parte, $x = 0$, iar pe de alta, $x = 2$.
Deducem, de asemenea, $|x| + |x-2| \geqslant 0$, $(\forall)\, x \in \mathbb{Z}$, și cum $|x| + |x-2| \neq 0$ rezultă $|x| + |x-2| > 0$, $(\forall)\, x \in \mathbb{Z}$.

III.1.34. Pentru ce numere întregi x are loc:

$$|x| + x = 0?$$

R. Dacă $x \leqslant 0$, atunci $|x| = -x$ și egalitatea se verifică. Dacă $x > 0$ atunci $|x| = x$ și egalitatea devinde $2x = 0$, adică $x = 0$, absurd.
Așadar, toate numerele întregi cel mult egale cu 0 verifică relația din enunț.

III.1.35. Care număr întreg este egal cu opusul lui?

R. Singurul număr întreg egal cu opusul lui este 0 căci dacă x este un astfel de număr, deci $x = -x$, rezultă $x + x = 0$, deci $2x = 0$, adică $x = 0 : 2 = 0$.

III.1.36. Să se găsească toate numerele întregi a care satisfac inegalitatea $|a| < 6$.

R. Numerele căutate sînt $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

III.1.37 Po. Există numere naturale a astfel ca $2^a = 15$?

R. Pentru orice $a \in \mathbb{N}$, 2^a este un număr par, pe cînd 15 este număr impar. Deci nu există a cu proprietatea din enunț.

III.1.38 Po. Să se arate că $2^{60} < 3^{40}$.

R. Cum $2^{60} = (2^3)^{20} = 8^{20}$ și $3^{40} = (3^2)^{20} = 9^{20}$ și cum $1 < 8 < 9$ rezultă $8^{20} < 9^{20}$, deci $2^{60} < 3^{40}$.

III.1.39. Să se scrie toți divizorii întregi ai lui 36.

R. Divizorii ceruți sînt: $-36, -18, -12, -9, -6, -4, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$.

TESTUL 1

1. Să se efectueze:

a) (1p) $-3 - (-7) + (-5) - (-9) + (-6) + (+8) - (-7)$;

b) (1p) $|-3| + |-5| + (-7) - (-9) - (-11) + (+6) + |-7|$;

c) (1p) $2 \cdot 3 + 3 \cdot (-5) + 6 \cdot (-9) - (-7) \cdot (-5) + (-7) \cdot (+2)$;

d) (2p) $(-2)^2 \cdot (-3) + [(-3)^2]^2 - 629 \cdot (-18) + 5^2 \cdot 5^3$.

2. (1p) Să se scrie opusele numerelor:

$$7;\ -3;\ 8;\ -10;\ 0;\ a;\ |a|,\ a \in \mathbb{Z}.$$

3. (1p) Să se desfacă parantezele:

$$6 - \{-6 - [(-3) - (-2 - 5)]\}.$$

4. (2p) Care numere întregi a şi b satisfac egalitatea $a^2+b^2=0$? Dar $a^2 + b^2 = 1$?

5. (1p) Să se scoată factor comun:

$$(-6)\cdot(-3)\cdot(+4) + (-17)\cdot(-6)\cdot(-3)\cdot(-13).$$

TESTUL 2

1. Să se scrie sub formă de putere:

a) (1p). $2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^7 \cdot 2^9 \cdot 2^{11} \cdot 2^{13} \cdot 2^{15} \cdot 2^{17} \cdot 2^{19}$;

b) (1p). $(3^3)^5 \cdot (3^3)^2 \cdot (3^2)^6 \cdot (3^5)^4 \cdot (3^6)^7 \cdot (3^9)^5$;

c) (1p). $(3^6 : 3^2) \cdot (3^7 : 3^2)^2 \cdot (3^9 : 3^5)^4$.

2^M. (1p). Să se calculeze $(-1)^k + (-1)^{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$.

3^M. (2p). Să se reprezinte fiecare din următoarele mulţimi scriind elementele sale în acolade:

$A = \{x|x \in \mathbb{Z}, -1 \leqslant x < 4\}$; $B = \{x|x \in \mathbb{Z}, -3 \leqslant x < 0\}$;
$C = \{x|x \in \mathbb{Z}, -3 \leqslant x \leqslant 3\}$; $D = \{x|x \in \mathbb{Z}, -2 \leqslant x < 1\}$.

4. (4p). Să se afle valoarea de adevăr a propoziţiei „$b > a$", unde:

$$a = (27^{31} - 2 \cdot 9^{46} + 4^{102} : 2^{203} - 3^{92})^{213},\ b = (-3)^{142}.$$

(Ilie Florescu G.M., E 6798)

TESTUL 3

1^M. (o jumătate de punct pentru fiecare exerciţiu). Să se efectueze:

a) $(-28)\cdot(-4)\cdot(-25)\cdot(-100)$; b) $(-248)\cdot(-24)\cdot(-360)$; c) $0 : (-1000)$; d) $(-1000) : (-1)$; e) $(-2000) : 1$; f) $(-40) : (-10)$; g) $(-36000) : (-100)$; h) $(-78\,596) : 2$; i) $(-420\,009) : (-3)$; j) $(-41\,616) : 204$; k) $(-1\,007\,010) : (-1\,005)$; l) $(-3\,240\,000) : (-180)$; m) $(-824\,000) : 200$; n) $(-10)\cdot(2 + 2\cdot 3)$; o) $(6 +$

$+ 6 : 3) \cdot (-100)$; p) $(-4) : 2 + (-6) \cdot (-3) \cdot (-10)$; r) $[-200 - -(-1\,800)] : (-10)^2$; s) $[(-2)^3 - 10 \cdot (-5)^2 + 2 \cdot (-10 + 10 : 2)] \cdot (-100)$; t) $(-2^3) + 10 \cdot [(-1)^{1000} + (-1)^{99} + 2 \cdot (-2 + 2 \cdot 3)]$;

u) $(-2)^{101} : 2^{99} \cdot - \cdot 10 \cdot \{-2 - 2 \cdot [(-4)^5 : 4^4 - 2]\}$.

TESTUL 4

1) (2p). Suma a două numere prime este 39. Să se determine numerele.

2) (2p). Să se găsească un număr cu 24 de divizori naturali.

3) (2p). Să se scrie numărul cel mai mare posibil cu ajutorul a 4 cifre de 1 fără a folosi semnele operațiilor matematice.

4) (4p). Să se cerceteze problema analoagă celei precedente, considerînd cifra 2 în loc de cifra 1.

§.2. Numere raționale. Operații cu numere raționale.

III.2.1. Să se reprezinte pe o axă numerele raționale:

$$0;\quad -3;\quad \frac{5}{8};\quad -1;\quad 2;\quad -\frac{7}{4};\quad 4;\quad \frac{5}{2}$$

R. Avem reprezentarea

$$-3 \qquad \frac{-7}{4} \qquad -1 \qquad 0 \qquad \frac{5}{8} \qquad 2 \qquad \frac{5}{2} \qquad 4$$

III.2.2. Să se precizeze dacă numerele:

$$-3;\quad -7;\quad -2{,}5;\quad -5{,}9;\quad \frac{7}{3};\quad \frac{-8}{-9};\quad 0$$

sînt raționale.

R. Toate numerele sînt raționale.

III.2.3. Să se stabilească dacă următoarele egalități sînt adevărate:

a) $-\frac{3}{5} = \frac{3}{5}$; b) $\frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$; c) $\frac{7}{9} = \frac{14}{18}$; d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$;

e) $\left|-\frac{7}{9}\right| = \frac{7}{9}$; f) $\left|-\frac{5}{3}\right| = -\frac{5}{3}$; g) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$,

$a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$.

R. Sînt adevărate egalitățile b), c), d), e), g), iar restul sînt false.

III.2.4. Să se simplifice fracţiile :

a) $\frac{2}{4}$; b) $\frac{5}{10}$; c) $-\frac{6}{8}$; d) $\frac{-8}{-16}$; e) $\frac{16}{8}$; f) $\frac{2a}{a}$, $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$; g) $\frac{16x^2}{14x}$, $x \in \mathbb{Z}$, $x \neq 0$.

R. Avem : a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $-\frac{3}{4}$; d) $\frac{1}{2}$; e) 2; f) 2; g) $\frac{8x}{7}$.

III.2.5. Să se amplifice fiecare din fracţiile :

a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{3}{5}$; c) $-\frac{1}{4}$; d) $\frac{-6}{-9}$; c) $\frac{8}{16}$; f) $\frac{10}{5}$; g) $\frac{2a}{3a}$, $a \in \mathbb{Z}^*$; h) $\frac{2x}{3}$.

cu : 2; 3; 5; 9; a, $a \in \mathbb{Z}^*$, -3.

R. Avem :

a) $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{5}{10}=\frac{9}{18}=\frac{a}{2a}=\frac{-3}{-6}$;

b) $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}=\frac{9}{15}=\frac{15}{25}=\frac{27}{45}=\frac{3a}{5a}=\frac{-9}{-15}$;

c) $-\frac{1}{4}=-\frac{2}{8}=-\frac{3}{12}=-\frac{5}{20}=-\frac{9}{36}=-\frac{a}{4a}=-\frac{-3}{-12}$;

d) $\frac{-6}{-9}=\frac{-12}{-18}=\frac{-18}{-27}=\frac{-30}{-45}=\frac{-54}{-81}=\frac{-6a}{-9a}=\frac{18}{27}$;

e) $\frac{8}{16}=\frac{16}{32}=\frac{24}{48}=\frac{40}{80}=\frac{72}{144}=\frac{8a}{16a}=\frac{-24}{-48}$;

f) $\frac{10}{5}=\frac{20}{10}=\frac{30}{15}=\frac{50}{25}=\frac{90}{45}=\frac{10a}{5a}=\frac{-30}{-15}$;

g) $\frac{2a}{3a}=\frac{4a}{6a}=\frac{6a}{9a}=\frac{10a}{15a}=\frac{18a}{27a}=\frac{2a^2}{3a^2}=\frac{-6a}{-9a}$;

h) $\frac{2x}{3}=\frac{4x}{6}=\frac{10x}{15}=\frac{18x}{27}=\frac{2ax}{3a}=\frac{-6x}{-9}$.

III.2.7. Care dintre următoarele numere :

$$\frac{-1}{-2};\ \frac{-3}{+2};\ \frac{-5}{-6};\ \frac{8}{9}$$

sînt pozitive?

R. Sînt pozitive numerele $\frac{-1}{-2}$; $\frac{-5}{-6}$; $\frac{8}{9}$.

III.2.8. Să se efectueze :

a) $\frac{1}{2}+0$; b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$; d) $\frac{2}{5}+\frac{7}{5}$;

e) $\frac{-8}{8}+\frac{3}{8}$; f) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$; g) $\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)$;

h) $\frac{a}{b}+\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, i) $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\left(-\frac{1}{5}\right)$.

R. Avem : a) $\frac{1}{2}$; b) 1; c) 1; d) $\frac{9}{5}$; e) $\frac{-5}{8}$; f) $\frac{3}{2}$; g) $-\frac{1}{2}$; h) $\frac{2a}{b}$; i) $\frac{1}{5}$.

III.2.9. Să se efectueze :

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}$; c) $\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}$; d) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$

e) $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{2}{13}$; f) $\left(-\frac{1}{8}\right)+\left(-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{9}$; g) $\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$;

h) $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{4}$; i) $\frac{7}{9}+\frac{5}{3}+\left(-\frac{9}{8}\right)$; j) $-\frac{5}{56}+\left(-\frac{8}{196}\right)$;

k) $\frac{1}{2}+\frac{1}{64}+\frac{3}{1024}$; l) $\frac{2}{20}+\frac{1}{18}+\left(-\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{-5}{36}\right)$; m) $\frac{6}{12}+$ $+\frac{9}{24}+\left(-\frac{5}{18}\right)$; n) $\frac{6}{16}+\frac{3}{8}+\left(-\frac{5}{24}\right)+\left(-\frac{6}{32}\right)$; o) $\frac{6}{12}+\frac{5}{14}+$ $+\left(-\frac{3}{16}\right)$; p) $\frac{3}{24}+\frac{1}{8}+\left(-\frac{1}{16}\right)$; r) $\frac{3}{16}+\left(-\frac{2}{64}\right)+\left(-\frac{5}{18}\right)$.

R Avem : a) $\frac{5}{6}$; b) $\frac{13}{36}$; c) $\frac{43}{144}$; d) $\frac{15}{16}$; e) $\frac{241}{468}$; f) $-\frac{77}{360}$;

g) $\frac{73}{168}$; h) $\frac{5}{24}$; i) $\frac{95}{72}$; j) $-\frac{51}{392}$; k) $\frac{51}{1024}$; l) $-\frac{33}{720}$; m) $\frac{43}{72}$;

n) $\frac{13}{24}$; o) $\frac{75}{112}$; p) $\frac{3}{16}$; r) $-\frac{35}{288}$.

III.2.10. Să se scrie opusul pentru fiecare din numerele raționale:

$$\text{a) } 0;\ \text{b) } -5;\ \text{c) } \frac{2}{3};\ \text{d) } -\frac{3}{8};\ \text{e) } \frac{-6}{-17};\ \text{f) } \frac{-8}{13};\ \text{g) } \left|\frac{-2}{3}\right|;$$

$$\text{h) } \left|-\frac{x}{2}\right|,\ x \in \mathbb{Z};\quad \text{i) } \left|\frac{-a}{2b}\right|,\ a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0.$$

R. Opusul, pentru fiecare caz, este: a) 0; b) 5; c) $-\frac{2}{3}$; d) $\frac{3}{8}$; e) $-\frac{6}{17}$; f) $\frac{8}{13}$; g) $-\frac{2}{3}$; h) $-\frac{|x|}{2}$; i) $-\frac{|a|}{2|b|}$.

III.2.11. Să se efectueze:

$$\text{a) } -\frac{5}{2}-\frac{7}{2};\ \text{b) } -\frac{9}{3}-\frac{8}{3};\ \text{c) } \frac{16}{9}-\frac{5}{9};\ \text{d) } \frac{8}{7}-\frac{9}{7};$$

$$\text{e) } \frac{5}{3}-\frac{8}{5};\ \text{f) } \frac{6}{4}-\frac{5}{2};\ \text{g) } -\frac{6}{5}-\left(-\frac{3}{8}\right);\ \text{h) } \frac{8}{2}-\frac{5}{3}-\frac{6}{9};$$

$$\text{i) } -\frac{8}{150}-\left(-\frac{7}{120}\right);\ \text{j) } 2\frac{1}{5}+\left(-1\frac{6}{7}\right);\ \text{k) } \frac{6}{5}-\frac{8}{7}-$$

$$-\left(-\frac{3}{9}\right);\ \text{l) } -\frac{5}{3}-\frac{5}{8}-\frac{5}{11};\ \text{m) } -\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16};$$

$$\text{n) } \frac{a}{b}-\frac{2a}{b}\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0;\ \text{o) } -\frac{x}{2}-\frac{x}{3}-\frac{x}{5},\ x \in \mathbb{Z}.$$

R. a) -6; b) $-\frac{17}{3}$; c) $\frac{11}{9}$; d) $-\frac{1}{7}$; e) $\frac{1}{15}$; f) -1; g) $-\frac{33}{40}$; h) $\frac{5}{3}$; i) $\frac{1}{200}$; j) $\frac{12}{35}$; k) $\frac{41}{105}$; l) $-\frac{725}{264}$; m) $-\frac{15}{16}$; n) $-\frac{a}{b}$; o) $-\frac{31}{30}x$.

III.2.12. Să se desfacă parantezele în exercițiile:

$$\text{a) } -\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{5}\right);\ \text{b) } \frac{1}{4}-\left(+\frac{5}{9}\right);\ \text{c) } -\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\right);$$

$$\text{d) } -\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{9}\right);\ \text{e) } \frac{3}{8}-\left(-\frac{5}{3}-\frac{7}{9}+\frac{2}{11}\right);\ \text{f) } -\frac{6}{5}-$$

$$-\left(-\frac{3}{9}+\frac{1}{2}\right);\ \text{g) } \left[\frac{1}{4}+(-6)\right]+\left(-\frac{1}{3}\right);$$

h) $-\left[-\left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{5}\right]$; i) $-\left\{-\left[-\left(-\frac{3}{5}-\frac{8}{9}\right)+\right.\right.$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\right]-\frac{6}{5}\right\}.$$

R. Avem : a) $-\frac{1}{2}+\frac{3}{5}$; b) $\frac{1}{4}-\frac{5}{9}$; c) $-\frac{1}{3}-\frac{1}{8}$; d) $-\frac{1}{6}+\frac{1}{9}$; e) $\frac{3}{8}+\frac{5}{3}+\frac{7}{9}-\frac{2}{11}$; f) $-\frac{6}{5}+\frac{3}{9}-\frac{1}{2}$; g) $\frac{1}{4}-6-\frac{1}{3}$; h) $-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}-$ $-\frac{1}{5}$; i) $\frac{3}{5}+\frac{8}{9}+\frac{1}{2}+\frac{6}{5}$.

III.2.13. Să se efectueze :

a) $0\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$; b) $\frac{6}{3}\cdot\left(-\frac{5}{8}\right)$; c) $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{5}{9}\right)$; d) $\left(-\frac{8}{5}\right)\cdot$ $\cdot\left(+\frac{12}{7}\right)$; e) $\left(-\frac{5}{4}\right)\cdot\left(+\frac{7}{10}\right)$; f) $\frac{3}{5}\cdot\frac{6}{2}$; g) $\left(-\frac{5}{8}\right)\cdot$ $\cdot\left(\frac{-7}{-3}\right)\cdot\left(+\frac{8}{9}\right)$; h) $\frac{x}{2}\cdot\left(-\frac{2}{x}\right)$, $x\in\mathbb{Z}^*$; i) $\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{4}$; $x\in\mathbb{Z}$;

j) $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)\cdot\left(-\frac{1}{16}\right)$; k) $\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{4}$, $x\in\mathbb{Z}$.

R. Avem rezultatele : a) 0 ; b) $-\frac{5}{4}$; c) $\frac{5}{12}$; d) $-\frac{96}{35}$; e) $-\frac{7}{8}$; f) $\frac{9}{5}$; g) $-\frac{35}{27}$; h) -1 ; i) $\frac{x^2}{12}$; j) $\frac{1}{1024}$, k) $\frac{x^3}{24}$.

III.2.14. i) Să se verifice proprietatea de comutativitate a adunării numerelor raționale pe exemplele :

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{8}+\frac{1}{24}=\frac{1}{24}+\frac{1}{8}$;

c) $\frac{2}{64}+\frac{3}{48}=\frac{3}{48}+\frac{2}{64}$; d) $\frac{6}{273}+\frac{5}{934}=\frac{5}{934}+\frac{6}{273}$;

e) $\frac{6}{48}+\frac{7}{59}=\frac{7}{59}+\frac{6}{48}$; f) $\left(\frac{-5}{-3}\right)+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}+\left(\frac{-5}{-3}\right)$;

g) $\left(-\frac{6}{37}\right)+\left(-\frac{5}{49}\right)=\left(-\frac{5}{49}\right)+\left(-\frac{6}{37}\right)$; h) $\frac{a}{2}+\frac{a}{3}=$

$=\frac{a}{3}+\frac{a}{2}$, $a\in\mathbb{Z}$; i) $\frac{1}{2}+\left(-\frac{a}{3}\right)=\left(-\frac{a}{3}\right)+\frac{1}{2}$, $a\in\mathbb{Z}$;

j) $\frac{6a}{4}+\left(-\frac{5b}{3}\right)=\left(-\frac{5b}{3}\right)+\frac{6a}{4}$, $a, b\in\mathbb{Z}$; k) $\frac{a}{2b}+$

$+\left(-\frac{2a}{2b}\right)=\left(-\frac{2a}{2b}\right)+\frac{a}{2b}$, $a, b\in\mathbb{Z}$, $b\neq 0$.

(ii) Să se verifice proprietatea de asociativitate a numerelor raționale pe exemplele :

a) $\left[(-4)+\left(+\frac{6}{3}\right)\right]+\frac{5}{7}=(-4)+\left[\left(+\frac{6}{3}\right)+\frac{5}{7}\right]$;

b) $\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)+\frac{5}{7}=\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{7}\right)$;

c) $\left[\left(-\frac{8}{3}\right)+\frac{6}{4}\right]+\left(-\frac{8}{7}\right)=\left(-\frac{8}{3}\right)+\left[\frac{6}{4}+\left(-\frac{8}{7}\right)\right]$;

d) $\left[-\frac{3}{16}+\left(-\frac{5}{7}\right)\right]+\frac{8}{27}=-\frac{3}{16}+\left[\left(-\frac{5}{7}\right)+\frac{8}{27}\right]$;

e) $\left(\frac{6}{341}+\frac{5}{26}\right)+\frac{6}{71}=\frac{6}{341}+\left(\frac{5}{26}+\frac{6}{71}\right)$;

f) $\left[\left(-\frac{8}{729}\right)+\left(-\frac{3}{421}\right)\right]+\left(-\frac{5}{86}\right)=\left(-\frac{8}{729}\right)+$

$+\left[\left(-\frac{3}{421}\right)+\left(-\frac{5}{86}\right)\right]$.

g) $\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{3}\right)+\frac{a}{4}=\frac{a}{2}+\left(\frac{a}{3}+\frac{a}{4}\right)$, $a\in\mathbb{Z}$;

h) $\left[\frac{2a}{3}+\left(-\frac{5b}{6}\right)\right]+\frac{3c}{5}=\frac{2a}{3}+\left[\left(-\frac{5b}{6}\right)+\frac{3c}{5}\right]$, $a, b, c\in\mathbb{Z}$.

iii) Să se verifice proprietatea de comutativitate a înmulțirii numerelor raționale pe exemplele :

a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}$; b) $\frac{6}{9}\cdot\frac{-5}{8}=\frac{-5}{8}\cdot\frac{6}{9}$; c) $\frac{-5}{-3}\cdot\frac{+6}{-4}=$

$$= \frac{+6}{-4} \cdot \frac{-5}{-3}; \quad d)\ \frac{16}{37} \cdot \left(-\frac{5}{81}\right) = \left(-\frac{5}{81}\right) \cdot \frac{16}{37}; \quad e)\ \frac{81}{451} \cdot \frac{7}{24} =$$

$$= \frac{7}{24} \cdot \frac{8}{451}; \quad f)\ \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{2},\ a \in \mathbb{Z}; \quad g)\ \frac{a}{2} \cdot \frac{-b}{3} =$$

$$= \frac{-b}{3} \cdot \frac{a}{2},\ a, b \in \mathbb{Z}; \quad h)\ \left(\frac{-a}{-b}\right) \cdot \left(\frac{-2b}{+3a}\right) = \left(\frac{-2b}{+3a}\right) \cdot \left(\frac{-a}{-b}\right),$$

$$a, b \in \mathbb{Z}^*; \quad i)\ \left(+\frac{a}{b}\right) \cdot \left(-\frac{c}{d}\right) = \left(-\frac{c}{d}\right) \cdot \left(+\frac{a}{b}\right)\quad b, d \in \mathbb{Z}^*,\ a, c \in \mathbb{Z}.$$

iv) Să se verifice proprietatea de asociativitate a înmulţirii numerelor raţionale pe exemplele:

$$a)\ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}\right) = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right) \frac{5}{6};$$

$$b)\ \frac{6}{7} \cdot \left(\frac{3}{14} \cdot \frac{9}{26}\right) = \left(\frac{6}{7} \cdot \frac{3}{14}\right) \cdot \frac{9}{26};$$

$$c)\ \left(-\frac{3}{8}\right) \cdot \left[\left(-\frac{5}{7}\right)\left(+\frac{9}{21}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(-\frac{3}{8}\right) \cdot \left(-\frac{5}{7}\right)\right] \cdot \left(+\frac{9}{21}\right);$$

$$d)\ \frac{3}{41} \cdot \left[\left(-\frac{5}{8}\right) \cdot \left(\frac{-3}{-7}\right)\right] = \left[\frac{3}{41} \cdot \left(-\frac{5}{8}\right)\right] \cdot \left(\frac{-3}{-7}\right);$$

$$e)\ \left(\frac{-11}{-12}\right) \cdot \left[\left(\frac{-7}{+9}\right)\left(\frac{-5}{-3}\right)\right] = \left[\left(\frac{-11}{-12}\right) \cdot \left(\frac{-7}{+9}\right)\right] \cdot \left(\frac{-5}{-3}\right);$$

$$f)\ \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{a}{3} \cdot \frac{a}{4}\right) = \left(\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3}\right) \cdot \frac{a}{4},\quad a \in \mathbb{Z};$$

$$g)\ \left(\frac{-a}{-2}\right) \cdot \left[\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{b}{6}\right)\right] = \left[\left(\frac{-a}{-2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)\right] \cdot \left(-\frac{b}{6}\right),$$

$a, b \in \mathbb{Z}$;

$$h)\ \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{b}{3} \cdot \frac{c}{8}\right) = \left(\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{3}\right) \cdot \frac{c}{8},\quad a, b, c \in \mathbb{Z};$$

$$i)\ \frac{a}{2b} \cdot \left(\frac{b}{2a} \cdot \frac{3ab}{2ba}\right) = \left(\frac{a}{2b} \cdot \frac{b}{2a}\right) \cdot \frac{3ab}{2ba},\quad a, b \in \mathbb{Z}^*.$$

v) Să se verifice proprietatea de distributivitate a înmulţirii faţă de adunarea numerelor raţionale pe exemplele :

a) $$\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{5}+\frac{8}{7}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{8}{7};$$

b) $$\frac{5}{8}\cdot\left(\frac{7}{16}+\frac{9}{31}\right)=\frac{5}{8}\cdot\frac{7}{16}+\frac{5}{8}\cdot\frac{9}{31};$$

c) $$\left(-\frac{6}{2}\right)\cdot\left(\frac{8}{21}+\frac{3}{42}\right)=\left(-\frac{6}{2}\right)\cdot\frac{8}{3}+\left(-\frac{6}{2}\right)\cdot\frac{3}{42};$$

d) $$\left(\frac{-6}{-3}\right)\left(\frac{5}{6}+\frac{3}{8}\right)=\left(\frac{-6}{-3}\right)\cdot\frac{5}{6}+\left(\frac{-6}{-3}\right)\cdot\frac{3}{8};$$

e) $$\frac{4}{9}\cdot\left[\left(-\frac{5}{3}\right)+\left(-\frac{3}{8}\right)\right]=\frac{4}{9}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)+\frac{4}{9}\cdot\left(-\frac{3}{8}\right);$$

f) $$\left(-\frac{9}{8}\right)\cdot\left[\left(-\frac{6}{4}\right)+\left(-\frac{9}{21}\right)\right]=\left(-\frac{9}{8}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(-\frac{6}{4}\right)+\left(-\frac{9}{8}\right)\cdot\left(-\frac{9}{21}\right);$$

g) $$\frac{a}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{6}{7}\right)=\frac{a}{2}\cdot\frac{3}{4}+\frac{a}{2}\cdot\frac{6}{7},\quad a\in\mathbb{Z};$$

h) $$\frac{2}{4}\left(\frac{a}{4}+\frac{3a}{5}\right)=\frac{2}{4}\ \frac{a}{4}+\frac{2}{4}\cdot\frac{3a}{5},\quad a\in\mathbb{Z};$$

i) $$\frac{a}{b}\left[\left(-\frac{3b}{a}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)\right]=\frac{a}{b}\cdot\left(-\frac{3b}{a}\right)+\frac{a}{b}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right),\quad a,b\in\mathbb{Z}^*.$$

vi) Să se verifice proprietatea de distributivitate a înmulţirii faţă de scăderea numerelor raţionale pe exemplele :

a) $$\frac{2}{3}\cdot\left(+\frac{5}{9}-\frac{6}{7}\right)=\frac{2}{3}\cdot\left(+\frac{5}{9}\right)-\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{7};$$

b) $$\frac{4}{8}\cdot\left(\frac{7}{24}-\frac{5}{26}\right)=\frac{4}{8}\cdot\frac{7}{24}-\frac{4}{8}\cdot\frac{5}{26};$$

c) $$\frac{6}{27}\left(\frac{3}{84}-\frac{5}{231}\right)=\frac{6}{27}\cdot\frac{3}{84}-\frac{6}{27}\cdot\frac{5}{231};$$

d) $$\left(-\frac{5}{8}\right)\left(\frac{3}{42}-\frac{7}{9}\right)=\left(-\frac{5}{8}\right)\cdot\frac{3}{42}-\left(-\frac{5}{8}\right)\cdot\frac{7}{9};$$

e) $$\left(-\frac{7}{4}\right)\cdot\left[-\left(-\frac{5}{6}\right)-\left(-\frac{6}{9}\right)\right]=$$

$$=\left(-\frac{7}{4}\right)\cdot\left[-\left(-\frac{5}{6}\right)\right]-\left(-\frac{7}{4}\right)\cdot\left(-\frac{6}{9}\right);$$

f) $$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{3},\quad a\in\mathbb{Z};$$

g) $$\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{5}\right)=\frac{3}{8}\cdot\frac{a}{2}-\frac{3}{8}\cdot\frac{a}{5},\quad a\in\mathbb{Z};$$

h) $$\frac{a}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)=\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{4}-\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{5},\quad a\in\mathbb{Z};$$

i) $$\frac{x}{3}\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{8}\right)=\frac{x}{3}\cdot\frac{a}{2}-\frac{x}{3}\cdot\frac{a}{8},\quad a,x\in\mathbb{Z};$$

j) $$\frac{a}{b}\left(\frac{2a}{x}-\frac{3b}{x}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{2a}{x}-\frac{a}{b}\cdot\frac{3b}{x},\quad a,b,x\in\mathbb{Z},\ b,x\neq 0.$$

R. Efectuînd calculele, egalitățile de la punctele i) — vi) se verifică imediat.

III.2.15. Să se scoată factor comun în exercițiile:

a) $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{5}{8}+\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{6}{9}$; b) $\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{61}$;

c) $\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot\left(-\frac{5}{9}\right)+\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot\left(-\frac{7}{29}\right)$; d) $\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)-$

$$-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{7}{9}\right).$$

R. Avem:

a) $$\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{5}{8}+\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{6}{9}=\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{5}{8}+\frac{6}{9}\right);$$

b) $$\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{61}=\frac{1}{2}\cdot\left[\left(-\frac{3}{4}\right)-\frac{5}{61}\right];$$

c) $$\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot\left(-\frac{5}{9}\right)+\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot\left(-\frac{7}{29}\right)=\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot$$

$$\cdot\left[\left(-\frac{5}{9}\right)+\left(-\frac{7}{29}\right)\right];$$

d) $$\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{7}{9}\right)=\frac{1}{3}\cdot\left[\left(-\frac{5}{6}\right)-\left(-\frac{7}{9}\right)\right].$$

III.2.16. Să se efectueze:

$$\text{a) } \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{6}{4}+\frac{5}{9}\right);\ \text{b) } \frac{6}{4}\cdot\left(\frac{3}{8}-\frac{5}{6}\right);\ \text{c) } -\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{8}{9}+\frac{1}{6}\right);$$

$$\text{d) } \frac{10}{4}\cdot\left(-\frac{6}{8}-\frac{3}{5}\right);\ \text{e) } \frac{-3}{-5}\left(-\frac{4}{-6}+\frac{6}{8}\right);\ \text{f) } \frac{1}{2}\left(-1\frac{1}{5}\right)+$$

$$+\frac{2}{3}\left(-\frac{4}{3}-\frac{1}{8}\right);\ \text{g) } 2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+3\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)+5\cdot\left(-\frac{1}{10}\right);$$

$$\text{h) }\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left[2+\left(-\frac{5}{2}\right)\right]+\frac{3}{8};\ \text{i) }\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{6}{9}+\left(-\frac{5}{8}\right)\right]+\frac{3}{6};\ \text{j) } \frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot 0\cdot\frac{6}{7}+\frac{5}{2};$$

$$\text{k) } \frac{2}{4}\left[-\frac{8}{4}\cdot\left(-\frac{3}{8}-\frac{5}{9}\right)\right]-\frac{3}{8}.$$

R. Avem: a) $\frac{37}{27}$; b) $-\frac{11}{16}$; c) $\frac{13}{24}$; d) $-\frac{27}{8}$; e) $\frac{17}{20}$; f) $-\frac{283}{180}$; g) $-\frac{3}{2}$; h) $\frac{3}{4}$; i) $\frac{37}{72}$; j) $\frac{5}{2}$; k) $\frac{5}{9}$.

III.2.17. Să se scrie inversele numerelor raționale:

$$\text{a) } 2;\ \text{b) } -5;\ \text{c) } \frac{1}{2};\ \text{d) } \frac{2}{3};\ \text{e) } \frac{7}{15};\ \text{f) } \frac{5}{8};\ \text{g) } \frac{-6}{5};$$

$$\text{h) } \frac{-3}{-8};\ \text{i) } \frac{-4}{+3};\ \text{j) } \frac{a}{2},\ a\in\mathbb{Z}^*;\ \text{k) } \frac{-x}{3},\ x\in\mathbb{Z}^*;$$

$$\text{l) } \frac{a}{b},\ a, b\in\mathbb{Z}^*;\ \text{m) } \frac{a}{2b},\ a, b\in\mathbb{Z}^*.$$

R. Inversele sînt: a) $\frac{1}{2}$; b) $-\frac{1}{5}$; c) 2; d) $\frac{3}{2}$; e) $\frac{15}{7}$; f) $\frac{8}{5}$; g) $-\frac{5}{6}$; h) $\frac{8}{3}$; i) $-\frac{3}{4}$; j) $\frac{2}{a}$; k) $-\frac{3}{x}$; l) $\frac{b}{a}$; m) $\frac{2b}{a}$.

III.2.18. Să se efectueze:

$$\text{a) } \frac{7}{3}:\frac{1}{2};\ \text{b) } \frac{5}{8}:\frac{4}{5};\ \text{c) } \frac{6}{9}:\frac{8}{7};\ \text{d) } \frac{60}{40}:\frac{8}{20};\ \text{e) } \left(-\frac{1}{4}\right):\frac{3}{8};$$

$$\text{f) } \left(-\frac{4}{3}\right):\left(-\frac{5}{9}\right);\ \text{g) } 0:\left(-\frac{7}{3}\right);\ \text{h) } \left(\frac{-1}{-2}\right):\frac{2}{4};\ \text{i) } \frac{a}{2}:\left(-\frac{1}{3}\right),$$

$a \in \mathbb{Z}$; j) $\frac{a}{3} : \frac{a}{4}$; $a \in \mathbb{Z}^*$; k) $\frac{6}{8} : \frac{2}{a}$, $a \in \mathbb{Z}^*$; l) $\frac{a}{b} : \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}^*$;

m) $\frac{2a}{b} : \frac{-2}{3}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$; n) $\frac{2a}{3b} : \frac{4a}{3b}$, $a, b \in \mathbb{Z}^*$;

o) $\frac{6}{4a} : \frac{3b}{14a}$, $a, b \in \mathbb{Z}^*$.

R. a) $\frac{14}{3}$; b) $\frac{25}{32}$; l) $\frac{7}{12}$; d) $\frac{15}{4}$; e) $-\frac{2}{3}$; n) $\frac{12}{5}$; g) 0; h) 1; i) $-\frac{3a}{2}$;

j) $\frac{4}{3}$; k) $\frac{3a}{8}$; l) 1; m) $-\frac{3a}{b}$ n) $\frac{1}{2}$; o) $\frac{7}{b}$.

III.2.19. Să se efectueze:

$$\text{a) } \frac{1}{2} + \frac{1}{3} : \frac{2}{6}; \quad \text{b) } \frac{1}{2} : \frac{2}{3} + \frac{3}{4} : \left(-\frac{5}{6}\right); \quad \text{c) } \frac{1}{2} : \left(\frac{2}{3} : \frac{3}{4}\right)$$

$$\text{d) } \left(-\frac{5}{8}\right) : \left(-\frac{10}{4}\right) + \frac{1}{2}; \quad \text{e) } \frac{6}{4} : \left(-\frac{5}{8}\right) - \frac{1}{2} : \frac{3}{9}.$$

R. Avem: a) $\frac{3}{2}$; b) $-\frac{3}{20}$; c) $\frac{9}{16}$; d) $\frac{3}{4}$; e) $-\frac{39}{10}$.

III.2.20. Să se efectueze:

$$\text{a) } \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{6}; \quad \text{b) } \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{5}; \quad \text{c) } \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}};$$

$$\text{d) } \left(-\frac{4}{6}\right) : \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{\frac{3}{8} + \frac{9}{7}}{\frac{2}{56}}; \quad \text{e) } \frac{3\frac{1}{2} - \frac{7}{2}}{\frac{1}{240} + \frac{1}{300} - \frac{7}{120}};$$

$$\text{f) } \frac{1}{-\frac{1}{2}} : \frac{\frac{3}{4}}{3}.$$

R. Avem : a) $\frac{5}{36}$; b) $\frac{59}{120}$; c) $\frac{3}{8}$; d) $\frac{95}{2}$; e) 0; f) -8.

III.2.21. Să se efectueze:

a) $\frac{a}{2} + \frac{3}{2a}$, $a \in \mathbb{Z}^*$; b) $\frac{4a}{b} + \frac{5c}{3d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b, d \neq 0$; c) $\frac{6a}{3} : \frac{2a}{4} +$
$+ \frac{5}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}^*$; d) $\frac{6}{3a} + \frac{5}{4b} - \frac{1}{6c}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$.

R. Avem: a) $\frac{a^2+3}{2a}$; b) $\frac{12ad+5bc}{3bd}$; c) $\frac{4b+5}{b}$; d) $\frac{24bc+15ac-2ab}{12abc}$.

III.2.22. Să se efectueze:

a) $$\frac{2\frac{1}{2} + \frac{10}{3}\cdot\left(5 + \frac{4}{10}\cdot\frac{5}{8}\right) - 5 : \frac{5}{2}}{24 : \frac{64}{10} - \left(12 : \frac{18}{5} + \frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{2} - \frac{5}{4}} - \frac{46}{23};$$

b) $$\left[\left(3\frac{2}{3} + 1\frac{7}{10}\right) : 8\frac{1}{20} - \left(2\frac{7}{23} - 1\frac{45}{46}\right)\cdot\frac{23}{45}\right] + \frac{1}{2};$$

c) $$\left[\frac{2\frac{3}{5} - 1\frac{3}{10}}{2\frac{1}{2} - \left(3\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{3}{5} + \frac{3}{4}} + \frac{1}{3\frac{3}{7} + \frac{1}{7}} +\right.$$
$$\left. + \frac{\left(2\frac{8}{9}\right)\cdot\left(1\frac{5}{13}\right)}{\left(3\frac{51}{85}\right) + 2\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{11} + \frac{24}{85}}\right] : 2;$$

d) $$\left[\frac{\left(\frac{2}{9}+\frac{14}{45}+\frac{7}{15}\right)\cdot 10\frac{1}{3}-1\frac{1}{11}\cdot\left(2\frac{2}{3}-1\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{3}{7}-\frac{1}{4}\right):\frac{3}{28}-1}+\right.$$

$$\left.+\,2{,}62(3)-1\frac{187}{300}\right]\times$$

$$\times\left(\frac{30\cdot 4\frac{1}{4}-11\frac{1}{5}:9\frac{1}{3}}{14:2\frac{2}{9}+8\frac{2}{5}\cdot 14\frac{2}{7}}:\frac{1:6+12:5}{2\frac{1}{2}\cdot 15-4\frac{13}{15}\cdot 7\frac{3}{5}}\right).$$

e) $$\frac{\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)+\frac{2}{4}:\frac{7}{5}}{\frac{6}{9}:\left(-\frac{2}{3}\right)-\frac{3}{2}:\frac{8}{64}}+\frac{3\cdot\left(1\frac{16}{75}+2{,}46\right):(55{,}1:5)}{1\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{17}\cdot\left(\frac{2}{15}+0{,}15\right)};$$

f) $$\left(\frac{2\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\cdot 1\frac{5}{6}}{\frac{1}{5}\cdot 3\frac{1}{3}+\frac{13}{36}}-\frac{1}{2\frac{1}{2}}\right):\frac{1}{1\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{6}}{-20};$$

g) $$\frac{2\frac{3}{5}-1\frac{3}{10}+\left(-\frac{3}{8}\right):\frac{5}{6}}{2\frac{1}{2}-3\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{8}-\frac{6}{9}}+\frac{(2^3\cdot 3^4\cdot 5^4):(3^3\cdot 5^3\cdot 2^2)}{\left(-\frac{6}{3}\right):\left(\frac{-18}{12}\right)+\frac{9}{38}};$$

h) $$\left\{\left[\frac{0{,}71-\frac{1}{4}}{0{,}71+\frac{1}{4}}\cdot\frac{\left(15-9\frac{1}{3}\right):2\frac{5}{9}}{\left(19\frac{2}{3}-11\frac{7}{9}\right)\cdot\frac{9}{71}}\right]:\frac{17}{16}\right\}\cdot\frac{2}{3};$$

i) $$\frac{8-4{,}7:\left(5-0{,}8:2\frac{4}{6}\right)+\frac{4}{5}\cdot 1{,}25}{\left(5\frac{3}{9}-3\frac{3}{4}\right):1\frac{7}{12}+2}\cdot\frac{3}{8};$$

j) $$0{,}375:\frac{322\cdot(-0{,}1)}{\frac{1}{240}+\frac{1}{540}+\frac{2}{225}}+\frac{1}{5760};$$

k) $$\frac{-3^3+5^3}{3^2+5^2-15}+\frac{-10+15}{6-(-1)^3}+\frac{5^2-(-1)^2}{-7-1+(-3)-(-2)}-$$
$$-\frac{(-2)(-49)}{19}-\frac{5}{7};$$

l) $$1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}+1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}+$$
$$+1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}-\frac{3}{4}.$$

R. a) Avem :

$$2\frac{1}{2}+\frac{10}{3}\cdot\left(5+\frac{4}{10}\cdot\frac{5}{8}\right)-5:\frac{5}{2}=\frac{5}{2}+\frac{10}{3}\cdot\left(5+\frac{1}{4}\right)-2=$$
$$=\frac{5}{2}+\frac{10}{3}\cdot\frac{21}{4}-2=\frac{5}{2}+\frac{35}{2}-2=\frac{5+35}{2}-2=20-2=18;$$

şi :

$$24:\frac{64}{10}-\left(12:\frac{18}{5}+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}-\frac{5}{4}=24\cdot\frac{10}{64}-\left(12\cdot\frac{5}{18}+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}-\frac{5}{4}=$$
$$=24\cdot\frac{5}{32}-\left(\frac{2\cdot 5}{3}+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}-\frac{5}{4}=\frac{15}{4}-\frac{12}{3}\cdot\frac{1}{2}-\frac{5}{4}=$$
$$=\frac{15}{4}-2-\frac{5}{4}=\frac{10}{4}-2=\frac{1}{2},$$

deci rezultatul este $\frac{18}{\frac{1}{2}}-\frac{46}{23}=18\cdot 2-2=36-2=34.$

b) Avem :

$$\left[\left(3\frac{2}{3}+1\frac{7}{10}\right):8\frac{1}{20}-\left(2\frac{7}{23}-1\frac{45}{46}\right)\cdot\frac{23}{45}\right]+\frac{1}{2}=$$
$$=\left[\left(\frac{11}{3}+\frac{17}{10}\right)\cdot\frac{161}{20}-\left(\frac{53}{23}-\frac{91}{46}\right)\cdot\frac{23}{45}\right]+\frac{1}{2}=\left[\left(\frac{110+51}{30}\right):\frac{161}{20}-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{106-91}{46}\right)\cdot\frac{23}{45}\right]+\frac{1}{2}=\left[\frac{161}{30}\cdot\frac{20}{161}-\frac{15}{46}\cdot\frac{23}{45}\right]+\frac{1}{2}=$$

$$=\left[\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right]+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

c)
$$\left[\frac{2\frac{3}{5}-1\frac{3}{10}}{2\frac{1}{2}-\left(3\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{4}}+\frac{1}{3\frac{3}{7}+\frac{1}{7}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(2\frac{8}{9}\right)\cdot\left(1\frac{5}{13}\right)}{\left(3\frac{51}{85}\right)+2\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{11}+\frac{24}{85}}\right]:2=\left[\frac{\frac{13}{5}-\frac{13}{10}}{\frac{5}{2}-\frac{10}{3}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{4}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\frac{24}{7}+\frac{1}{7}}+\frac{\frac{26}{9}\cdot\frac{18}{13}}{\frac{306}{85}+\frac{11}{4}\cdot\frac{8}{11}+\frac{24}{85}}\right]:2=\left[\frac{\frac{13}{10}}{\frac{5}{2}-2+\frac{3}{4}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\frac{25}{7}}+\frac{4}{\frac{306}{85}+2+\frac{24}{85}}\right]:2=\left[\frac{13}{10}\cdot\frac{4}{5}+\frac{7}{25}+\frac{4}{\frac{100}{17}}\right]:2=$$

$$=\left[\frac{26}{25}+\frac{7}{25}+\frac{17}{25}\right]:2=\left[\frac{26+7+17}{25}\right]:2=2:2=1.$$

d)
$$\left[\frac{\left(\frac{2}{9}+\frac{14}{45}+\frac{7}{15}\right)\cdot 10\frac{1}{3}-1\frac{1}{11}\cdot\left(2\frac{2}{3}-1\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{3}{7}-\frac{1}{4}\right):\frac{3}{28}-1}+\right.$$

$$\left.+2{,}62(3)-1\frac{187}{300}\right]=\left[\frac{\left(\frac{10+14+21}{45}\right)\cdot\frac{31}{3}-\frac{12}{11}\cdot\left(\frac{8}{3}-\frac{7}{4}\right)}{\frac{5}{28}\cdot\frac{28}{3}-1}+\right.$$

$$\left.+2+\frac{623-62}{900}-\frac{487}{300}\right]=\left[\frac{1\cdot\frac{31}{3}-\frac{12}{11}\cdot\frac{11}{12}}{\frac{5}{3}-1}+2+\frac{187}{300}-\frac{487}{300}\right]=$$

$$=\left[\frac{\frac{31}{3}-1}{\frac{2}{3}}+2+\frac{187}{300}-\frac{487}{300}\right]=\left[\frac{28}{3}\cdot\frac{3}{2}+2+\frac{187}{300}-\frac{487}{300}\right]=[14+2-1]=15.$$

$$\left(\frac{30\cdot 4\frac{1}{4}-11\frac{1}{5}:9\frac{1}{3}}{14:2\frac{2}{9}+8\frac{2}{5}\cdot 14\frac{2}{7}}:\frac{1:6+12:5}{2\frac{1}{2}\cdot 15-4\frac{13}{15}\cdot 7\frac{3}{5}}\right)=$$

$$=\left(\frac{30\cdot\frac{17}{4}-\frac{56}{5}\cdot\frac{3}{28}}{14\cdot\frac{9}{20}+\frac{42}{5}\cdot\frac{100}{7}}:\frac{\frac{1}{6}+\frac{12}{5}}{\frac{5}{2}\cdot 15-\frac{73}{15}\cdot\frac{38}{5}}\right)=\left(\frac{\frac{255}{2}-\frac{6}{5}}{\frac{63}{10}+\frac{840}{7}}:\frac{\frac{77}{30}}{\frac{75}{2}-\frac{2774}{75}}\right)=$$

$$=\left(\frac{\frac{1275-12}{10}}{\frac{441+8400}{70}}:\frac{\frac{77}{30}}{\frac{5625-5548}{150}}\right)=\left(\frac{1263}{10}\cdot\frac{70}{8841}:\frac{77}{30}\cdot\frac{150}{77}\right)=\left(\frac{7}{7}:5\right)=\frac{1}{5}$$

În final avem $15\cdot\frac{1}{5}=3.$

e) $$\frac{\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)+\frac{2}{4}:\frac{7}{5}}{\frac{6}{9}:\left(-\frac{2}{3}\right)-\frac{3}{2}:\frac{8}{64}}+\frac{3\cdot\left(1\frac{16}{75}+2{,}46\right):(55{,}1:5)}{1\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{17}\cdot\left(\frac{2}{15}+0{,}15\right)}=$$

$$=\frac{\frac{15}{56}+\frac{2}{4}\cdot\frac{5}{7}}{\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{2}\cdot\frac{8}{1}}+\frac{3\cdot\left(\frac{91}{75}+\frac{246}{100}\right):\left(\frac{1102}{100}\right)}{\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{17}\left(\frac{2}{15}+\frac{15}{100}\right)}=\frac{\frac{15}{56}+\frac{10}{28}}{-1-12}+$$

$$+\frac{3\left(\frac{91}{75}+\frac{123}{50}\right)\cdot\frac{50}{551}}{\frac{45}{51}\cdot\left(\frac{2}{15}+\frac{3}{20}\right)}=\frac{35}{56}:(-13)+\frac{3\cdot\frac{551}{150}\cdot\frac{50}{551}}{\frac{45}{51}\cdot\frac{17}{60}}=$$

$$=\frac{35}{56}\cdot\left(-\frac{1}{13}\right)+\frac{1}{\frac{1}{4}}=-\frac{35}{728}+4=\frac{2912-35}{728}=\frac{2877}{728}$$

f) Avem, succesiv:

$$\left(\frac{2\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\cdot 1\frac{5}{6}}{\frac{1}{5}\cdot 3\frac{1}{3}+\frac{13}{36}}-\frac{1}{2\frac{1}{2}}\right):\frac{1}{1\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{6}}{-20}=$$

$$=\left(\frac{\frac{9}{4}-\frac{2}{3}\cdot\frac{11}{6}}{\frac{1}{5}\cdot\frac{10}{3}+\frac{13}{36}}-\frac{2}{5}\right):\frac{2}{3}+\frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{6}}{-20}=\left(\frac{\frac{9}{4}-\frac{11}{9}}{\frac{2}{3}+\frac{13}{36}}-\frac{2}{5}\right):\frac{2}{3}+\frac{\frac{3-4}{24}}{-20}=$$

$$=\left(\frac{37}{36}\cdot\frac{36}{37}-\frac{2}{5}\right):\frac{2}{3}+\left(-\frac{1}{24}\right)\cdot\left(-\frac{1}{20}\right)=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{480}=\frac{9}{10}+\frac{1}{480}=\frac{433}{480}$$

g)
$$\frac{2\frac{3}{5}-1\frac{3}{10}+\left(-\frac{3}{8}\right):\frac{5}{6}}{2\frac{1}{2}-3\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{8}-\frac{6}{9}}+\frac{(2^3\cdot 3^4\cdot 5^4):(3^3\cdot 5^3\cdot 2^2)}{\left(-\frac{6}{3}\right):\left(-\frac{18}{12}\right)+\frac{9}{38}}=$$

$$=\frac{\frac{13}{5}-\frac{13}{10}-\frac{3}{8}\cdot\frac{6}{5}}{\frac{5}{2}-\frac{10}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{8}-\frac{2}{3}}+\frac{2\cdot 3\cdot 5}{-2:\left(-\frac{3}{2}\right)+\frac{9}{38}}=\frac{\frac{13}{5}-\frac{13}{10}-\frac{9}{20}}{\frac{5}{2}-\frac{7}{4}-\frac{2}{3}}+\frac{30}{\frac{4}{3}+\frac{9}{38}}=$$

$$=\frac{17}{20}\cdot\frac{12}{1}+\frac{30}{1}\cdot\frac{114}{179}=\frac{51}{5}+\frac{3420}{179}=\frac{9\,129+17\,100}{895}=\frac{26\,229}{895}.$$

h)
$$\left\{\left[\frac{0{,}71-\frac{1}{4}}{0{,}71+\frac{1}{4}}\cdot\frac{\left(15-9\frac{1}{3}\right):2\frac{5}{9}}{\left(19\frac{2}{3}-11\frac{7}{9}\right)\cdot\frac{9}{71}}\right]:\frac{17}{16}\right\}\cdot\frac{2}{3}=$$

$$=\left\{\left[\frac{\frac{71}{100}-\frac{1}{4}}{\frac{71}{100}+\frac{1}{4}}\cdot\frac{\left(15-\frac{28}{3}\right)\cdot\frac{9}{23}}{\left(\frac{59}{3}-\frac{106}{9}\right)\cdot\frac{9}{71}}\right]:\frac{17}{16}\right\}\cdot\frac{2}{3}=\left\{\left[\frac{71-25}{100}\cdot\frac{100}{71+25}\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\frac{\frac{45-28}{3}\cdot\frac{9}{23}}{\frac{177-106}{9}\cdot\frac{9}{71}}\right]\cdot\frac{16}{17}\right\}\cdot\frac{2}{3}=\left\{\frac{23}{48}\cdot\frac{\frac{17}{3}\cdot\frac{9}{23}}{\frac{71}{9}\cdot\frac{9}{71}}\cdot\frac{16}{17}\right\}\cdot\frac{2}{3}=$$

$$=\frac{23}{48}\cdot\frac{51}{23}\cdot\frac{16}{17}\cdot\frac{2}{3}=\frac{51}{48}\cdot\frac{16}{17}\cdot\frac{2}{3}=1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}.$$

i) Avem, succesiv :

$$\frac{8-4,7:\left(5-0,8:2\frac{4}{6}\right)+\frac{4}{5}\cdot 1,25}{\left(5\frac{3}{9}-3\frac{3}{4}\right):1\frac{7}{12}+2}\cdot\frac{3}{8}=\frac{8-\frac{47}{10}:\left(5-\frac{4}{5}:\frac{16}{6}\right)+\frac{4}{5}\cdot\frac{125}{100}}{\left(\frac{48}{9}-\frac{15}{4}\right):\frac{19}{12}+2}\cdot$$

$$\cdot\frac{3}{8}=\frac{8-\frac{47}{10}:\left(5-\frac{3}{10}\right)+\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{4}}{\frac{57}{36}\cdot\frac{12}{19}+2}\cdot\frac{3}{8}=\frac{8-\frac{47}{10}\cdot\frac{10}{47}+1}{1+2}\cdot\frac{3}{8}=\frac{8-1+1}{3}\cdot\frac{3}{8}=1.$$

j) $$0,375:\frac{322\cdot(-0,1)}{\frac{1}{240}+\frac{1}{540}+\frac{2}{225}}+\frac{1}{5760}=$$

$$=\frac{375}{1000}\cdot\frac{-\frac{322}{10}}{\frac{45+20+48\cdot 2}{10\,800}}+\frac{1}{5760}=\frac{3}{8}:\frac{-\frac{161}{5}}{\frac{161}{10\,800}}+$$

$$+\frac{1}{5760}=\frac{3}{8}:\left(-\frac{161}{5}\cdot\frac{10\,800}{161}\right)+\frac{1}{5760}=\frac{3}{8}:(-2160)+$$

$$+\frac{1}{5760}=\frac{3}{8}\cdot\left(-\frac{1}{2160}\right)+\frac{1}{5760}=-\frac{1}{8\cdot 720}+\frac{1}{5760}=0.$$

k) $$\frac{-3^3+5^3}{3^2+5^2-15}+\frac{-10+15}{6-(-1)^3}+\frac{5^2-(-1)^2}{-7-1+(-3)-(-2)}-\frac{(-2)\cdot(-49)}{19}-\frac{5}{7}=$$

$$=\frac{-27+125}{9+25-15}+\frac{+5}{6+1}+\frac{25-1}{-8-3+2}-\frac{+98}{19}-\frac{5}{7}=$$

$$=\frac{98}{19}+\frac{5}{7}+\frac{24}{-9}-\frac{98}{19}-\frac{5}{7}=-\frac{8}{3}.$$

l) $$1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}+1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}+1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}-\frac{3}{4}=3-\frac{3}{4}+\frac{1}{\frac{3}{2}}+$$

$$+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{1}{2}}}=3-\frac{3}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{1+\frac{2}{3}}-\frac{1}{1-2}=3-\frac{3}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{\frac{5}{3}}+$$

$$+1 = 4 - \frac{3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{240 - 45 + 40 + 36}{60} = \frac{271}{60}.$$

III.2.23. Să se efectueze :

a) 7^0; b) $\left(\frac{1}{2}\right)^0$; c) $\left(-\frac{5}{3}\right)^0$; d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$; e) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$; f) $\left(\frac{1}{-3}\right)^4$;

g) $\left(\frac{2}{-5}\right)^6$; h) $\left(\frac{-3}{-7}\right)^4$; i) $\left(\frac{a}{b}\right)^3$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$; j) $\left(\frac{a}{2x}\right)^3$,

$a, x \in \mathbb{Z}$, $x \neq 0$; k) $\left(\frac{3}{8}\right)^{-1}$; l) $\left(\frac{6}{-5}\right)^{-3}$; m) $\left(\frac{-3}{-7}\right)^{-5}$;

n) $\left(\frac{a}{2b}\right)^{-5}$, $a, b \in \mathbb{Z}^*$; o) $\left(\frac{a}{b}\right)^0$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

R. Avem : a) 1 ; b) 1 ; c) 1 ; d) $-\frac{1}{8}$; e) $\frac{9}{16}$; f) $\frac{1}{81}$; g) $\frac{64}{15\,625}$; h) $\frac{81}{2401}$; i) $\frac{a^3}{b^3}$; j) $\frac{a^3}{8x^3}$; k) $\frac{8}{3}$; l) $-\frac{125}{216}$; m) $\frac{16\,807}{243}$; n) $\frac{32b^5}{a^5}$; o) 1.

III.2.24. Să se scrie sub formă de putere :

a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^5$; b) $\left(\frac{2}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6$; c) $\left(\frac{-5}{-3}\right)^0 \cdot \left(\frac{-5}{-3}\right)^6$;

d) $\left(\frac{-5}{8}\right)^{-6} \cdot \left(\frac{-5}{8}\right)^7$; e) $\left(\frac{7}{-3}\right)^{-6} \cdot \left(\frac{7}{-3}\right)^{-9}$; f) $\left(\frac{-8}{-5}\right)^3 \cdot \left(\frac{-8}{-5}\right)^1 \cdot$

$\cdot \left(\frac{-8}{-5}\right)^{-4}$; g) $\left(-\frac{1}{2a}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2a}\right)^4 \left(-\frac{1}{2a}\right)^{-3}$, $a \in \mathbb{Z}^*$.

R. Avem : a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^8$; b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{13}$; c) $\left(\frac{-5}{-3}\right)^6$; d) $\left(\frac{-5}{8}\right)^1$; e) $\left(\frac{7}{-3}\right)^{-15}$; f) $\left(\frac{-8}{-5}\right)^0$; g) $\left(-\frac{1}{2a}\right)^4$.

III.2.25. Să se calculeze :

a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4$; b) $\left(-\frac{3}{5}\right)^7 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)^{-4} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)^2$;

c) $\left(-\frac{3}{8}\right)^4 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right)^6 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right)^{-5}$; d) $\left(\frac{-3}{-5}\right)^2 \cdot \left(\frac{-3}{-5}\right)^{-7}$;

e) $\left(-\frac{7}{3}\right)^{9}\cdot\left(-\frac{7}{3}\right)^{12}\cdot\left(-\frac{7}{3}\right)^{-24}$; f) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{3}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{-8}$.

R. Avem : a) $-\frac{1}{128}$; b) $-\frac{243}{3125}$; c) $-\frac{243}{32768}$; d) $\frac{3125}{243}$; e) $-\frac{27}{343}$; f) $-\frac{78125}{2187}$.

III.2.26. Să se scrie sub formă de putere :

a) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{3}$; b) $\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^{6}\right]^{5}$; c) $\left[\left(\frac{-3}{-8}\right)^{5}\right]^{-3}$; d) $\left[\left(-\frac{6}{16}\right)^{2}\right]^{-10}$;

e) $\left[\left(\frac{a}{2}\right)^{2}\right]^{3}$, $a \in \mathbb{Z}^*$; f) $\left[\left(\frac{a}{3}\right)^{2}\right]^{-6}$, $a \in \mathbb{Z}^*$; g) $\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2}\right]^{-6}$;

h) $\left[\left(-\frac{3}{8}\right)^{-3}\right]^{8}$; i) $\left[\left(\frac{a}{2b}\right)^{-5}\right]^{-3}$, $a, b \in \mathbb{Z}^*$.

R. Avem : a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{6}$; b) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{30}$; c) $\left(\frac{-3}{-8}\right)^{-15}$; d) $\left(-\frac{6}{16}\right)^{-20}$; e) $\left(\frac{2}{a}\right)^{6}$; f) $\left(\frac{a}{3}\right)^{-12}$; g) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{12}$; h) $\left(-\frac{3}{8}\right)^{-24}$; i) $\left(\frac{a}{2b}\right)^{15}$.

III.2.27. Să se scrie sub formă de produs de puteri de exponent număr natural de numere raționale :

a) $\left(2\cdot\frac{3}{5}\right)^{7}$; b) $\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\right)^{4}$; c) $\left[\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{7}{9}\right]^{6}$; d) $\left[\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\left(-\frac{5}{9}\right)\right]^{6}$;

e) $\left(\frac{6}{8}\cdot\frac{5}{3}\right)^{-7}$; f) $\left[\left(-\frac{6}{3}\right)\cdot\left(\frac{-5}{-13}\right)\right]^{-6}$; g) $\left\{\left[\frac{6}{13}\cdot\left(-\frac{5}{8}\right)\right]^{-3}\right\}^{4}$;

h) $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{9}\right)^{n}$, $n \in \mathbb{N}$; i) $\left(\frac{a}{3}\cdot\frac{b}{5}\right)^{7}$, $a, b \in \mathbb{Z}$; j) $\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{b^2}{a^2}\right)^{c}$, $a, b, c \in \mathbb{N}^*$;

k) $\left(\frac{2a}{3b}\cdot\frac{9}{6}\right)^{ab}$, $a, b \in \mathbb{N}$.

R. Avem : a) $2^7\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{7}$; b) $\left(\frac{3}{8}\right)^{4}\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^{4}$; c) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{6}\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^{6}$; d) $\left(-\frac{2}{7}\right)^{6}\cdot\left(-\frac{5}{9}\right)^{6}$; e) $\left(\frac{8}{6}\right)^{7}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{7}$; f) $\left(-\frac{3}{6}\right)^{6}\cdot\left(\frac{-13}{-5}\right)^{6}$; g) $\left(\frac{13}{6}\right)^{12}\cdot\left(-\frac{8}{5}\right)^{12}$; h) $\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^{u}$; i) $\left(\frac{a}{3}\right)^{7}\cdot\left(\frac{b}{5}\right)^{7}$; j) $\left(\frac{a}{b}\right)^{c}\cdot\left(\frac{b^2}{c^2}\right)^{b}$; k) $\left(\frac{2a}{3b}\right)^{ab}\cdot\left(\frac{9}{6}\right)^{ab}$.

III.2.28. Să se scrie sub formă de putere cu exponent natural:

$$\text{a) } \left(-\frac{1}{5}\right)^6 : \left(-\frac{1}{5}\right)^4; \text{ b) } \left(-\frac{3}{8}\right)^5 : \left(-\frac{3}{8}\right)^6;$$

$$\text{c) } \left(\frac{a}{2}\right)^3 : \left(\frac{a}{2}\right)^5,\ a \in \mathbb{Z}^*;$$

$$\text{d) } \left(\frac{3a}{4}\right)^5 : \left(\frac{3a}{4}\right)^3,\ a \in \mathbb{Z}^*.$$

R. Avem : a) $\left(-\frac{1}{5}\right)^2$; b) $\left(-\frac{8}{3}\right)^1$; c) $\left(\frac{2}{a}\right)^2$; d) $\left(\frac{3a}{4}\right)^2$.

III.2.29. Să se efectueze scriind rezultatul sub formă de putere:

$$\text{a) } 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5 : 2^6; \text{ b) } \left(\frac{3}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^5 : \left(\frac{3}{7}\right)^8;$$

$$\text{c) } \left(\frac{a}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{a}{7}\right)^3 : \left(\frac{a}{7}\right)^5,\ a \in \mathbb{Z}^*.$$

R. Avem : a) 2^6; b) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1} = \left(\frac{7}{3}\right)^1$; c) 1.

III.2.30. Să se efectueze :

$$\text{a) } \left(\frac{2}{3}\right)^3 : \left(-\frac{2}{3}\right)^4;$$

$$\text{b) } \left(\frac{6}{8}\right)^4 : \left(\frac{3}{-2}\right)^5; \text{ c) } \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(-\frac{2}{3}\right)^3; \text{ d) } \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3}{\frac{1}{2^5}};$$

$$\text{e) } \left(\frac{1}{2^{100}} + \frac{1}{2^{101}}\right) : \frac{3}{2^{102}}; \text{ f) } \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7^2}\right) : \frac{3}{7^3} + \frac{1}{49} : \left(-\frac{2}{7}\right)^3.$$

R. Avem : a) $\frac{3}{2}$; b) $-\frac{1}{24}$; c) 0; d) 12; e) e; f) $\frac{427}{24}$.

III.2.31. Să se efectueze:

a) $$\frac{\left[\left(\frac{-2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{-3}\right)^2-\left(-\frac{4}{9}\right)+(-2)^2\right]^3}{\left(-\frac{5}{6}\right)^3-(-1)^3-1}+\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}};$$

b) $$\frac{2\cdot 2^2\cdot 2^3+2^2\cdot 2^3\cdot 2^4}{2^2\cdot 2^3\cdot 2^4+2^3\cdot 2^4\cdot 2^5}\cdot\frac{3\cdot 3^2\cdot 3^3+3^2\cdot 3^3\cdot 3^4}{3^2\cdot 3^3\cdot 3^4+3^3\cdot 3^4\cdot 3^5}\cdot\frac{6}{5};$$

c) $$\frac{1}{\left(1:\frac{2}{3}-1:2\frac{3}{5}\right):2\frac{3}{13}}+\frac{(0{,}2)^3-\frac{1}{125}+(0{,}1)^2}{(0{,}3)^3+0{,}973\cdot 10^2}\cdot 10^5;$$

d) $$\frac{(0{,}2)^3:(0{,}3)^3\cdot\frac{9}{8}\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+30{,}(5)+3{,}(4)-27}{0{,}1^2:\left(\frac{1}{100}\right)^2:10-0{,}9^3:0{,}9^2:\frac{9}{10}+1};$$

e) $$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3-\left(\frac{7}{5}\right)^3}{\frac{3}{2}-\frac{7}{5}}-\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{5}-\left(\frac{7}{5}\right)^2+\frac{22}{19}-\frac{6}{5};$$

f) $$\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{200}+\frac{1}{2^{201}}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{100}:\frac{1}{2^{98}}}\cdot\frac{\left(-\frac{1}{5}\right)^{99}:\frac{1}{5^{98}}}{\left(\frac{1}{5}\right)^{60}:\left(\frac{1}{5}\right)^{30}}$$

R. Avem:

a) $$\frac{\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{-3}\right)^2-\left(-\frac{4}{9}\right)+(-2)^2\right]^3}{\left(-\frac{5}{6}\right)^3-(-1)^3-1}+\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}}=$$

$$=\frac{\left[\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+4\right]^3}{-\frac{125}{216}+1-1}+\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}}=\frac{(1+4)^3}{-\frac{125}{216}}+\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}=$$

$$=\frac{125}{1}\cdot\left(-\frac{216}{125}\right)+1=-216+1=-215.$$

b)

$$\frac{2\cdot 2^2\cdot 2^3+2^2\cdot 2^3\cdot 2^4}{2^2\cdot 2^3\cdot 2^4+2^3\cdot 2^4\cdot 2^5}\cdot\frac{3\cdot 3^2\cdot 3^3+3^2\cdot 3^3\cdot 3^4}{3^2\cdot 3^3\cdot 3^4+3^3\cdot 3^4\cdot 3^5}\cdot\frac{6}{5}=$$

$$=\frac{2(1\cdot 2\cdot 2^2+2\cdot 2^2\cdot 2^3)}{2^3(1\cdot 2\cdot 2^2+2\cdot 2^2\cdot 2^3)}\cdot\frac{3(1\cdot 3\cdot 3^2+3\cdot 3^2\cdot 3^3)}{3^2(1\cdot 3\cdot 3^2+3\cdot 3^2\cdot 3^3)}\cdot\frac{6}{5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{5}.$$

c)

$$\frac{1}{\left(1:\frac{2}{3}-1:2\frac{3}{5}\right):2\frac{3}{13}}+\frac{(0,2)^3-\frac{1}{125}+(0,1)^2}{(0,3)^3+0,973}\cdot 10^2=$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{13}\right):\frac{29}{13}}+\frac{\frac{8}{1000}-\frac{1}{125}+\frac{1}{10^2}}{\frac{27}{1000}+\frac{973}{1000}}\cdot 10^2=\frac{1}{\frac{39-10}{26}\cdot\frac{13}{29}}+$$

$$+\frac{\frac{1}{125}-\frac{1}{125}+\frac{1}{10^2}}{\frac{1000}{1000}}\cdot 10^2=\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{10^2}\cdot 10^2=2.$$

d)

$$\frac{(0,2)^3:(0,3)^3\cdot\frac{9}{8}\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+30,(5)+3,(4)-27}{0,1^2:\left(\frac{1}{100}\right)^2:10-0,9^3:0,9^2:\frac{9}{10}+1}=$$

$$=\frac{\frac{8}{1000}:\frac{27}{1000}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{36}{25}\cdot\frac{9}{4}+30+\frac{5}{9}+3+\frac{4}{9}-27}{\frac{1}{100}\cdot\frac{100^2}{1}:10-\frac{729}{1000}:\frac{81}{100}:\frac{9}{10}+1}=$$

$$=\frac{\frac{8}{1000}\cdot\frac{1000}{27}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{36}{25}\cdot\frac{9}{4}+6+\frac{9}{9}}{100:10-\frac{729}{1000}\cdot\frac{100}{81}\cdot\frac{10}{9}+1}=\frac{\frac{27}{25}+7}{10-1+1}=$$

$$=\left(\frac{27}{25}+7\right)\cdot\frac{1}{10}=\frac{202}{25\cdot 10}=\frac{202}{250}=\frac{101}{125}.$$

e)

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3-\left(\frac{7}{5}\right)^3}{\frac{3}{2}-\frac{7}{5}}-\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{5}-\left(\frac{7}{5}\right)^2+\frac{22}{19}-\frac{6}{5}=$$

$$= \frac{\frac{27}{8} - \frac{343}{125}}{\frac{15-14}{10}} - \left(\frac{9}{4} + \frac{21}{10} + \frac{49}{25}\right) + \left(\frac{22}{19} - \frac{6}{5}\right) = \frac{\frac{3375-2744}{1000}}{\frac{1}{10}} -$$

$$-\left(\frac{225+210+196}{100}\right) + \left(\frac{22}{19} - \frac{6}{5}\right) = \frac{631}{1000} \cdot \frac{10}{1} - \left(\frac{631}{100}\right) + \frac{22}{19} - \frac{6}{5} =$$

$$= \frac{631}{100} - \frac{631}{100} + \frac{110-114}{95} = -\frac{4}{95}.$$

f) $$\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{200} + \frac{1}{2^{201}}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{100} : \frac{1}{2^{98}}} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{5}\right)^{99} : \frac{1}{5^{98}}}{\left(\frac{1}{5}\right)^{60} : \left(\frac{1}{5}\right)^{30}} =$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{201} + \frac{1}{2^{201}}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{100} \cdot 2^{98}} \cdot \frac{-\left(\frac{1}{5}\right)^{99} \cdot 5^{98}}{\frac{1}{5^{60}} \cdot \frac{5^{30}}{1}} = \frac{-\left(\frac{1}{2}\right)^{201} + \left(\frac{1}{2}\right)^{201}}{\frac{1}{2^{100}} \cdot 2^{98}} \cdot$$

$$\cdot \frac{-\left(\frac{1}{5^{99}}\right) \cdot \frac{5^{98}}{1}}{\frac{1}{5^{30}}} = \frac{0}{\frac{1}{2^2}} \cdot \frac{-\frac{1}{5}}{\frac{1}{5^{30}}} = 0.$$

III.2.32. Să se decidă care dintre numerele raționale:

a) $\frac{2}{3}$ și $\frac{3}{8}$; b) $-\frac{3}{4}$ și $\frac{2}{5}$; c) $-\frac{6}{3}$ și $-\frac{3}{8}$;

d) $\frac{a}{2}$ și $\frac{3a}{2}$, $a \in \mathbb{Z}$; e) $\frac{a}{2}$ și $\frac{3}{2}$, $a \in \mathbb{Z}$

este mai mare:

R. Avem: a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{2}{5}$; c) $-\frac{3}{8}$; d) $\frac{a}{2}$ dacă $a < 0$ și $\frac{3a}{2}$ dacă $a > 0$. Dacă $a = 0$ atunci numerele sînt egale; e) $\frac{a}{2}$ dacă $a > 3$ și $\frac{3}{2}$ dacă $a < 3$. Dacă $a = 3$ atunci numerele sînt egale.

III.2.33. Să se precizeze care din inegalitățile:

a) $\frac{2}{3} \geqslant \frac{2}{3}$; b) $-\frac{2}{3} \geqslant \frac{2}{-3}$; c) $\frac{3}{4} > -\frac{5}{8}$;

d) $\frac{6}{4} > \frac{-3}{-7}$; e) $\frac{a}{2} > \frac{a}{3}$, $a \in \mathbb{Z}$

sînt stricte.

R. Sînt stricte inegalitățile c), d), e) dacă $a > 0$.

III.2.34. Să se determine toate numerele naturale nenule x, y, z care satisfac egalitatea:

$$x + y + z = xyz.$$

R. Împărțind ambii membrii ai egalității cu xyz obținem:

$$\frac{x + y + z}{xyz} = 1$$

sau:

$$\frac{x}{xyz} + \frac{y}{xyz} + \frac{z}{xyz} = 1$$

sau încă:

$$\frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz} = 1.$$

Dacă fiecare dintre numerele xy, yz, zx ar fi strict mai mare decît 3 atunci fiecare din fracțiile $\frac{1}{xy}$, $\frac{1}{yz}$, $\frac{1}{zx}$ ar fi strict mai mică decît $\frac{1}{3}$, deci suma $\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xz}$ ar fi strict mai mică decît $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$, contrar ipotezei. Deci cel puțin unul din numerele xy, xz, yz este cel mult egal cu 3. Fie, fără a restrînge generalitatea problemei, aceasta xy. Din $xy \leqslant 3$ și $x, y \in \mathbb{N}^*$ rezultă situațiile: sau $x = 1, y = 1$, sau $x = 1, y = 2$, sau $x = 1, y = 3$ sau invers. Înlocuind, convine numai $x = 1, y = 2$ care conduce la $z = 3$.

III.2.35ᴹ. Să se arate că dacă numerele $\frac{a}{6}$ și b sînt întregi ($a \in \mathbb{Z}$) atunci și numărul:

$$\frac{1}{2}(a + b + b^2)$$

este întreg.

R. Avem:

$$\frac{1}{2}(a + b + b^2) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}(b + b^2) = \frac{a}{2} + \frac{b(b+1)}{2}.$$

Cum $\frac{a}{6} \in \mathbb{Z}$ rezultă și $3 \cdot \frac{a}{6} = \frac{a}{2} \in \mathbb{Z}$. Cum b și $b + 1$ sînt întregi consecutive, cu necesitate unul este par, deci $\frac{b(b+1)}{2} \in \mathbb{Z}$, deci și suma $\frac{a}{2} + \frac{b(b+1)}{2}$, ca sumă de numere întregi este număr întreg.

III.2.36. Să se afle cifra x astfel ca numărul $\frac{\overline{3x}}{5}$ să fie număr întreg.

R. Se ştie că un număr este divizibil cu 5 dacă şi numai dacă cifra unităţilor este sau 0 sau 5. Deci $x \in \{0,5\}$.

III.2.37. Pentru ce valori, numere naturale, ale lui x expresia $\frac{5}{3x+1}$ ia valori întregi?

R. Pentru ca fracţia $\frac{5}{3x+1}$ să fie număr întreg trebuie ca numitorul ei să dividă numărătorul, adică, deoarece $x \in \mathbb{N}$ şi deci $3x+1 \in \mathbb{N}$, ca $3x+1$ să se găsească printre divizorii naturali ai lui 5, adică 1 şi 5. Din $3x+1=5$ deducem $x=\frac{4}{3}$ care nu convine, iar pentru $3x+1=1$ rezultă $x=0$.
Deci $x=0$.

III.2.38^Po^**.** Să se determine cifrele a şi b aşa ca $\frac{\overline{2ab}}{22} \in N$.

R. Potrivit criteriului de divizibilitate cu 11, $b+2-a$ se divide cu 11 şi b este par. Rezultă : $b=0$, $a=2$ sau $b=2$, $a=4$ sau $b=4$, $a=6$ sau $b=6$, $a=8$.

III.2.39^M^**.** Care număr este mai mare :

a) $(0,1)^3$ sau $(0,1)^5$? b) $(0,25)^{60}$ sau $(0,25)^{70}$?

c) $(-0,1)^3$ sau $(-0,1)^5$? d) $(0,1)^8$ sau $(0,01)^8$?

R. Avem : a) $(0,1)^3$; b) $(0,25)^{60}$; c) $(-0,1)^5$; d) $(0,1)^8$.

III.2.40^M^**.** Să se găsească cel mai mic număr natural n pentru care fracţia $\left(\frac{5}{4}\right)$ este mai mare decît 2.

R. Deoarece $\left(\frac{5}{4}\right)^3 = 1,953125$ şi $\left(\frac{5}{4}\right)^4 = 2\,4414063$ rezultă $n=4$.

III.2.41^M^**.** Să se afle care din numerele $[0,(x)]^x$ şi $(0,x)^x$, unde $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, este mai mare.

R. Avem $(0,x)^x = \left(\frac{x}{10}\right)^x$ şi $[0,(x)]^x = \left(\frac{x}{9}\right)^x$. Cum $\frac{x}{10} < \frac{x}{9} \leqslant 1$ rezultă $\left(\frac{x}{10}\right)^x < \left(\frac{x}{9}\right)^x$ căci $x \geqslant 1$, deci $[0,(x)]^x$ este mai mare.

III.2.42^M^**.** Se dă $\frac{a}{b} = 0,6$. Să se afle $\frac{3b}{2a+3b}$, $a, b \in \mathbb{Z}^*$.

R. Avem $a = 0,6\,b$ deci :

$$\frac{3b}{2a+3b} = \frac{3b}{2\cdot 0,6\,b+3b} = \frac{3b}{1,2b+3b} = \frac{3b}{4,2b} = \frac{30}{42} = \frac{5}{7}.$$

III. 2.42[M]**.** Se ştie că $\frac{a}{b} = 2$, iar $\frac{c}{d} = \frac{1}{4}$.

Să se calculeze: $\frac{ac}{bd}$.

R. Deoarece $\frac{ac}{bd} = \frac{a}{b}, \frac{c}{d}$, rezultă $\frac{ac}{bd} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

III. 2.43[M]**.** Să se calculeze:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^k : \frac{2^{k+1} + 6^{k+1}}{3^{k+1} + 3^{2k+2}}, \ k \in \mathbb{N}.$$

R. Avem:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^k : \frac{2^{k+1} + 6^{k+1}}{3^{k+1} + 3^{2k+2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^k : \frac{2^{k+1} + (2\cdot 3)^{k+1}}{3^{k+1} + (3^{k+1})^2} =$$

$$= \frac{2^k}{3^k} : \frac{2^{k+1} + 2^{k+1}.3^{k+1}}{3^{k+1}(1 + 3^{k+1})} = \frac{2^k}{3^k} : \frac{2^{k+1}(1 + 3^{k+1})}{3^{k+1}(1 + 3^{k+1})} =$$

$$= \frac{2^k}{3^k} \cdot \frac{3^{k+1}}{2^{k+1}} = \frac{3}{2}.$$

III.2.44[P.O.]**.** Să se arate că nu există numere naturale nenule x şi y aşa ca:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} = 1.$$

(Olimpiada U.R.S.S.)

R. Raţionînd ca în soluţia problemei III. 2.34, trebuie să avem sau $x^2 \leqslant 3$ sau $xy \leqslant 3$ sau $y^2 \leqslant 3$ cu $x, y \in \mathbb{N}^*$. Dar $x^2 \leqslant 3$ este valabilă doar pentru $x=1$. În acest caz egalitatea devine $1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} = 1$ sau $\frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} = 0$, absurd căci $\frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} > 0$. Analog pentru $y^2 \leqslant 3$.

Cazul cînd $xy \leqslant 3$ conduce, de asemenea, la o absurditate (tratăm situaţiile $x = y = 1$; $x = 1, y = 2$; $x = 1$, $y = 3$ sau invers).

III.2.46. Să se găsească a şi b naturale aşa încît fracţia $\frac{6 + a}{5 + ab}$ să fie număr natural.

R. Dacă $b = 1$ fracţia devine $\frac{6 + a}{5 + a}$ şi cum $6 + a$ şi $5 + a$ sînt numere naturale consecutive strict mai mari ca 1 rezultă că ea este ireductibilă (fracţiile $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}$, etc. nu se simplifică şi nu sînt numere naturale).

Dacă $b = 2$ fracţia devine $\frac{6 + a}{5 + 2a}$. Dacă $a \geqslant 2$ atunci $2a \geqslant 4$, deci $5 + 2a \geqslant 5 + a + a \geqslant 5 + 2 + a = 7 + a$ deci $\frac{6 + a}{5 + 2a} < \frac{6 + a}{7 + a} < 1$ şi, în acest caz, fracţia nu este număr natural. Cînd $a = 1$ fracţia este egală cu 1.

Dacă $b > 2$, în mod analog fracţia este subunitară. Deci $b = 2$, $a = 1$.

CAPITOLUL IV

EXTRAGEREA RĂDĂCINII PĂTRATE

IV.1. Calculați:

a). $\sqrt{1369}$; b). $\sqrt{2401}$; c). $\sqrt{1681}$; d). $\sqrt{2704}$; e). $\sqrt{204304}$; f). $\sqrt{103041}$; g). $\sqrt{120409}$.

R. a) 37; b) 49; c) 41; d) 52; e) 452; f) 321; g) 347.

IV.2. Calculați:

a). $\sqrt{121}$; b). $\sqrt{144}$; c). $\sqrt{169}$, d). $\sqrt{196}$; e). $\sqrt{225}$; f). $\sqrt{256}$; g). $\sqrt{289}$; h). $\sqrt{324}$; i). $\sqrt{361}$; j). $\sqrt{46225}$; k). $\sqrt{11449}$; l). $\sqrt{90\,601}$; m). $\sqrt{15\,129}$.

R. a) 11; b) 12; c) 13; d) 14; e) 15; f) 16; g) 17; h) 18; i) 19; j) 215; k) 107; l) 301; m) 123.

IV.3. Determinați numărul rațional pozitiv x, știind că:

a). $x^2 = 441$; b). $x^2 = 484$; c). $x^2 = 529$; d). $x^2 = 576$; e). $x^2 = 625$; f). $x^2 = 676$; g). $x^2 = 729$; h). $x^2 = 784$; i). $x^2 = 841$; j). $x^2 = 900$.

R. a) $x = \sqrt{441}$, $x = 21$; b) $x = 22$; c) $x = 23$; d) $x = 24$; e) $x = 25$; f) $x = 26$; g) $x = 27$; h) $x = 28$; i) $x = 29$; j) $x = 30$.

IV.4. Calculați:

a). $\sqrt{9{,}61}$; b). $\sqrt{10{,}24}$; c). $\sqrt{10{,}89}$; d). $\sqrt{11{,}56}$; e). $\sqrt{12{,}25}$; f). $\sqrt{12{,}96}$; g). $\sqrt{13{,}69}$; h). $\sqrt{14{,}44}$; i). $\sqrt{15{,}21}$; j). $\sqrt{0{,}16}$.

R. a) 3,1; b) 3,2; c) 3,3; d) 3,4; e) 3,5; f) 3,6; g) 3,7; n) 3,8; i) 3,9; j) 0,4.

IV.5. Extrageți rădăcina pătrată a numerelor:

s). 547,56; b). 11,9025; c). 0,207936 și apoi faceți proba.

R. a) 23,4; b) 3,45; c) 0,456.

IV.6. Aflați primele cinci cifre ale fracției zecimale ce reprezintă numărul irațional:

a). $\sqrt{5}$; b). $-\sqrt{3}$; c). $\sqrt{0{,}75}$.

R. a) 2,2360; b) −1,7320; c) 0,8660.

IV.7. Care dintre următoarele propoziții sînt adevărate și care false?

a). $\sqrt{2} < 1,401$; b). $\sqrt{3} = 1,73$; c). $\sqrt{5} < 2,24$; d). $-\sqrt{7} < -2,55$.

R. Propozițiile *a*, *b* și *d* sînt false, propoziția *c*) este adevărată.

IV.8. Calculați cu aproximație cu eroare de o miime, numerele $\sqrt{2}$ și $\sqrt{3}$.

R. a) $\sqrt{2} = 1,414$, b) $\sqrt{3} = 1,732$.

IV.9. Calculați :

a). $\sqrt{16 \cdot 49}$; b). $\sqrt{9 \cdot 81}$; c). $\sqrt{625 \cdot 441}$; d). $\sqrt{1,69 \cdot 1,96}$;

e). $\sqrt{2^4 \cdot 2^6}$; f). $\sqrt{3^2 \cdot 3^4 \cdot 3^6}$; g). $\sqrt{7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7}$; h). $\sqrt{2^2 \cdot 3^3 \cdot 2^2}$;

i). $\sqrt{5 \cdot 7 \cdot 5^3 \cdot 7^3}$; j). $\sqrt{3 \cdot 48}$; k). $\sqrt{72 \cdot 50 \cdot 49}$; l). $\sqrt{13 \cdot 52}$; m). $\sqrt{17 \cdot 68}$.

R. a) Aplicăm regula $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, oricare-ar fi *a*, *b* raționale pozitive și obținem $4 \cdot 7 = 28$; b) $3 \cdot 9 = 27$; c) $25 \cdot 21 = 525$; d) $1,3 \cdot 1,4 = 1,82$; e) $\sqrt{2^4 \cdot 2^6} = \sqrt{(2^2)^2(2^3)^2} = 2^2 \cdot 2^3 = 32$,; f) $3 \cdot 3^2 \cdot 3^3$; g) $\sqrt{7^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2} = 7 \cdot 5 \cdot 2$; h) $\sqrt{2^4 \cdot 3^2} = 2^2 \cdot 3 = 12$; i) $\sqrt{5^4 \cdot 7^4} = 5^2 \cdot 7^2$; j) $\sqrt{3 \cdot 16 \cdot 3} = \sqrt{3^2 \cdot 16} = 3 \cdot 4 = 12$; k) $\sqrt{36 \cdot 2 \cdot 25 \cdot 2 \cdot 49} = 6 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = 420$; l) $\sqrt{13 \cdot 13 \cdot 4} = 13 \cdot 2 = 26$; m) $\sqrt{17 \cdot 17 \cdot 4} = 17 \cdot 2 = 34$.

IV.10. Calculați :

a). $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$; b). $\sqrt{15} \cdot \sqrt{60}$; c). $\sqrt{72} \cdot \sqrt{648}$; d). $\sqrt{27} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{9}$;

e. $\sqrt{13} \cdot \sqrt{52}$; f). $\sqrt{7 \cdot 3^3} \cdot \sqrt{3 \cdot 5^2 \cdot 7}$; g). $\sqrt{0,9} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{100}$; h). $\sqrt{1,21} \cdot \sqrt{100}$.

R. a) Aplicăm formula $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, pentru orice *a* și *b* raționale pozitive și obținem: $\sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$; b) $\sqrt{15 \cdot 60} = \sqrt{900} = 30$; c) $\sqrt{72 \cdot 216} = \sqrt{3^2 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 3^4} = \sqrt{2^6 \cdot 3^6} = \sqrt{(2^3)^2 \cdot (3^3)^2} = 2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = 216$. d) $\sqrt{3^3 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 3^2} = \sqrt{3^6 \cdot 2^2} = 3^3 \cdot 2 = 54$; e) $\sqrt{13 \cdot 13 \cdot 4} = \sqrt{13^2 \cdot 4} = 13 \cdot 2 = 26$; f) $\sqrt{7 \cdot 3^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7} = \sqrt{7^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2} = 7 \cdot 3^2 \cdot 5 = 315$; g) $\sqrt{0,9 \cdot 10 \cdot 100} = \sqrt{9 \cdot 100} = 3 \cdot 10 = 30$; h) $\sqrt{1,21 \cdot 100} = \sqrt{121} = 11$.

IV.11^{PO}. Determinați numerele raționale pozitive *x*, astfel încît:

a). $\sqrt{x} = 1$; b) $\sqrt{x} = 0$; c) $\sqrt{x} = 2,5$; d) $\sqrt{x} = \frac{3}{2}$; e) $\sqrt{x} = \frac{1}{5}$;

f) $\sqrt{x} = -2$; g). $\sqrt{x} = 2,(3)$; h). $\sqrt{x} = -0,(1)$; i). $\sqrt{x^2} = x$;

j). $\sqrt{x^2} = -x$.

R. a) Din definiția radicalului unui număr rațional pozitiv rezultă $x = 1^2$, $x = 1$; b) $x = 0$; c) $x = (2,5)^2$, $x = 6,25$; d) $x = \frac{9}{4}$, e) $x = \frac{1}{25}$; f) Nu există nici un *x*, deoarece, prin definiție, rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv este un număr rațional pozitiv. g) $x = [2,(3)]^2$, $x = \left(\frac{23-2}{9}\right)^2$, $x = \left(\frac{21}{9}\right)^2$, $x = \left(\frac{7}{3}\right)^2$, $x = \frac{49}{9}$; h) Nu există *x*;

i) Obținem, prin definiție $x^2 = x^2$, și, ținînd cont că radicalul unui număr rațional pozitiv este pozitiv, rezultă că egalitatea are loc pentru orice x rațional pozitiv. j) Condiția $-x \geqslant 0$ și $x^2 = (-x)^2$, implică faptul că orice x rațional negativ satisface egalitatea.

IV.12. Calculați :

a). $\sqrt{\frac{25}{49}}$; b). $\sqrt{\frac{1,21}{9}}$; c). $\sqrt{\frac{96,1}{0,001}}$; d). $\sqrt{\frac{90\,601}{10\,000}}$; e). $\sqrt{\frac{2^3 \cdot 5}{5^3 \cdot 2}}$.

R. a) Aplicăm regula $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, oricare-ar fi a și b numere raționale pozitive și obținem: $\sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{5}{7}$.

b) $\sqrt{\frac{1,21}{9}} = \frac{\sqrt{1,21}}{\sqrt{9}} = \frac{1,1}{3}$; c) $\sqrt{\frac{96,1}{0,001}} = \sqrt{\frac{96\,100}{1}} = \sqrt{96\,100} = 310$;

d) $\sqrt{\frac{90\,601}{10\,000}} = \sqrt{9,0601} = 3,01$; e) $\sqrt{\frac{2^2}{5^2}} = \frac{2}{5}$.

IV. 13. Calculați :

a). $\frac{\sqrt{5^3 \cdot 7^2}}{\sqrt{11^2 \cdot 5}}$; b) $\frac{\sqrt{11 \cdot 5}}{\sqrt{1\,375}}$; c). $\frac{\sqrt{91}}{\sqrt{7^3 \cdot 13}}$

R. a) Avem $\sqrt{\frac{5^3 \cdot 7^2}{11^2 \cdot 5}} = \sqrt{\frac{5^2 \cdot 7^2}{11^2}} = \frac{\sqrt{5^2 \cdot 7^2}}{\sqrt{11^2}} = \frac{\sqrt{5^2} \cdot \sqrt{7^2}}{\sqrt{11^2}} = \frac{5 \cdot 7}{11} = \frac{35}{11}$;

b) $\sqrt{\frac{11 \cdot 5}{11 \cdot 125}} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$; c) $\sqrt{\frac{91}{7^3 \cdot 13}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 13}{7^3 \cdot 13}} = \sqrt{\frac{1}{7^2}} = \frac{1}{7}$.

IV.14. Calculați :

a). $\sqrt{9 + 16}$; b). $\sqrt{36 + 64}$; c). $\sqrt{9^2 + 12^2}$; d). $\sqrt{25 - 16}$;
e). $\sqrt{100 - 36}$; f). $\sqrt{15^2 - 12^2}$.

R. a) Avem : $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$. Să observăm că $\sqrt{9 + 16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$!

b) $\sqrt{100} = 10$; c) $\sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$; d) 3; e) 8; f) 9.

IV.15^M. Așezați în ordine crescătoare, numerele :

$$10\sqrt{2 \cdot 8}\,;\ 6\sqrt{3 \cdot 27}\,;\ \frac{9}{2}\sqrt{36}.$$

R. Avem $10\sqrt{2 \cdot 8} = 10\sqrt{2 \cdot 2^3} = 10\sqrt{2^4} = 10 \cdot 2^2 = 40$; $6\sqrt{3 \cdot 27} = 54$; $\frac{9}{2}\sqrt{36} = 27$.

Deci ordinea numerelor este : $\frac{9}{2}\sqrt{36}$; $10\sqrt{2 \cdot 8}$; $6\sqrt{3 \cdot 27}$.

IV.16^M. Aflați x și y astfel încît numărul $\sqrt{\overline{1xy}}$ $(x \neq y)$ să fie număr natural.

R. $\overline{1xy}$ trebuie să fie pătrat perfect; cifra unităților y poate fi 1; 4; 5; 6 sau 9. Obținem $x = 2$; $y = 1$ sau $x = 6$ și $y = 9$ sau $x = 9$ și $y = 6$.

CAPITOLUL V

MONOAME ŞI POLINOAME

ECUAŢII DE GRADUL I CU O NECUNOSCUTĂ

V.1. Sînt monoame numerele :

$$2\,;\,5\,;\,-3\,;\,7\,;\,-\frac{3}{2}\,;\quad\frac{-5}{-8}\,?$$

R. Da.

V.2. Cu ajutorul simbolurilor 3, a, b să se construiască monoame.

R. Avem monoamele 3; a; b; $3a$; $3b$; ab; $3ab$; $3a^2b$; etc.

V.3. Să se scrie sub formă canonică monoamele :

$$\text{a) } -(-3)xy\,;\ \text{b) } (-5)\cdot(-9)x\,;\ \text{c) } \left(-\frac{7}{3}\right)\left(-\frac{12}{14}\right)\left(-\frac{9}{8}\right)a(ab)\,;$$

$$\text{d) } (xy)\cdot(xz)\cdot(zx)\,;\ \text{e) } 3a(-2)(-a)\,;\ \text{f) } 14.$$

R. Avem scrierile : *a*) $3xy$; *b*) $45x$; *c*) $-\frac{9}{4}a^2b$; *d*) x^3yz^2 ; e) $6a^2$; f) 14.

V.4. Să se determine coeficienţii monoamelor de la exerciţiul precedent.

R. Avem coeficienţii : a) 3 ; b) 45 ; c) $-\frac{9}{4}$; d) 1 ; e) 6 ; f) 14.

V.5. Să se determine gradele monoamelor de la exerciţiul V.3.

R. Avem : a) 2 ; b) 1 ; c) 3 ; d) 6 ; e) 2 ; f) 0.

V.6. Să se determine gradul monoamelor :

a) $4xy$; b) $5x^2y$; c) $-17,5\ x^3y^2a$

în raport cu literele : i) x; ii) y; iii) x şi y.

R. i) În raport cu x, gradele monoamelor sînt : a) 1 ; b) 2 ; c) 3 ;
ii) În raport cu y, gradele monoamelor sînt : a) 1 ; b) 1 ; c) 2 ; ;
iii) În raport cu x şi y, gradele monoamelor sînt : a) 2 ; b) 3 ; c) 5.

V.7. Care din monoamele : a) $3x^2y$; b) $-5ab^2$; c) $-12x^2y$; d) $6b^2a$ sînt asemenea?

R. Sînt asemenea a) cu c), respectiv b) cu d).

V.8. Să se reducă termenii asemenea :

a) $5a+0\cdot a$; b) $3x+2x$; c) $5x-(-2x)$; d) $-7x-12x$; e) $7a+2a-5a$; f) $3x+4x+6x+9x$; g) $-(-3)xy+(-5xy)-(7xy-3xy)$; h) $-x^2y^2-x^2y^2$; i) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x$;

j) $\frac{1}{4}xy-\frac{1}{3}xy$; k) $x+xy+y+1-2x-3y-6xy$;

l) $\frac{3}{4}x+\frac{5}{6}x+y+\frac{1}{2}y-\frac{3}{4}x$; m) $x^2y-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}x^2y-1+\frac{3}{2}x$

R. Avem :

a) $5a$; b) $5x$; c) $7x$; d) $-19x$; e) $4a$; f) $22x$; g) $-6xy$; h) $-2x^2y^2$; i) $\frac{5}{6}x$;

j) $-\frac{1}{12}xy$; k) $-x-2y-5xy+1$; l) $\frac{5}{6}x+\frac{3}{2}y$; m) $\frac{7}{4}x^2y+x-1$.

V.9. Să se scrie sub formă canonică următoarele produse de monoame :

a) $(2x)\cdot(3x)$; b) $(-7ab)\cdot(-5xya)$; c) $\left(-\frac{5}{2}abc\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)$;

d) $(0,8\,mnp^2)\cdot(-5amnpq^3)$; e) $(6ab)\cdot(-5ab^3x)$; f) $(12abz)\cdot[-0,(3)mna]$; g) $\left(\frac{1}{3}xy\right)\cdot\left(\frac{1}{4}xz\right)\cdot\left(\frac{1}{8}zu\right)\cdot(-5abz)$;

h) $[(-1)^{n(n+1)}xy]\cdot[(-1)^{(n+1)(n+2)}xa]$, $n\in\mathbb{N}$; i) $(a^nb^m)\cdot(a^mb^n)$; j) $a\cdot a^2\cdot a^3\cdot a^4\cdot\ \ldots\ldots\ \cdot a^n$.

R. Avem : a) $6x^2$; b) $35a^2bxy$; c) $-\frac{15}{8}abc$; d) $-4am^2n^2p^3q^3$; e) $-30a^3b^4x$; f) $-4a^2bmnz$; g) $\frac{-5}{96}x^2yz^3uab$; h) x^2ya, deoarece $(-1)^{n(n+1)} = (-1)^{(n+1)(n+2)} = 1$, n, $n+1$, respectiv $n+1$, $n+2$ fiind numere consecutive (deci unul par) ; i) $a^{m+n}b^{m+n}$; j) $a^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

V.10. Să se efectueze, scriind sub formă canonică:

a) $-3(ab)^2$; b) $(-3ab)^2$; c) $(2a^2b)^3$; d) $6(ab)^2 \cdot (a^2b)^3$;

e) $(-5ab^2x)^4(-3ab^3x^2y)^3(2ab)^2$; f) $(0,(3)xy)^2 \cdot (0,(4)yz)^3$.

R. Avem : a) $-3a^2b^2$; b) $9a^6b^2$; c) $8a^6b^3$; d) $6a^8b^5$; e) $-3750a^9b^{19}x^{10}y^3$; f) $\frac{64}{6561}x^2y^5z^3$.

V.11. Să se efectueze, scriindu-se sub formă canonică :

$$\text{a)}\ \frac{5x^2y}{-3x};\quad \text{b)}\ \frac{7x^2}{3x};\quad \text{c)}\ \frac{3{,}2abc^2}{1{,}5abc};\quad \text{d)}\ \frac{-a^4}{-a^2};$$

$$\text{e)}\ \frac{-14x^2y}{2xy};\quad \text{f)}\ \frac{\frac{4}{9}x^4y^3}{-\frac{2}{3}xy^2};\quad \text{g)}\ \frac{-3x^3y^2z^2}{2xyz^2};$$

$$\text{h)}\ \frac{6abc}{5bc};\quad \text{i)}\ \frac{-17a^2bcd^2}{13a^2bc}.$$

R. Avem : a) $-\frac{5}{3}xy$; b) $\frac{7}{3}x$; c) $\frac{32}{15}c$; d) a^2 ; e) $-7x$; f) $-\frac{2}{3}x^3y$; g) $-\frac{3}{2}x^2y$;

h) $\frac{6}{5}a$; i) $-\frac{17}{13}d^2$.

V.12. Să se efectueze, reducîndu-se termenii asemenea :

a) $6x\cdot(-3y) + (-3x^2y)^3 : (-9x^5y^2)$; b) $12x^2y : (-2x) + 6xy$; c) $6x^2y^2z + (-3xyz)\cdot(+2x)\cdot(-5y) + (2z)\cdot(-3xy)^2$; d) $\left(\frac{17x^2y^2z}{3xy^2}\right)\cdot\left(\frac{5a^3b^2z}{6abz}\right) - (-3xz)\cdot(+2b)\cdot(-5a)^2$; e) $(ab\cdot bc\cdot ca)^2 + (5abc)^4 - \frac{16a^5b^4c^6z}{4ac^2z}$.

R. Avem a) $-15xy$; b) 0; c) $54x^2y^2z$; d) $\frac{2785}{18}a^2b\,xz$; e) $622a^4b^4c^4$.

V.13. Să se scrie sub formă canonică polinoamele:

$$a)\ +7xy-(+3xy)+(-5xy);\quad b)\ -3a^2x+\left(+\frac{7}{9}a^2x\right);$$

$$c)\left(-\frac{3}{4}ab\right)+\left(\frac{2}{3}a^2b\right)+(+ab)+\left(-\frac{5}{6}a^2b\right)+\left(-\frac{3}{2}ab\right);$$

$$d)\ \frac{5}{2}a+\frac{3}{8}b+6ab+(-5ab)-(-6a)+(-7b);$$

$$e)\ \frac{3}{4}x^2+\frac{3{,}5}{2}x-\frac{3}{8}x^2-\frac{1}{4}x+5;\ f)\ -(-18x^2)-(17x-x^2)+$$

$$+(-5x+6x^2);\ g)\ -6a^2-(-4{,}5a^2);\ h)\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y;$$

$$i)\ x^2y-xy^2+2xy^2+(-5xy)-(-6x^2y)$$

R. Avem: a) $-xy$; b) $-\frac{20}{9}a^2x$; c) $-\frac{5}{4}ab-\frac{1}{6}a^2b$; d) $\frac{17}{2}a-\frac{53}{8}b+ab$; e) $\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{2}x+5$; f) $25x^2-22x$; g) $-1{,}5a^2$; h) $x+\frac{1}{2}y$; i) $7x^2y+xy^2-5xy$.

V.14. Să se determine gradul polinomului:

$$a)\ 7x^2y+3xya+6;\ b)\ -6x^2yz+14xy^4;\ c)\ xy^2-\frac{3}{5}xy^3+7a-$$

$$-7b^3c^4+\frac{3}{2}a^2-\frac{7}{9}b;$$

$$d)\ \frac{1}{5}ab+\frac{1}{7}bc-\frac{2}{3}ac;\ e)\ x-y-z;\ f)\ uvt;\ g)\ 6$$

R. Gradele sînt: a) 3; b) 5; c) 7; d) 2; e) 1; f) 3; g) 0.

V.15. Să se efectueze adunările de polinoame:

$$a)\ (a-b)+(b-c)+(c-a);\ b)\ (xy-yz)+(zx-xy)+$$

$$+(xy-yz);\ c)\ (7x^2-3x+1)+(-5x^2+6x-8);$$

$$d)\left(\frac{2}{3}a^2b+\frac{6}{9}ab^2-5ab\right)+\left(-\frac{4}{6}a^2b-\frac{5}{9}ab^2+8{,}3ab-1\right);$$

e) $\left(\frac{2}{0,5}bxy - \frac{0,3}{2}x^2y - 0,7x^2y - \frac{7}{2}bxy\right) + (0,85x^2y - 0,5\,bxy)$;

f) $(6 + 7x - 9x^2) + (-5 + 18x + 0,9x^2 + x^3)$;

g) $\left(\frac{5}{2}xy - \frac{7}{3}a^2b\right) + \left(-\frac{3}{8}xy + 6ab^2 - 5a^2b\right)$;

h) $(1 + x + x^2 + \ldots + x^{2n}) + (1 - x + x^2 - x^3 + \ldots - x^{2n-1} + x^{2n})$

$n \in \mathbb{N}^*$; i) $(x^3 - y^3) + (x^3 + y^3)$; j) $2a^2 - (2a^2 - 3b^2)$.

R. Avem : a) 0; b) $zx + xy - 2yz$; c) $2x^2 + 3x - 7$; d) $\frac{1}{9}ab^2 + 3,3\,ab - 1$; e) 0;

f) $1 + 25x - 8,1x^2 + x^3$; g) $\frac{17}{8}xy - \frac{22}{3}a^2b + 6ab^2$; h) $2 + 2x^2 + 2x^4 + \ldots + 2x^{2n}$;

i) $2x^3$; j) $3b^2$.

V.16. Să se efectueze scăderile de polinoame :

a) $(6 - a^2 + b^2) - (5 + 2a^2 - 3b^2)$; b) $(15a^2x + 3xy - 7) - -(-6xy + 16 - 5a^2x + 3x)$; c) $3x - (6x - 7)$;

d) $6ab - 3 - (6ab - 3)$; e) $(8x^2y - 5) - (3x^2y + 7) - (2x^2y - 9)$;

f) $(6ab - 5cd) - (-3ab + 8cd) - (5ab - 8)$;

g) $\left(3ab - \frac{5}{7}xy - \frac{5}{2}xa^2\right) - \left(\frac{8}{9}xy + \frac{7}{4}xa^2 - 4ab\right)$;

h) $(x^2 + x + 1) - (x^2 - x + 1,3)$; i) $(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$

$\ldots + x^{2n}) -$

$- (1 - x + x^2 - x^3 + \ldots - x^{2n-1} + x^{2n})$; j) $(8abx - 5) - (8abx + 5)$.

R. Avem : a) $1 - 3a^2 + 4b^2$; b) $20a^2x + 9xy - 23 - 3x$; c) $-3x + 7$; d) 0; e) $3x^2y - 3$;

f) $4ab - 13cd + 8$; g) $7ab - \frac{101}{63}xy - \frac{17}{4}xa^2$ h) $2x - 0,3$; i) $2x + 2x^3 + \ldots + 2x^{2n-1}$;

j) -10.

V.17. Să se scrie polinomul :

$$\frac{16}{3}x^2y - \frac{5}{4}ax^2 + \frac{7}{9}bxy - \frac{3}{8}c$$

sub forma unei sume dintre un polinom și un monom, respectiv sub forma unei diferențe dintre un polinom și un monom.

R. Avem :

$$\frac{16}{3}x^2y - \frac{5}{4}ax^2 + \frac{7}{9}bxy - \frac{3}{8}c =$$

$$= \left(\frac{16}{3}x^2y\right) + \left(-\frac{5}{4}ax^2 + \frac{7}{9}bxy - \frac{3}{8}c\right) = \left(-\frac{5}{4}ax^2\right) +$$

$$+ \left(\frac{16}{3}x^2y + \frac{7}{9}bxy - \frac{3}{8}c\right).$$

etc. şi :

$$\frac{16}{3}x^2y - \frac{5}{4}ax^2 + \frac{7}{9}bxy - \frac{3}{8}c = \left(\frac{16}{3}x^2y - \frac{5}{4}ax^2 +\right.$$

$$\left. + \frac{7}{9}bxy\right) - \left(\frac{3}{8}c\right) = \left(-\frac{5}{4}ax^2 + \frac{7}{9}bxy - \frac{3}{8}c\right) - \left(-\frac{16}{3}x^2y\right)$$

etc.

V.18. Să se efectueze înmulţirile :

a) $0 \cdot (4a + 3b)$; b) $2(a - b + c)$; c) $-7(x + y - z)$; d) $x(x + y + z)$; e) $xy(x + y + xy)$; f) $abc(a + b + c)$; g) $x^2yz\left(-2abc^2 + \frac{3}{8}xy + 6\right)$; h) $\frac{1}{2}x(x + 4)$; i) $(7a - 8b + 9c)\,13d$: j) $3a^2b(5ab^2x - 7aby + 9z)$; k) $\left(-\frac{5}{6}\right)\left(-\frac{5}{6}a + \frac{5}{8}b - \frac{7}{9}c\right)$; l) $(4m - 2x + 3ab - -7cu) \cdot aby$; m) $(a - b + c - d + e)\,3a^2b^3c^4z^7$; n) $(-4ab)(a + b + 2c - 3abcz)$; o) $1\frac{1}{4}\,ab(c + 2d - 7c^3)$.

R. Avem : a) 0; b) $2a - 2b + 2c$; c) $-7x - 7y + 7z$; d) $x^2 + xy + xz$; e) $x^2y + + xy^2 + x^2y^2$; f) $a^2bc + ab^2c + abc^2$; g) $-2abc^2x^2yz + \frac{3}{8}x^3y^2z + 6x^2yz$; h) $\frac{1}{2}x^2 + 2x$; i) $91ad - 104bd + 117cd$; j) $15a^3b^3x - 21a^3b^2y + 27a^2bz$; k) $\frac{25}{36}a - \frac{25}{48}b + \frac{35}{54}c$; l) $4abmy - 2abxy + 3a^2b^2y - 7abcuy$; m) $3a^3b^3c^4z^7 - 3a^2b^4c^4z^7 + 3a^2b^3c^5z^7 - 3a^2b^3c^4dz^7 + + 3a^2b^3c^4ez^7$; n) $-4a^2b - 4ab^2 - 8abc + 12a^2b^2cz$; o) $\frac{5}{4}abc + \frac{5}{2}abd - \frac{35}{4}abc^3$.

V.19. Care din expresiile :

a) $\frac{6x}{1}$; b) $\frac{3a - 2c}{4}$; c) $\frac{2}{x}$; d) $\frac{6 - x}{3 + x}$; e) $\frac{a^2bc}{xy}$; f) $\frac{3ac - b^2}{6ac - 2}$

sînt fracţii algebrice raţionale.

V.20. Pentru ce valori ale lui x, fracţiile algebrice raţionale :

a) $\frac{3}{x}$; b) $\frac{6a}{3x}$; c) $\frac{3x - 1}{5x}$; d) $\frac{2ax + 1}{x - 2}$

nu au sens (nu sînt definite)?

V.21. Care dintre numerele $0;\ \frac{1}{3};\ 1;\ 2;\ 8$ este soluţie a ecuaţiei

$$3(x-1)-3=2x+2?$$

R. Pentru $x=0$ egalitatea devine $3(0-1)-3=2\cdot 0+2$ sau $-6=2$, fals. Verificînd fiecare număr, se constată că $x=8$ este soluţie.

V.22. Care dintre numerele $-0{,}3;\ 2{,}(4);\ 3;\ 20^2-1$ este soluţie a ecuaţiei

$$\frac{x+1}{2}-3=\frac{x-3}{2}-1?$$

R. Aplicînd proprietăţile relaţiei de egalitate dintre numere reale obţinem, succesiv, ecuaţia echivalentă $x+1-6=x-3-2$ sau $-5=-5$, de unde rezultă că orice $x\in\mathbb{Q}$ este soluţie a ecuaţiei. Rezultă, în particular, că numerele propuse în exerciţiu sînt soluţii.

V.23. Rezolvaţi ecuaţiile:

a) $3x-7=5x-3$;

b) $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=x-\frac{1}{2}$

în mulţimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.

R. a) Ecuaţia este echivalentă cu:

$$3x-5x=-3+7$$

sau $-2x=4$, de unde $x=\frac{4}{-2}$, $x=-2$. Deci ecuaţia nu are soluţie în $\mathbb{N}$, dar are soluţie în $\mathbb{Z}$ şi $\mathbb{Q}$, anume pe $x=-2$.

b) Analog obţinem $x=\frac{1}{2}$, deci ecuaţia nu are soluţie în $\mathbb{N}$ şi $\mathbb{Z}$ dar are soluţie în $\mathbb{Q}$.

V.24. Să se rezolve în mulţimea $\mathbb{Q}$ ecuaţiile:

a) $2x=0$; b) $5x=0$; c) $2x=2$; d) $2=3x$; e) $2x+3x=5$; f) $3x+7x+9x=15$; g) $4x-2x=8$; h) $4x-(2x-x)=9$; i) $3x+(8x-2x)=7$; j) $2x+5x=6x-2x$; k) $2x+3=-x+8$; l) $-3x-5x=-3x+2x+6$; m) $4x-3=2x-7$; n) $6x+9-5x=-3x+7+2x$; o) $3x+5=-3x+5$; p) $-6x-[9(3x-5)-6x]=2x-7$; r) $2\{3x-5[6-2(3x-2)]-5\}=6x+9$; s) $4x-3[2-6x(2x-6)]=36x^2-9$.

R. Avem soluţiile: a) $x=0$; b) $x=0$; c) $x=1$; d) $x=\frac{2}{3}$; e) $x=1$; f) $x=\frac{15}{19}$; g) $x=4$; h) $x=3$; i) $x=\frac{7}{9}$; j) $x=0$; k) $x=\frac{5}{3}$; l) $x=-\frac{6}{7}$; m) $x=-2$; n) $x=-1$; o) $x=0$; p) $x=\frac{52}{29}$; r) $x=\frac{119}{60}$; s) $x=\frac{3}{104}$.

V. 25. Să se reprezinte fiecare dintre următoarele mulțimi scriind elementele sale între acolade (acolo unde acest lucru este posibil):

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ \ 3x = 9\},\quad B = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ \ 2x = 16\};$$

$$C = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ 6x = -18\};\ D = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ 3x = 7\};$$

$$E = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ \ 3x = -6 \ \text{ sau } \ 5x = 15\};\ F = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ \ 5x = 15 \ \text{ și } \ 8x = 25\};\quad G = \{x \mid x \in \mathbb{Z} - \mathbb{N},\ \ 3x = 6\};\quad H = \{x \mid x \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z},\ -5x = -25\}.$$

R. Avem:

$A = \{3\}$; $B = \{8\}$; $C = \{-3\}$; $D = \emptyset$; $E = \{-2, 3\}$, $F = \emptyset$; $G = \{2\}$; $H = \emptyset$.

V. 26. Să se rezolve ecuațiile:

a) $|x| = 0$; b) $|x - 1| = 0$; c) $|x - 2| = 3$; d) $|x| + |x - 1| = 0$; e) $|x - 3| = |x - 2|$; f) $2|x + 5| = |x - 7|$; g) $|-x + 1| = 6|x + 3|$.

R. Avem: a) $x = 0$; b) $x = 1$; c) $x_1 = 5$, $x_2 = -1$; d) ecuația nu are soluție; e) $x = \frac{5}{2}$; f) $x_1 = -17$, $x_2 = -1$; g) $x_1 = -\frac{19}{5}$, $x_2 = -\frac{17}{7}$.

V. 27. Pentru ce valori, numere naturale, ale lui x, fracția $\frac{15}{2x + 3}$ este număr întreg?

R. Pentru ca fracția să fie număr întreg este necesar ca $2x + 6$ să fie un divizor întreg al lui 15. Se observă că dacă $2x + 6$ este egal cu un divizor negativ al lui 15 atunci x nu este număr natural. Trebuie deci, ca $2x + 3$ să fie egal cu un divizor natural al lui 15. Dar $D_{15} = \{1; 3; 5; 15\}$ deci avem ecuațiile $2x + 3 = 1$, cu $x = -1 \notin \mathbb{N}$, $2x + 3 = 3$, cu $x = 0 \in \mathbb{N}$, $2x + 3 = 5$, cu $x = 1 \in \mathbb{N}$, $2x + 3 = 15$, cu $x = 6 \in \mathbb{N}$.

Așadar, valorile $x \in \mathbb{N}$ care satisfac enunțul sînt 0, 1, 6.

V.28. Dublul unui număr natural n mărit cu 3 este egal cu 27. Să se afle numărul.

R. Potrivit enunțului, n verifică ecuația $2n + 3 = 27$ de unde $2n = 27 - 3 = 24$, deci $n = \frac{24}{2} = 12$.

V.29. Un număr este cu 4 mai mare decît altul. Să se afle numerele știind că suma lor este 250.

R. Fie x al doilea număr. Atunci primul este $x + 4$. Suma lor este $x + (x + 4) = 2x + 4$. Deci $2x + 4 = 250$ de unde $2x = 250 - 4 = 246$, deci $x = \frac{246}{2} = 123$. Primul număr este, așadar, egal cu $123 + 4 = 127$.

V.30. Un număr este de două ori mai mare decît alt număr. Să se determine numerele ştiind că diferenţa lor este 18.

R. Fie x al doilea număr. Primul număr este egal cu $2x$. Diferenţa lor este $2x - x = x$, deci $x = 18$ şi deci, primul număr este egal cu $2 \cdot 18 = 36$.

V.31. Să se afle un număr raţional ştiind că dacă-l înmulţim cu 3 obţinem acelaşi rezultat dacă scădem 6 din el.

R. Fie x numărul căutat. El satisface, aşadar, ecuaţia $3x = x - 6$, deci $2x = -6$, adică $x = -3$.

V.32. Împărţind un număr la 5 obţinem cîtul 4 şi restul 4. Să se determine numărul.

R. Potrivit teoremei înpărţirii numerelor întregi, numărul căutat este $4 \cdot 5 + 4 = 24$.

V.33[M]**.** M-am gîndit la un număr. L-am adunat cu 4. Rezultatul l-am înmulţit cu 2. Din noul rezultat am scăzut 8 şi am obţinut numărul la care m-am gîndit. La ce număr m-am gîndit?

R. Numărul x căutat satisface ecuaţia:

$$2(x + 4) - 8 = x$$

adică $2x + 8 - 8 = x$, de unde $x = 0$.

V.34. Să se determine cinci numere naturale consecutive ştiind că suma lor este 50.

R. Fie x, $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$, $x + 4$ numerele căutate. Potrivit enunţului avem ecuaţia:

$$x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4) = 50$$

sau $5x + 10 = 50$ de unde $x = 8$. Deci numerele sînt 8, 9, 10, 11, 12.

V.35. Un număr de trei cifre are cifrele pare consecutive. Să se afle numărul ştiind că suma cifrelor sale este 18.

R. Fie $\overline{abc}$ numărul căutat. Aşadar, $b = a + 2$, $c = a + 4$ şi $a + (a + 2) + (a + 4) = 18$, de unde $a = 4$. Deci numărul căutat este 468.

GEOMETRIE

CAPITOLUL I

INTRODUCERE INTUITIVĂ ÎN GEOMETRIA PLANĂ

§. 1. Punct, dreaptă, plan, semidreaptă, semiplan, segment, unghi, cerc.

I.1.1. Noțiunile de bază cu care se operează în geometrie sînt: punctul, dreapta și planul. Enumerați din situațiile ce urmează pe acelea prin care vă puteți face o idee cît mai clară despre noțiunile fundamentale ale geometriei:

a) marginea unei foi de caiet de dimensiuni foarte mari; b) vîrful unui creion bine ascuțit; c) o foaie netedă de hîrtie foarte mare; d) colțul ascuțit al unei mese; e) o sfoară foarte lungă bine întinsă; f) suprafața mării în timpul unei furtuni; g) fața netedă a unei mese; h) direcția traiectoriei unei pietre care cade liber; i) marginea unei monezi de 5 lei; j) suprafața unei ape liniștite; k) suprafața unui teren în urma arăturii; l) urma lăsată de creion cînd se scrie litera „c"; m) traiectoria unei pietre aruncată orizontal; n) vîrful ascuțit al unui stîlp; o) fața netedă a unui perete din clasă.

R. Planul este reprezentat în situațiile c); g); j); o); dreapta, în cazurile a); e); h); punctul, în cazurile b); d); n).

I.1.2. A, B, C, D, E sînt puncte (vezi figura). Scrieți valoarea logică a următoarelor propoziții:

a) $A \neq D$; b) $A = C$; c) $A \neq E$; d) $A \neq B$; e) $D = E$; f) $B = C$; g) $C = D$; h) $B \neq D$; i) $C \neq E$; j) $C = A$; k) $C = E$.

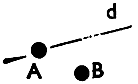
A = B = C
×
×D
E×

R. Notînd cu A valoarea de adevăr a unei propoziții adevărate și cu F a uneia false avem: a) A; b) A; c) A; d) F; e) F; f) A; g) F; h) A; i) A; j) A; k) F.

I.1.3. Se dau punctele A, B, C. Realizați un desen știind că sînt adevărate simultan propozițiile: $A = B$, $A \neq C$.

R. Unul din cazurile posibile este prezentat în figura alăturată:

A = B
×
×C

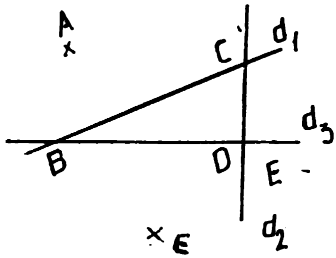


I.1.4. A și B sînt puncte iar d o dreaptă. Realizați un desen în cazul cînd avem adevărate simultan propozițiile : $A \in d$, $B \notin d$.

R. Un caz posibil este prezentat în figură.

I.1.5. Se dau punctele : A, B, C, E, M și P. Precizați la care din notațiile următoare se respectă convențiile învățate : a) $A \in B$; b) $A = B$; c) $B = A$; d) $A \notin B$; e) $A \neq C$; f) $A \subset B$; g) $M \not\subset P$; h) $A \cap B = E$.

R. Convențiile se respectă în cazurile b), c) și e).



I.1.6. A, B, C, D, E, F sînt puncte iar d_1, d_2, d_3 sînt drepte. Scrieți valoarea logică a următoarelor propoziții : a) $A \in d_1$; b) $F \in$ $\in d_2$; c) $A \in d_2$; d) $A \notin d_3$; e) $B \in d_1$; f) $B \in$ $\in d_1$; g) $B \notin d_3$; h) $C \notin d_1$; i) $D \in d_1$; j) $D \notin$ $\notin d_3$; k) $E \in d_2$; l) $E \notin d_1$; m) $F \notin d_3$; n) $F \notin d_1$.

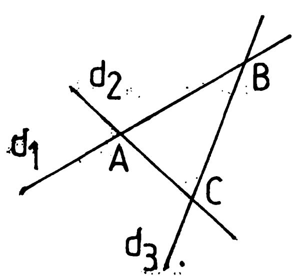
R. Notînd cu A, respectiv F, valorile logice ale propozițiilor de mai sus, avem : a) F ; b) F ; c) F ; d) A ; e) A ; f) A ; g) F ; h) F ; i) A ; j) F ; k) F ; l) A ; m) A ; n) A.

I.1.7. Se dau punctele : A, B, C, D, E, M, N și dreapta d. Precizați la care din notațiile următoare se respectă convențiile învățate : a) $A \in$ dr. AC ; b) $M \subset$ dr. AB ; c) $A = d$; d) dr. $AB = CD$; e) $d =$ dr. BE ; f) $A \in$ dr. BA ; g) dr. $AB \neq M$; h) dr. $AB =$ dr. CD ; i) dr. $AB =$ $=$ dr. AB ; j) dr. $MN =$ dr. NM ; k) dr. $AB \in M$; l) dr. $AB \subset M$; m) dr. $AB \not\subset M$; n) $M \neq d$; o) $M \neq$ dr. AB ; p) $d_1 \cap d_2 = \{A\}$.

R. Convențiile se respectă în cazurile a), e), f), h), i), j), p).

I.1.8. A și B sînt puncte iar d este o dreaptă. Este posibil ca propozițiile $A = B$, $A \notin d$, $B \in d$ să fie adevărate simultan?

R. Nu este posibil. Dacă $B \in d$ și $B = A$ ar rezulta că $A \in d$ ceea ce este imposibil (absurd), căci se spune că $A \notin d$.



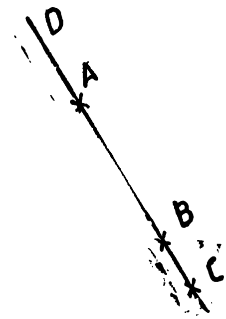
I.1.9. A, B, C sînt puncte iar d_1, d_2, d_3 sînt drepte. Realizați un desen în cazul cînd următoarele (toate) propoziții sînt adevărate : $A \neq B$, $B \neq C$, $C \neq A \in d_1$ și $A \in d_2$, $B \in d_1$ și $B \in d_3$, $C \in$ $\notin d_2$ și $C \in d_3$.

R. Cazul cînd toate propozițiile sînt adevărate este reprezentat în figură.

I.1.10. Se dau propozițiile adevărate : a) $A \in$ dr. BC ; b) $B \in$ dr. AC ; c) $C \notin$ dr. AB. Care din ele indică faptul că punctele A, B, C sînt puncte coliniare?

R. Punctele A, B, C sînt coliniare în cazurile a) și b).

I.1.11. Analizaţi desenul alăturat şi enumeraţi toate dreptele care sînt determinate.



R. Dreptele sînt: AD, AB, AC, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC.

I.1.12. Punctele D, E, F, M sînt puncte distincte (diferite) două cîte două, iar propoziţiile următoare sînt adevărate: a) $D \notin$ dr. EF; b) $E \in$ dr. DF; c) $M \in$ dr. DM; d) $F \notin$ dr. EM. Care din aceste propoziţii comunică faptul că este vorba de puncte necoliniare?

R. Punctele sînt necoliniare în propoziţiile a) şi d).

I.1.13. A, B, C sînt puncte. Cîte drepte diferite se pot scrie ştiind că $A \in$ dr. BC?

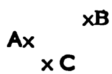
R. Se poate construi o singură dreaptă, $A \in$ dr. BC înseamnă că A, B, C sînt puncte coliniare.

I.1.14. Se dau punctele A, B şi C distincte două cîte două şi coliniare. Enumeraţi toate dreptele care se pot scrie. Cîte din aceste drepte coincid?

R. Putem forma dreptele dr. AB; dr. BA; dr. AC; dr. CA; dr. BC; dr. CB. Toate aceste drepte coincid (sînt confundate).

Observaţie. Toate dreptele ce se pot pune în evidenţă cu puncte coliniare sînt drepte confundate (drepte care coincid); se poate spune că avem o singură dreaptă scrisă în mai multe moduri.

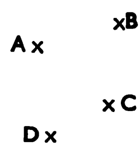
I.1.15. A, B C sînt puncte. Scrieţi dreptele diferite ce se pot forma. (vezi figura)



R. Putem forma dreptele: dr. AB, dr. BC, dr. AC.

Observaţie. Convenţia din desen ne arată că punctele A, B, C sînt necoliniare.

I.1.16^M. Analizaţi desenul alăturat şi scrieţi: a) toate perechile posibile formate din cîte două puncte; b) toate dreptele determinate de fiecare din aceste perechi de puncte; c) toate dreptele diferite.



R. Avem: $(A; A)$, $(A; B)$, $(A; C)$, $(A; D)$, $(B; A)$, $(B; B)$, $(B; C)$, $(B; D)$, $(C; A)$, $(C; B)$, $(C; C)$, $(C; D)$, $(D; A)$, $(D; B)$, $(D; C)$, $(D; D)$;

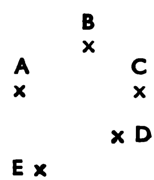
b) Avem: dr. AB, dr. AC, dr. AD, dr. BA, dr. BC, dr. BD, dr. CA, dr. CB, dr. CD, dr. DA, dr. DB, dr. DC.

Observaţie. S-a păstrat o ordine în scriere pentru a nu fi omise unele drepte.

c) dr. AB, dr. AC, dr. AD; — 3 drepte
dr. BC, dr. BD — 2 drepte
dr. CD — 1 dreaptă

Observaţie. Aşezarea respectivă permite aflarea numărului de drepte diferite şi faptul că nu se omit unele din ele.

I.1.17^PP. Enumeraţi toate dreptele diferite determinate de punctele din desenul alăturat, unde nu avem cîte trei puncte coliniare. Cîte astfel de drepte sînt?



R. Procedăm enumerîndu-le într-o anumită ordine pentru a permite numărarea comodă a lor. Astfel avem:

dr. AB, dr AC, dr. AD, dr. AE — 4 drepte

dr. BC, dr. BD, dr. BE — 3 drepte
dr. CD, dr. CE — 2 drepte
dr. DE — 1 dreaptă.
Avem în total:

$$1+2+3+4=(1+4)+(2+3)=2\cdot 5=10 \text{ (drepte)}$$

I.1.18[PO]. Enumerați toate dreptele diferite determinate de punctele A, B, C, D, E, F diferite, unde nu avem cîte trei puncte coliniare. Cîte astfel de drepte sînt?

R. Avem dreptele:
dr. AB, dr. AC, dr. AD, dr. AE, dr. AF — 5 drepte
dr. BC, dr. BD, dr. BE, dr. BF — 4 drepte
dr. CD, dr. CE, dr. CF — 3 drepte
dr. DE, dr. DF — 2 drepte
dr. EF — 1 dreaptă.

Rezultă în total $5+4+3+2+1$ drepte, adică $(1+5)+(2+4)+3=6+6+3$; deci 15 drepte.

Comentariu. În această problemă cele 6 puncte au determinat 15 drepte. Dacă s-ar da 7 puncte, după ce le enumerăm, constatăm că avem $6+5+4+3+2+1$ drepte. Această adunare se poate efectua, după cum s-a văzut mai sus astfel: $(6+1)+(5+2)+(4+3)=$ $=3\cdot 7=21$.

Asemănător, dacă s-ar da 8 puncte, vom avea $7+6+5+4+3+2+1$ adică $(7+1)+(6+2)+(5+3)+4$ sau, $3\cdot 8+4$ deci 28 drepte.

În cazul cînd s-ar da 9 puncte, vom avea $8+7+6+\ldots+3+2+1$ adică $(8+1)+$ $+(7+2)+(6+3)+(5+4)=4\cdot 9$; deci 36 drepte.

Observație. Dacă sînt 6 puncte suma începe cu 5; dacă sînt 7 puncte suma începe cu 6; dacă sînt 8 puncte suma începe cu 7; dacă sînt 9 puncte suma începe cu 8. Așa se va întîmpla cînd vor fi date 10 puncte: suma va începe cu 9. Dar dacă ar fi 21 de puncte? Suma va începe cu 20. Vom avea:

$20+19+18+\ldots+3+2+1=(20+1)+(19+2)+(18+3)+\ldots+(13+$ $+8)+(12+9)+(11+10)$.

Se observă că sînt 10 paranteze deci $21\cdot 10$ adică 210 drepte diferite.

Acest procedeu ne permite să calculăm mai comod suma tuturor numerelor naturale pînă la un număr natural dat.

Așa se poate calcula, de exemplu, suma $1+2+3+4+\ldots+197+198+199+$ $+200$, adică $(1+200)+(2+199)+\ldots+(100+101)=100\cdot 201$, pentru că sînt 100 de paranteze.

În cazul cînd avem, de exemplu, $1+2+3+\ldots+198+199+200+201$, adică primele 201 numere naturale diferite de zero, scriem:

$$(1+201)+(2+200)+\ldots+(99+103)+(100+102)+101$$

deci $100\cdot 202+101$, pentru că sînt tot 100 de paranteze dar mai este numărul „de la mijloc" 101.

Așadar trebuie să fim atenți în cazul în care se adună un număr impar de numere. Pentru a înlătura acest incovenient putem, (folosind o altă scriere), proceda astfel:

$$(1+2+3+\ldots+199+200+201)+(201+200+199+\ldots+2+1)=2S$$

unde am notat cu S suma ce o avem de calculat. ($S=1+2+3+\ldots+200+201$). Avem:

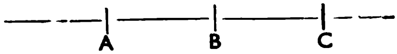
$$(1+201)+(2+200)+\ldots+(199+3)+(200+2)+(201+1)=2S$$

Cum sînt 201 de paranteze putem scrie:

$$2S=201\cdot 202, \text{ deci } S=201\cdot\frac{202}{2}=201\cdot 101, \text{ sau, mai general, } S=n\cdot\frac{n+1}{2}.$$

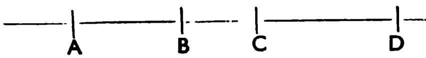
I.1.19. A, B, C sînt puncte distincte două cîte două. Ce puteți spune despre punctele A, B, C dacă dr. AB coincide cu dr. BC? Realizați un desen.

R. Punctele sînt coliniare, ca în figură.

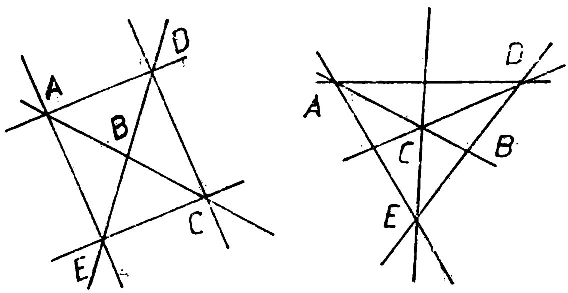


I.1.20. A, B, C, D sînt puncte diferite (distincte) două cîte două. Ce puteți spune despre aceste puncte dacă dr. AB și dr. CD coincid? Realizați și un desen.

R. Punctele A, B, C, D sînt coliniare, ca în figură:



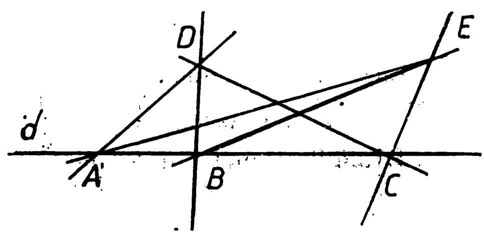
I.1.21. A, B, C, D și E sînt puncte distincte (diferite) două cîte două. Din acestea, două triplete formează puncte coliniare: A, B, C și B, E, D. Enumerați toate dreptele distincte ce se pot determina cu aceste puncte.



R. Se formează dreptele: dr. AD, dr. AE, dr. AB, dr. BD, dr. DC, dr. CE.

Observație. Avem: dr. AB = dr. BC = dr. AC pentru că punctele A, B, C sînt coliniare; deasemenea sînt confundate dreptele BD, BE și DE căci punctele B, E, D sînt coliniare.

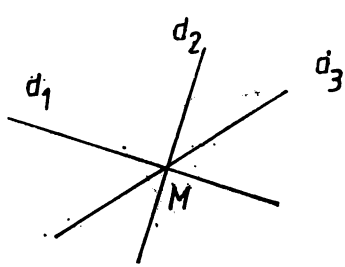
I.1.22. Punctele A, B și C sînt diferite două cîte două și aparțin dreptei d iar D și E nu aparțin dreptei d și nu sînt coliniare nici cu A, nici cu B și nici cu C. Puneți în evidență într-un desen dreptele care sînt determinate.



R. Vezi figura:

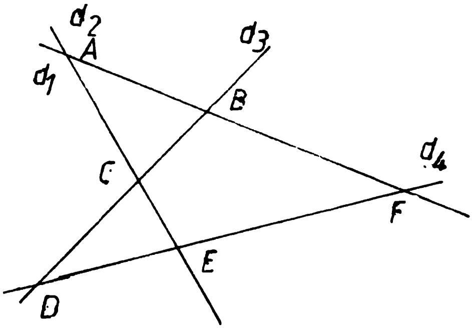
I.1.23. Puneți în evidență într-un desen trei drepte concurente într-un singur punct M.

Folosiți notațiile învățate. Mai există și alte drepte concurente în M?



R. Figura alăturată este un exemplu de concurență într-un punct a 3 drepte. Există o infinitate de drepte ce conțin un același punct.

I.1.24. În desenul alăturat d_1, d_2, d_3, d_4 sînt drepte, unele dintre ele sînt drepte concurente. Enumerați aceste perechi de drepte concurente și punctele lor de intersecție.



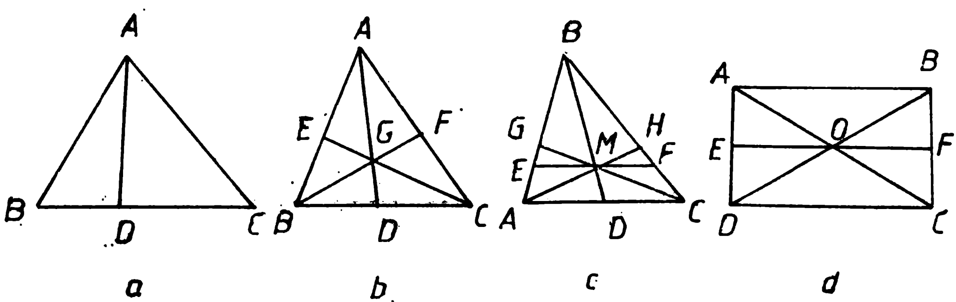
R. Avem cazurile : d_1 concurentă cu d_2 în A ; d_1 concurentă cu d_3 în B ; d_1 concurentă cu d_4 în F ; d_2 concurentă cu d_3 în C ; d_2 concurentă cu d_4 în E ; d_3 concurentă cu d_4 în D.

Observație. Desigur că mai sînt perechi de drepte concurente, de exemplu : d_2 concurentă cu d_1 în A, dar o considerăm enumerată mai sus.

Deci, dacă afirmația „d_1 este concurentă cu d_2" este adevărată, atunci și afirmația „d_2 este concurentă cu d_1" este adevărată.

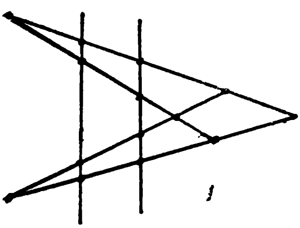
I.1.25. Analizați fiecare din desenele alăturate și enumerați : punctele unde s-au pus în evidență numai cîte trei drepte concurente; punctele unde nu sînt puse în evidență numai cîte trei drepte concurente.

R. Sînt puse în evidență numai cîte trei drepte concurente astfel : la desenul a) în punctul A ; la desenul b) în punctele A, B, C, G ; la desenul c) în punctele A, B, C ; la desenul d) în punctele A, B, C, D, O. Doar la desenul c) avem punctul M unde s-au pus în evidență

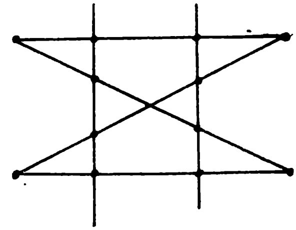


numai patru drepte concurente. Punctele unde nu s-au pus în evidență numai cîte trei drepte concurente : la desenul a) sînt B, D, C ; la desenul b) sînt E, D, F ; la desenul c) sînt G, E, D, F, H, M ; la desenul d) sînt E, F.

I.1.26^PO. Puneți în evidență într-un desen 12 puncte, astfel încît ele să aparțină cîte 4 puncte unei drepte și să avem numai șase drepte.



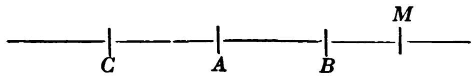
c)



d)

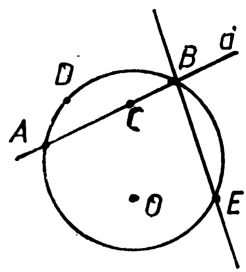
R. Un desen la întîmplare nu poate fi cel din figura a); poate fi cel din figura b).
Dacă impunem ca figura formată să fie simetrică putem să considerăm figura c) sau figura d).

I.1.27. Folosiţi desenul alăturat şi precizaţi valoarea logică (de adevăr) a propoziţiilor următoare: a) $A \in (BC$; b) $C \notin [BC$; c) $B \in [BC$; d) $C \notin (AC$; e) $B \in (AM$; f) $M \notin (AB$; g) $A \in (BM$; h) $B \in (BC$.

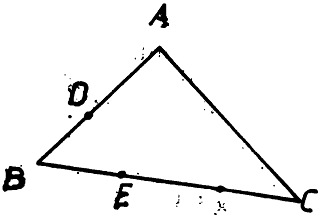


R. Propoziţiile adevărate sînt a); c); e); iar cele false b); d); f); g); h).

I.1.28. Folosind desenul alăturat scrieţi valoarea logică a următoarelor propoziţii: a) $A \in$ dr. DB; b) $B \in$ dr. OB; c) $D \in$ dr. AB; d) $C \in (BA$; e) $A \notin (AO$; f) $O \in$ dr. AE; g) $d =$ dr. AC; h) $d \neq$ dr. BD; i) $(AB$ şi $(AC$ sînt semidrepte opuse; j) $(CB$ şi $(CA$ sînt semidrepte opuse; k) $B \in [EB$; l) $B \in (BE$.



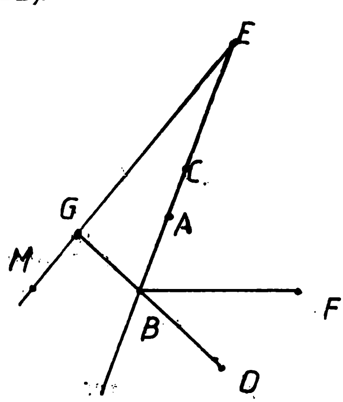
R. Notînd cu *A* valoarea logică a unei propoziţii adevărate şi cu *F* cea a uneia false, avem: a) *F*; b) *A*; c) *F*; d) *A*; e) *A*; f) nu se poate spune că este adevărată sau că este falsă; este o propoziţie adevărată dacă punctele *A*, *O* şi *E* sînt coliniare; g) *A*; h) *A*; i) *F*; j) *A*; k) *A*; l) *F*.



I.1.29. Analizaţi desenul indicat şi scrieţi toate segmentele deschise, diferite, ce se pot pune în evidenţă, folosind punctele *A*, *B*, *C*, *D*, *E*.

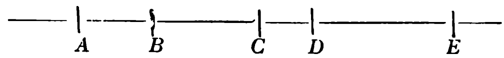
R. Avem segmentele (AD), (AB), (AE), (AC), (BD), (BE), (BC), (CD), (CE), (ED).

I.1.30. Scrieţi, folosind desenul alăturat, valoarea logică a propoziţiilor următoare: a) $A \in (BC)$; b) $B \in (BD)$; c) $B \in [GD]$; d) $C \in [AE]$; e) $B \in (GF)$; f) $M \in (GE)$; g) $G \notin (MG)$; h) $F \in [BF]$.



R. Avem: a) *A*; b) *F*; c) A; d) A; e) *F*; f) *F*; g) A; h) A.

I.1.31. Folosind figura alăturată răspundeți la următoarele întrebări: a) Care sînt punctele comune semidreptelor $(BA$ și $(DA$? b) Care sînt punctele comune semidreptelor $(CD$ și $(CA$? c) Care sînt punctele comune semidreptelor $[DB$ și $[DE$? d) Care sînt punctele comune semidreptelor



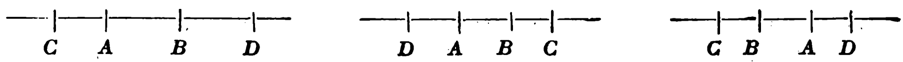
$(BD$ și $(DA$? e) Care sînt punctele comune semidreptelor $(AB$ și $[AD$? f) Dar punctele comune semidreptelor $(DB$ și $(AE$?

R. Avem: a) $(BA \cap (DA = (BA$; b) $(CD \cap (CA = \Phi$; $[DB \cap [DE = \{D\}$; d) $(BD \cap (DA = (BD)$; e) $(AB \cap [AD = (AB$; f) $(DB \cap (AE = (AD)$.

I.1.32. Desenați patru puncte A, B, C, D coliniare, distincte două cîte două astfel încît: a) orice punct interior lui (AB) să fie interior și lui (CD); b) nici un punct interior lui (AB) să nu fie interior lui (CD); c) (AB) și (CD) să aibă puncte interioare comune, dar nici unul din ele să nu aibă mulțimea de puncte interioare ale sale inclusă (conținută) în mulțimea de puncte interioare ale celuilalt.

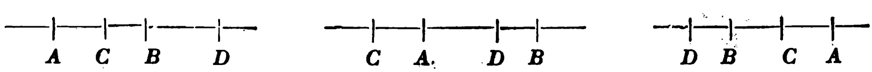
R. Sînt mai multe situații în fiecare caz, ca de exemplu:

a)



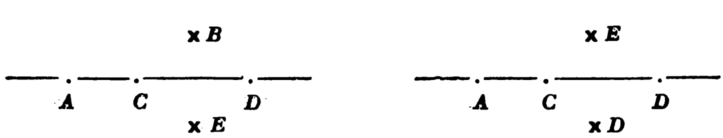
b)

c)

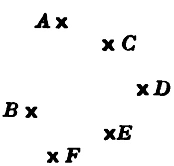


I.1.33. A, B, C, D, E **sînt puncte diferite (distincte) două cîte două. Se știe că** A, C **și** D **sînt puncte coliniare. Realizați un desen în așa fel încît** B **și** E **să fie în semiplane diferite determinate de dreapta** AC.

R. Distingem cazurile:

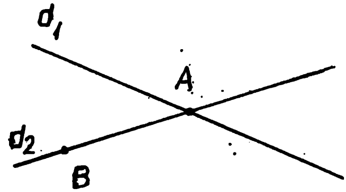


I.1.34. În figura alăturată enumerați: a) Punctele ce se află de aceeași parte a dr. AB; **b) Punctele ce se află de aceeași parte a dr.** BD; **c) Punctele care sînt de aceeași parte a dreptei** AE **ca și** C; **d) Punctele ce aparțin semiplanului deschis determinat de dr.** CE **și** B. **e) Punctele ce se află în semiplanul opus lui** $(dE$, **unde** d = **dr.** FC.



R. Avem: a) C, F, E, D; **b)** A, C **de o parte și** E, F **de cealaltă parte; c)** D; **d)** A, F, B; **c)** A, B.

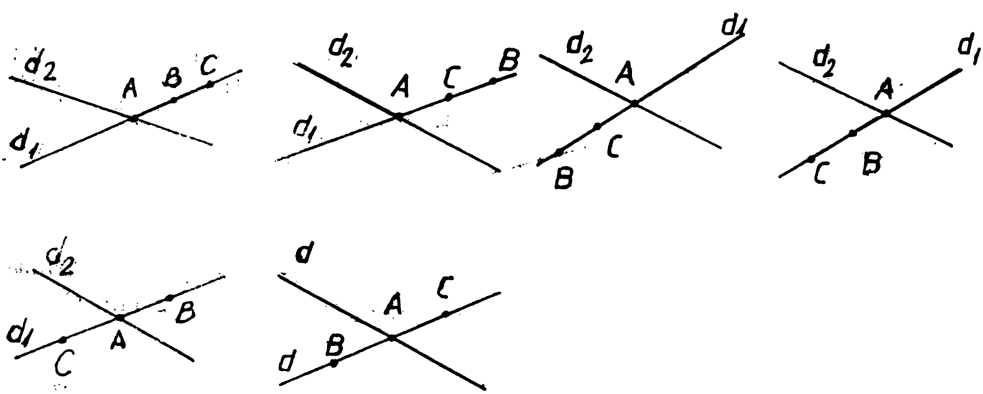
I.1.35. Se dau două drepte d_1 şi d_2 concurente în punctul A şi $B \in d_2$, $A \neq B$. Indicaţi ce mulţime de puncte este $[d_1B \cap d_2$. Folosiţi-vă de un desen.



R. Mulţimea de puncte este $[d_1B \cap d_2 = [AB$.

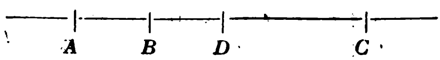
I.1.36. d_1 şi d_2 sînt drepte concurente în A, iar B şi C aparţin dreptei d_1 şi sînt distincte între ele şi nu sînt confundate cu A. Punctele B şi C sînt, în acest caz în acelaşi semiplan determinat de dreapta d_2?

R. Dreapta d_2 determină două semiplane. După informaţiile din problemă, punctele B şi C pot fi numai într-un semiplan, dar poate fi unul într-un semiplan iar celălalt în semiplanul opus. Situaţiile se prezintă astfel:



I.1.37. Folosiţi rigla gradată şi măsuraţi toate segmentele ce se pot pune în evidenţă în desenul alăturat.

Scrieţi măsurile lor, folosind unitatea de măsură milimetrul.



I.1.38. Se dau: $AB = 10$ cm, $CB = 20$ cm, $MN = 10$ cm, $PD = 20$ cm, $AL = 15$ cm, $ST = 21$ cm, $OL = 10$ cm, $TM = 2$ dm, $UL = 3$ dm, $LT = 100$ mm, $RB = 25$ cm, $UR = 1{,}5$ dm. Enumeraţi segmentele congruente între ele.

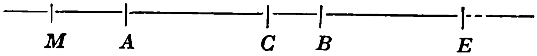
R. Segmentele congruente între ele sînt date de relaţiile: $(AB) \equiv (MN) \equiv (OL) \equiv (LT)$; $(CB) \equiv (PD) \equiv (TM)$; $(AL) \equiv (UR)$.

I.1.39. Se dau segmentele (AB) şi (CD) unde $AB = 5$ cm şi $CD = 4$ cm. Folosiţi rigla gradată şi desenaţi (construiţi) cîte două segmente congruente cu segmentele date. Notaţi apoi segmentele construite.

I.1.40. Găsiţi valoarea logică a următoarelor propoziţii: a) Dacă două segmente sînt egale atunci ele sînt segmente congruente; b) Dacă două segmente sînt congruente atunci ele sînt segmente egale.

R. Avem : a) Adevărată. Două segmente egale au aceeaşi lungime (măsură) deci sînt congruente. b) Falsă, căci două segmente congruente, adică cu aceeaşi lungime, nu sînt neapărat egale.

I.1.41. În desenul alăturat avem :



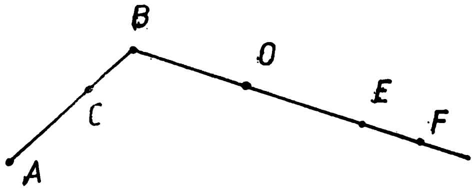
$MA = 1{,}5$ cm; $AC = 3$ cm; $CB = 0{,}5$ cm; $BE = 2$ cm.

Determinaţi lungimile segmentelor : (MC); (AE); (CE); (ME).

R. Avem :

$MC = MA + AC = 1{,}5 \text{ cm} + 3 \text{ cm} = 4{,}5$ cm; $AE = 5{,}5$ cm; $CE = 2{,}5$ cm; $ME = 7$ cm.

I.1.42. În desenul alăturat avem :

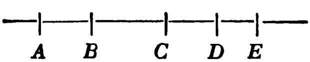


$AB = 5$ cm, $CB = 2$ cm, $BE = 6$ cm, $OF = 8$ cm, $BO = 3$ cm. Determinaţi măsurile segmentelor: (AC); (OE); (BF); (EF).

R. Avem : $AC = AB - CB = 5 - 2 = 3$ (cm); $OE = BE - BO = 6 - 3 = 3$ (cm); $BF = BO + OF = 3 \text{ cm} + 8 \text{ cm} = 11$ cm; $EF = OF - OE = 8 - 3 = 5$ (cm); $EF = BF - BE = 11 - 6 = 5$.

I.1.43. Folosiţi rigla gradată pentru a realiza un desen ştiind că următoarele propoziţii sînt adevărate : $A \in d$, $B \in d$, $C \in d$, $AB = 2$ cm, $CB = 3$ cm, $AC = 5$ cm.

I.1.44. Analizaţi desenul alăturat şi decideţi valoarea logică a propoziţiilor :

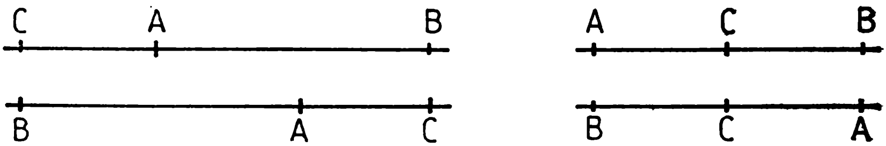


a) B este între A şi C; b) B este între C şi A; c) C este între A şi B; d) C este între B şi A; e) D este între B şi E; f) D este între E şi A; g) C este între E şi B; h) E este între E şi D; i) B este între D şi A; j) D este între E şi B.

R. Valorile logice ale propoziţiilor sînt : a) A; b) A; c) F; d) F; e) A; f) A; g) A; h) F; i) A; j) A.

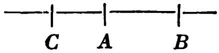
I.1.45. Realizaţi un desen cu punctele A, B, C coliniare iar $AB = 4$ cm şi $AC = 2$ cm.

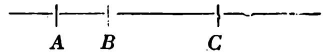
R. Distingem mai multe situaţii :



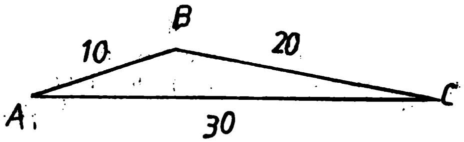
I.1.46. A, B, C sînt puncte coliniare. Se știe că $AB = 3$ cm și $BC = 6$ cm. Calculați măsura segmentului (AC).

R. Răspunsul nu este unic. Analizați următoarele figuri:





În cazul cînd B este între A și C avem $AC = AB + BC = 3 + 6 = 9$ (cm). În cazul cînd A este între C și B avem $AC = BC - AB = 6 - 3 = 3$ (cm).

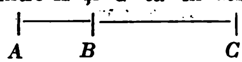


I.1.47. Este corect desenul alăturat?

R. Desenul nu este corect deoarece $AB + BC = 30 = AC$. Folosind măsurile respective, se constată că B trebuie să aparțină lui (AC).

I.1.48. Sînt date punctele A, B, C distincte două cîte două. a) În ce caz avem $AB + BC = AC$? Realizați un desen; b) În ce caz avem $AC + BC = AB$?

R. a) Punctele A, B, C sînt coliniare și punctul B este între A și C ca în desenul alăturat.



b) Punctele A, B, C sînt coliniare și punctul C este între A și B.

I.1.49.[PO]. A, B, C, D, E sînt puncte diferite și coliniare. Se dau: $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $CD = 5$ cm, $DE = 6$ cm. Cercetați:

a) Dacă $AC = 7$ cm, atunci $B \in (AC)$.

b) Dacă $BD = 9$ cm, atunci $C \in (BD)$;

c) Dacă $CE = 11$ cm, atunci D este între C și E.

R. a) Deoarece $AB + BC = AC$, adică 3 cm + 4 cm = 7 cm, rezultă că B este între A și C, deci $B \in (AC)$.

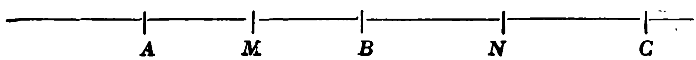
b) Pentru ca $C \in (BD)$ trebuie să avem $BC + CD = BD$. Avem: $BC = 4$ cm, $CD = 5$ cm și $BD = 9$ cm. Deci propoziția este adevărată.

c) Avem: $CD = 5$ cm, $DE = 6$ cm, $CD + DE = 5$ cm + 6 cm = 11 cm = CE deci $D \in (CE)$, deci D este între C și E.

I.1.50. Se dau următoarele măsuri de segmente: $AB = 8$ cm; $CD = 6$ cm; $EF = 2$ cm; $GH = 5$ cm; $MN = 40$ mm; $PS = 1$ dm; $QT = 0{,}07$ m. Desenați segmentele respective și apoi, cu rigla, găsiți mijloacele lor.

I.1.51. Pe o dreaptă avem punctele A, B, C în această ordine. Notăm cu M și N mijloacele segmentelor AB și BC. Aflați măsura lui (MN) știind că: a) $AB = 8$ cm, $BC = 10$ cm; b) $AB = 20$ cm; $BC = 4$ dm; c) $AB = 6$ cm; $BC = 4$ cm; d) $AB = 120$ cm; $BC = 90$ cm; e) $AB = 60$ mm; $AC = 8$ cm; f) $AC = 14$ cm; $BC = 6$ cm.

R. Ne vom folosi de următorul desen pentru a fi mai ușor la raționament:



Avem :

a) $MB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$ (cm), $BN = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$ (cm). Ordinea este M, B, N, dci :

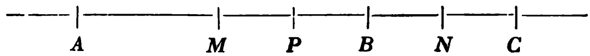
$$MN = MB + BN = 4 + 5 = 9 \text{ (cm)};$$

b) $MB = \dfrac{20}{2} = 10$ (cm), $BN = \dfrac{4}{2} = 2$ (dm) $= 20$ (cm), $MN = 10 + 20 = 30$ (cm);

c) 5 cm ; d) 105 cm ; e) Aflăm $BC = AC - AB = 8$ cm $- 60$ mm $= 8$ cm $- 6$ cm $= 2$ cm, deci $MN = 3$ cm $+ 1$ cm $= 4$ cm ; d) 7 cm.

I.1.52. Pe o dreaptă avem punctele A, B şi C astfel încît $AB = 6$ cm, $BC = 2$ cm şi $AC = 8$ cm. a) Aflaţi distanţa dintre mijloacele segmentelor (AB) şi (BC) precum şi distanţa dintre mijloacele segmentelor (AC) şi (AB). b) Acelaşi cerinţe în cazul cînd $AB = 8$ cm, $BC = 4$ cm şi $AC = 12$ cm.

R. a) Notăm cu M, N şi P mijloacele segmentelor (AB), (BC) şi respectiv (AC).



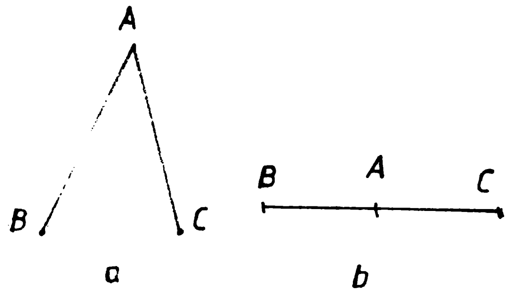
Avem : $MB = 3$ cm, $BN = 1$ cm, deci $MN = MB + BN = 3$ cm $+ 1$ cm $= 4$ cm. Apoi, $AP = 4$ cm şi $AM = 3$ cm, iar $MP = AP - AM = 4$ cm $- 3$ cm $= 1$ cm. b) $MN = 6$ cm; $MP = 2$ cm.

I.1.53. Un segment (AB) are măsura de 10 cm. Un elev a afirmat că mijlocul acestui segment este de 5 cm. Ce a greşit el?

R. Mijlocul unui segment este un punct, ce aparţine interiorului segmentului şi care împarte segmentul în două segmente congruente. În cazul nostru, unul din segmentele formate are măsura de 5 cm şi nu mijlocul.

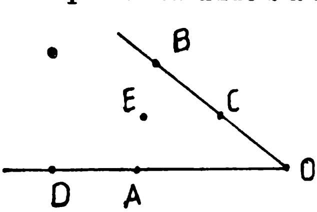
I.1.54. Se ştie că $(AB) \equiv (AC)$. În ce situaţie punctul A este mijloc pentru (BC)?

R. Dacă ar fi numai condiţia $(AB) \equiv (AC)$ am putea avea situaţia ilustrată în figura alăturată a)
În cazul cînd avem condiţia suplimentară, ca punctul A să fie mijloc pentru (BC), este necesar ca punctele A, B, C să fie coliniare ca în situaţia din desenul b).

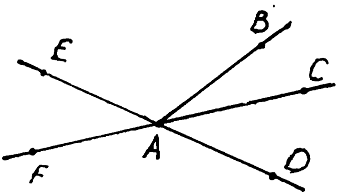


a b

I.1.55. Folosind desenul alăturat, enumeraţi dintre situaţiile următoare pe acelea unde s-a folosit convenţia corectă pentru scrierea unghiului respectiv : a) $\sphericalangle AOC$; b) $\sphericalangle EBC$; c) $\sphericalangle DOB$; d) $\sphericalangle AOA$; e) $\sphericalangle EOD$; f) $\sphericalangle OAC$; g) $\sphericalangle OCA$; h) $\sphericalangle ACO$; i) $\sphericalangle DEO$; j) $\sphericalangle BOD$; k) $\sphericalangle DOC$; l) $\sphericalangle O$; m) $\sphericalangle B$.



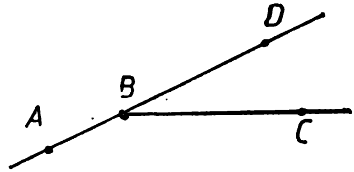
R. Convenţia corectă s-a folosit în cazurile a) ; c) ; j) ; k) ; l).



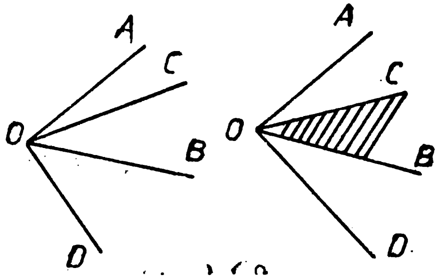
I.1.56. Enumeraţi unghiurile proprii diferite puse în evidenţă în figura alăturată. (dr. *ED* şi dr. *FC* sînt concurente).

R. Avem unghiurile : $\sphericalangle FAE$; $\sphericalangle FAB$; $\sphericalangle FAD$; $\sphericalangle EAB$; $\sphericalangle EAC$; $\sphericalangle BAC$; $\sphericalangle BAD$; $\sphericalangle CAD$.

I.1.57. În desenul alăturat care din semidrepte formează unghi diferit de unghiul nul?



R. Perechile de semidrepte sînt (BA şi (BC, (BD şi (BC, (BA şi (BD.

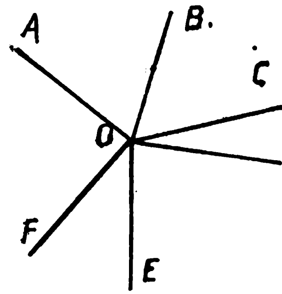


I.1.58. Folosiţi desenul alăturat şi haşuraţi intersecţia interioarelor unghiurilor *AOB* şi *COD*.

R. *AOB* şi *COD*.

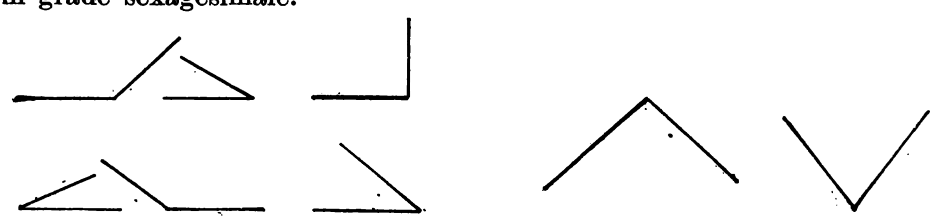
I.1.59. Folosiţi desenul alăturat şi găsiţi valoarea logică a următoarelor propoziţii :

a) (OB este inclusă în interiorul $\sphericalangle AOC$; b) (OD este inclusă în interiorul $\sphericalangle DOB$; c) Interiorul $\sphericalangle EOD$ este inclus în interiorul $\sphericalangle FOC$; d) (OF este inclusă în interiorul $\sphericalangle AOE$; e) Interiorul $\sphericalangle EOD$ este intersecţia interiorului $\sphericalangle FOE$ şi interiorului $\sphericalangle EOC$; f) interiorul $\sphericalangle FOA$ reunit cu interiorul $\sphericalangle AOB$ este interiorul $\sphericalangle FOB$; g) interiorul $\sphericalangle AOC$ reunit cu interiorul unghiului COF este interiorul $\sphericalangle AOF$; h) (OA şi (OF sînt semidrepte opuse (în prelungire); i) [OB este inclusă în interiorul $\sphericalangle AOE$.



R. Valorle de adevăr ale propoziţiile sînt a) *A*; b) *F*; c) *A*; d) *A*; e) *F*; f) *A*; g) *F*; h) *F*; i) *F*.

I.1.60. În desenul alăturat aveţi puse în evidenţă mai multe unghiuri în diferite „poziţii". Folosiţi raportul şi găsiţi măsura lor (aproximativă) în grade sexagesimale.



I.1.61. Transformaţi în minute : a) 15° ; b) 25° ; c) 30° ; d) 90° ; e) 60° ; f) 100° ; g) 120″ ; h) 360″ ; i) 428″ ; j) 315″ ; k) 140″ ; l) 3425″ ; m) 15240″.

R. Avem : a) $15° = 15 \cdot 60' = 800'$; b) $25° = 25 \cdot 60' = 1500'$; c) 1800′ ; d) 5400′ ; e) 3600′ ; f) 6000′ ; g) 120 : 60 = 2 ;deci 120″ = 2′ ; h) 360 : 60 = 6 deci 360″ = 6′ ; i) 428 : 60 ≂ 7 deci 428″ = 7′8″ j) 315 : 60 ≂ 5 deci 315″ = 5′15″ ; k) 2′20 ; l) 57′5″ ; m) 254′

I.1.62. Transformaţi în grade, minute şi secunde : a) 3605″, b) 17248″ ; c) 1245′80″ ; d) 1435″ ; e) 5109′120″ ; f) 42005′.

R. Avem : a) 3605 : 60 ≂ 60, deci 3605″ = 60′5″ = 1°5″ ; b) 17248 : 60 ≂ 287, deci 17248″ = 287′28″ ; 287 : 60 ≂ 4, deci 287′ = 4°47′ Aşadar : 17248″ = 4°47′28″ ; c) 1245 : 60 ≂ 20, deci 1245′ = 20°45, 80 : 60 ≂ 1, deci 80″ = 1′20′ Aşadar : 1245′80″ = 20°45′ + 1′20′ = = 20′46′20″ d) 23′55″ ; e) 85°11′ ; f) 11°40′5″

I.1.63. Se ştie că : $\sphericalangle AOB = 30°$; $\sphericalangle AOC = 45°$; $\sphericalangle BOD = 60°$; $\sphericalangle BOC = 45°$; $\sphericalangle COE = 55°1'$; $\sphericalangle EOA = 30°$; $\sphericalangle FOE = 30°$; $\sphericalangle EOL = 180°$; $\sphericalangle LOM = 55°1''$; $\sphericalangle NOL = 179°60'$; $\sphericalangle MON = 75°$; $\sphericalangle NOP = 29°$; $\sphericalangle POT = 0°$; $\sphericalangle DOB = 60°$; $\sphericalangle XOY = 180°$; $\sphericalangle AOM = 180°$:4 Scrieţi toate unghiurile congruente între ele.

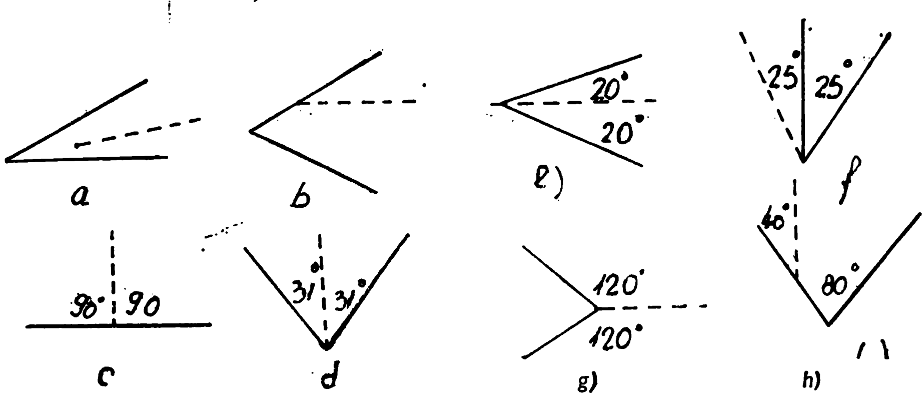
R $AOB \equiv \sphericalangle EOA \equiv \sphericalangle FOE$; $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOC \equiv \sphericalangle AOM$; $\sphericalangle EOL \equiv \sphericalangle NOL \equiv XOY$; $\sphericalangle BOD \equiv \sphericalangle DOB$.

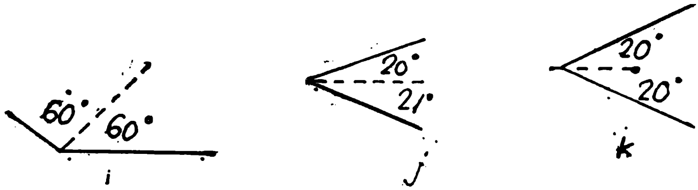
I.1.64. Cu ajutorul raportorului construiţi (desenaţi) 4 unghiuri diferite, congruente între ele cu un unghi care are măsura de 90°.

I.1.65. Găsiţi valoarea logică a următoarelor afirmaţii : a) Dacă două unghiuri sînt unghiuri egale atunci ele sînt unghiuri congruente ; b) Dacă două unghiuri sînt unghiuri congruente atunci sînt unghiuri egale.

R. Două unghiuri egale sînt două unghiuri cu aceleaşi semidrepte şi cu acelaşi vîrf. Ele au aceeaşi măsură deci sînt congruente şi deci afirmaţia este adevărată ; b) Două unghiuri congruente sînt două unghiuri cu aceaşi măsură dar nu sînt egale. Ele pot avea chiar acelaşi vîrf dar pot fi formate din semidrepte diferite. Exemplu : $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle BOC$, $\sphericalangle AOB$ este format din (OA şi (OB, iar $\sphericalangle BOC$ din (OB şi (OC. Aşadar afirmaţia este falsă.

I.1.66. Analizaţi următoarele desene :





În care dintre ele, semidreapta pusă în evidență punctat, este bisectoare?

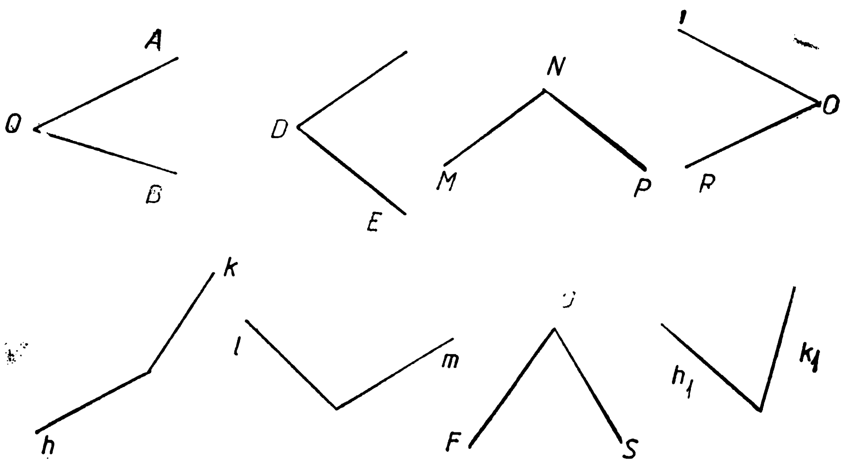
R. **Semidreapta punctată este bisectoare în cazurile c, d, i.**

I.1.67. Se dau unghiurile cu măsurile lor respective astfel: a) $\sphericalangle BOC = 60°$; b) $\sphericalangle AOC = 30°$; c) $\sphericalangle MON = 90°40'$; d) $\sphericalangle BOL = 135°25'40''$; e) $\sphericalangle B'OC' = 80°$; f) $\sphericalangle A'OC' = 90°$; g) $\sphericalangle M'O'N' = 100°$; h) $\sphericalangle MPN = 120°$; i) $\sphericalangle LOC = 180°$; j) $\sphericalangle LOT = 45°$.

Calculați măsurile unghiurilor determinate de bisectoarea fiecărui unghi dat.

R. Avem: a) $60° : 2 = 30°$; b) $30° : 2 = 15°$; c) $90°40' : 2 = 45°20'$; d) $135° : 2 = 67°30'$, $25' : 2 = 12'30''$; $40'' : 2 = 20''$, deci:
$135°25'40'' : 2 = 67°30' + 12'30'' + 20'' = 67°42'50''$;
e) $80° : 2 = 40°$; f) $90° : 2 = 45°$; g) $100° : 2 = 50°$; h) $120° : 2 = 60°$; i) $180° : 2 = 90°$; j) $45° : 2 = 22°30'$.

I.1.68. Folosiți echerul și spuneți care dintre unghiurile desenate alăturat, pot fi unghiuri ascuțite și care obtuze.

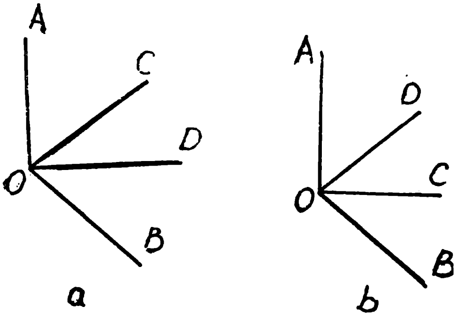


R. Unghiurile ascuțite sînt: $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle CDE$, $\sphericalangle TOR$, $\sphericalangle SOF$, $\sphericalangle (h_1, k_1)$, iar unghiurile obtuze sînt: $\sphericalangle MNP$, $\sphericalangle (h; k)$, $\sphericalangle (l; m)$.

I.1.69. Două semidrepte cu originea în vîrful unui unghi incluse în interiorul lui în așa fel încît să formeze trei unghiuri congruente se numesc trisectoare.

Desenaţi un unghi şi trisectoarele lui, apoi calculaţi măsura unghiurilor formate de trisectoarele unui unghi în cazul cînd măsura lui are: a) $36°12'$; b) $71°4'15''$; c) $114°25'30''$; d) $90°$; e) $60°$; f) $120°$; g) $180°$; h) $150°59'30''$.

R. Avem : a) $36°12' : 3 = 12°4'$; b) $71°4'15'' : 3 = 23°41'25''$; c) $114°25'30'' : 3 = 38°8'30''$ d) $30°$; e) $20°$; f) $40°$; g) $60°$; h) $50°19'50''$.

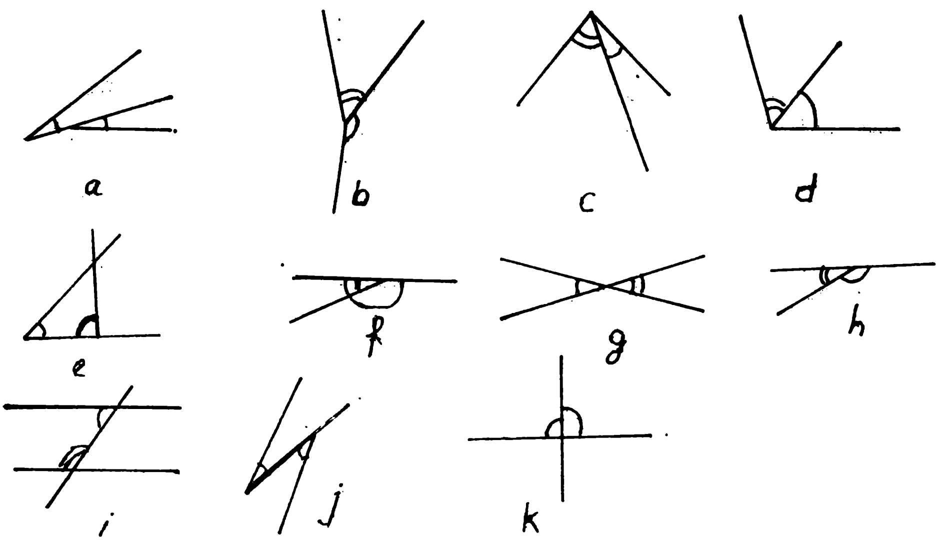


I.1.70. Se dă unghiul AOB. $[OC$ şi $[OD$ sînt trisectoarele lui. Ce rol joacă $[OC$ pentru $\sphericalangle AOD$? Dar $[OD$ pentru $\sphericalangle COB$?

R. Avem două situaţii, ca în figură: În cazul a), $[OC$ este bisectoarea unghiului AOD; $[OD$ este bisectoarea unghiului COB.

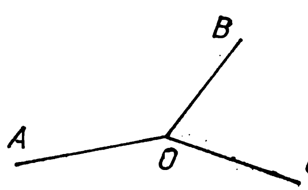
În cazul b), $[OC$ este o semidreaptă în exteriorul unghiului AOD; deasemenea $[OD$ este semidreaptă în exteriorul unghiului COB.

I.1.71. Care din situaţiile din desenul alăturat indică faptul că sînt puse în evidenţă două unghiuri adiacente?



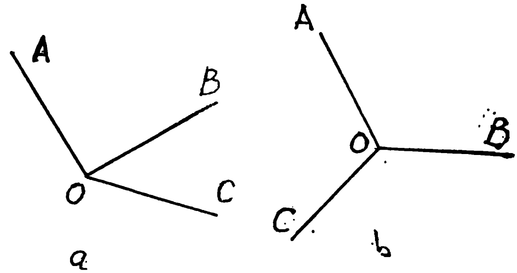
R. Două unghiuri adiacente se disting în cazurile b, c, d, h, k.

I.1.72. Trei semidrepte $(OA$, $(OB$, $(OC$ sînt ca în desenul alăturat. Enumeraţi unghiurile adiacente ce se formează.



R. Unghiurile adiacente sînt $\widehat{AOB}$ şi $\widehat{BOC}$; $\widehat{BOC}$ şi $\widehat{COA}$; $\widehat{COA}$ şi $\widehat{AOB}$.

I.1.73. Unghiurile AOB şi BOC sînt unghiuri adiacente. Cercetaţi dacă $[OB$ este în interiorul unghiului AOC în cazul cînd suma măsurilor lor este: a) 170°; b) 230°; c) 150°; d) 290°; e) 300°; f) 50°.



R. a) În situaţia cînd suma măsurilor celor două unghiuri adiacente este mai mică ca 180°, $[OB$ este în interiorul lui $\widehat{AOC}$ (vezi figura); b) În situaţia cînd suma măsurilor celor două unghiuri adiacente este cuprinsă între 180° şi 360°, $[OB$ nu este inclusă în interiorul lui $\widehat{AOC}$; c) $[OB$ este în interiorul lui $\widehat{AOC}$; d) nu; e) nu; f) da.

I.1.74. Cercetaţi dacă sînt perechi de măsuri (în grade) de unghiuri suplementare, următoarele perechi de numere: a) 45 şi 134; b) 120 şi 60; c) 45 şi 135; d) 30 şi 150; e) 20 şi 140; f) 70 şi 110; g) 100 şi 80; h) 100 şi 100; i) 1 şi 189.

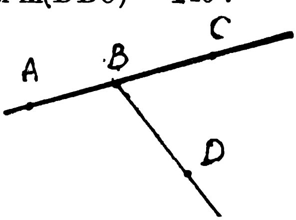
R. a) Două unghiuri la care suma măsurilor lor (în grade) este 180 se numesc unghiuri suplementare. În cazul nostru: $45 + 134 = 179 \neq 180$, deci nu avem unghiuri suplementare; b) Deoarece $120 + 60 = 180$, unghiurile sînt suplementare; c) da; d) da; e) nu; f) da; g) da; h) nu; i) nu.

I.1.75. Calculaţi măsura suplementului unghiului AOB ştiind că măsura lui $\widehat{AOB}$ este: a) 117°; b) 48°30′; c) 120°; d) 60°; e) 30°; f) 150°; g) 100°; h) 10°; i) 80°; j) 90°; k) 59°45′; l) 2°48′35″; m) 179°35′14″.

R. a) Suplementul unui unghi AOB este un alt unghi la care măsura se găseşte calculînd diferenţa dintre 180° şi măsura lui $\widehat{AOB}$. Deci, suplementul unghiului cu măsura de 117° are măsura de 180° − 117°, adică de 63°. b) 180° − 48°30′ = 179°60′ − 48°30′ = 131°30′; c) 60°; d) 120°; e) 150°; f) 30°; g) 80°; h) 170°; i) 100°; j) 90°; k) 120°15′; l) 177°11′25″; m) 24′46″.

I.1.76[PO]. Punctele A, B, D sînt necoliniare, iar punctul C aparţine semiplanului determinat de dr. BD în aşa fel încît A nu aparţine acestui semiplan.

Justificaţi dacă punctele A, B şi C sînt puncte coliniare în cazul cînd: a) $m(\widehat{ABD}) = 125°$ şi $m(\widehat{DBC}) = 55°$; b) $m(\widehat{ABD}) = 100°$ şi $m(\widehat{DBC}) = 79°$; c) $m(\widehat{ABD}) = 120°$ şi $m(\widehat{DBC}) = 60°$; d) $m(\widehat{ABD}) = 30°$ şi $m(\widehat{DBC}) = 140°$.



R. a) Pentru ca punctele A, B şi C să fie coliniare trebuie ca $[BA$ şi $[BC$ să fie semidrepte opuse (una în „prelungirea" celeilalte) adică să se formeze un unghi alungit (cu măsura de 180°); se mai spune că trebuie să avem $\sphericalangle ABD$ şi $\sphericalangle DBC$ unghiuri adiacente suplementare. În cazul nostru: $m(\widehat{ABD}) + m(\widehat{DBC}) = 125° + 55° = 180°$. Deci punctele A, B, C sînt coliniare. b) $m(\widehat{ABD}) + m(\widehat{DBC}) = 100° + 79° = 179° \neq 180°$. Deci A, B, C nu sînt puncte coliniare. c) Da; d) Nu.

I.1.77[PO]**.** Găsiți $m(\widehat{ABD})$ pentru ca punctele A, B, C să fie coliniare în cazul cînd suplementul adiacent al lui $\widehat{ABD}$, care este $\widehat{DBC}$, are: a) 49°; b) 100°; c) 45°; d) 102°30′.

R. a) Trebuie să avem $m(\widehat{ABD}) + m(\widehat{DBC}) = 180°$; $m(\widehat{ABD}) + 49° = 180°$, adică $m(\widehat{ABD}) = 180° - 49° = 131°$; b) 80°; c) 135°; d) 77°30′.

I.1.78. Cercetați dacă sînt perechi de măsuri (în grade) de unghiuri complementare următoarele perechi de numere: a) 25 și 75; b) 50 și 40; c) 20 și 70; d) 10 și 79; e) 41 și 49; f) 1 și 88; g) 30 și 60; h) 45 și 45; i) 15 și 65; j) 36 și 44; k) 72 și 17.

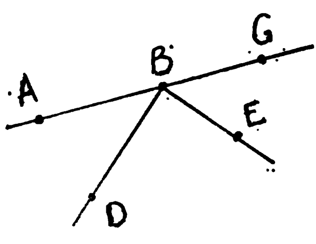
R. a) Două unghiuri la care suma măsurilor lor (în grade) este 90 se numesc unghiuri complementare.

În situația noastră: $25 + 75 = 100 \neq 90$, deci nu avem unghiuri complementare; b) Deoarece $50 + 40 = 90$, unghiurile sînt complementare; c) da; d) nu; e) da; f) nu; g) da; h) da; i) nu; j) nu; k) nu.

I.1.79. Calculați măsura complementului unghiului AOB știind că măsura lui AOB este: a) 42°; b) 50°; c) 43°12′; d) 30°; e) 60°; f) 45°; g) 15°; h) 75°; i) 36°; j) 72°; k) 18°; l) 21°31′42″.

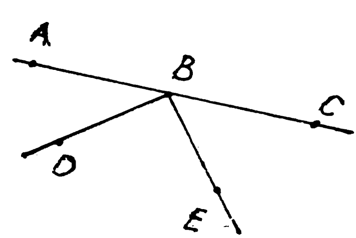
R. a) Complementul unui unghi AOB este un alt unghi la care măsura se găsește calculînd diferența dintre 90° și măsura, în grade, a lui AOB. Deci, complementul unghiului cu măsura de 42° are măsura de $90° - 42°$ adică 48°. b) $90° - 50° = 40°$; c) $90° - 43°12' = 89°60' - 43°12' = 46°48'$; d) 60°; e) 30°; f) 45°; g) 75°; h) 15°; i) 54°; j) 18°; k) 72° l) 68°28′18″.

I.1.80[PO]**.** Se dă unghiul drept DBE. Punctul A aparține semiplanului determinat de dr. DB, căruia nu-i aparține E, astfel încît $m(\widehat{ABD}) = 70°$, iar punctul C aparține semiplanului determinat de dr. BE, căruia nu-i aparține D, astfel încît $m(\widehat{CBE}) = 20°$. Sînt punctele A, B, C coliniare? Justificați răspunsul.



R. Calculăm: $m(\widehat{ABD}) + m(\widehat{DBE}) + m(\widehat{CBE}) = 70° + 90° + 20° = 180°$. Deci $[BA$ și $[BC$ sînt opuse, și deci A, C, B sînt coliniare. Altfel se observă că $\sphericalangle ABD$ și $\sphericalangle CBE$ sînt unghiuri complementare și împreună cu unghiul drept determină un unghi alungit, deci punctele A, B și C sînt puncte coliniare.

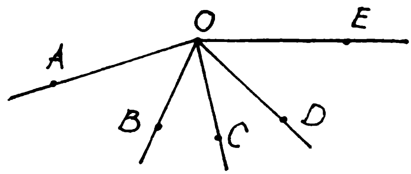
I.1.81. În figura alăturată, avem: $m(\widehat{ABD}) = 30°$, $m(\widehat{DBE}) = 70°$, $m(\widehat{EBC}) = 80°$. Cercetați dacă punctele A, B și C sînt puncte coliniare.



R. Pentru a cerceta dacă A, B, C sînt puncte coliniare calculăm $m(\widehat{ABD}) + m(\widehat{DBE}) + m(\widehat{EBC})$.

Dacă acest rezultat este 180°, punctele sînt coliniare, numai în cazul cînd interioarele unghiurilor respective sînt fără puncte comune (disjuncte). În cazul nostru interioarele unghiurilor nu au puncte comune și $m(\widehat{ABD}) + m(\widehat{DBE}) + m(\widehat{EBC}) = 30° + 70° + 80° = 180°$. Deci punctele A, B, C sînt coliniare.

I.1.82. În desenul alăturat avem $m(\widehat{AOC}) = 70°$, $m(\widehat{BOD}) = 50°$ și $m(\widehat{DOE}) = 60°$. Sînt punctele A, O și E puncte coliniare?



R. Calculăm: $m(\widehat{AOC}) + m(\widehat{BOD}) + m(\widehat{DOE}) = 70° + 50° + 60° = 180°$. Constatăm că două din unghiurile AOC, BOD și DOE, adică $\widehat{AOC}$ și $\widehat{BOD}$, nu au interioarele disjuncte — partea comună fiind $\widehat{BOC}$. Deci punctele A, O și E nu sînt coliniare.

I.1.83. Unghiurile AOB, BOC, COD și DOA sînt unghiuri în jurul unui punct. Calculați $m(\widehat{COD})$ în cazul cînd: a) $m(\widehat{AOB}) = 80°$, $m(\widehat{BOC}) = 90°$, $m(\widehat{DOA}) = 110°$; b) $m(\widehat{AOB}) = 70°$, $m(\widehat{BOC})$ este cu 15° mai mare decît $m(\widehat{AOB})$, $m(\widehat{DOA})$ este cu 10° mai mică decît $m(\widehat{BOC})$; c) $m(\widehat{AOB}) = 70°$, $m(\widehat{BOC}) = 85°$, $m(\widehat{DOA}) = 60°$; d) $m(\widehat{AOB}) = 62°$, $m(\widehat{DOA})$ este de 2 ori mai mic decît $m(\widehat{AOB})$, $m(\widehat{BOC})$ este cu 100° mai mare decît $m(\widehat{DOA})$.

R. a) Suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct este 360°. Avem deci:

$$m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) + m(\widehat{COD}) + m(\widehat{DOA}) = 360°,$$

$$80° + 90° + m(\widehat{COD}) + 110° = 360°,$$

$$280° + m(\widehat{COD}) = 360°, \text{ adică } m(\widehat{COD}) = 360° - 280° = 80°.$$

b) Calculăm: $m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{AOB}) + 15° = 70° + 15° = 85°$, $m(\widehat{DOA}) = m(\widehat{BOC}) - 10° = 85° - 10° = 75°$.
Deoarece:

$$m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) + m(\widehat{COD}) + m(\widehat{DOA}) = 360°,$$

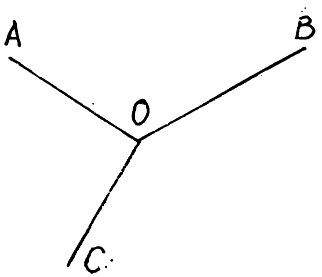
înlocuind avem:

$$70° + 85° + m(\widehat{COD}) + 75° = 360°, \text{ sau}$$

$$230° + m(\widehat{COD}) = 360°, \text{ de unde } m(\widehat{COD}) = 130°.$$

c) 145°; d) 136°.

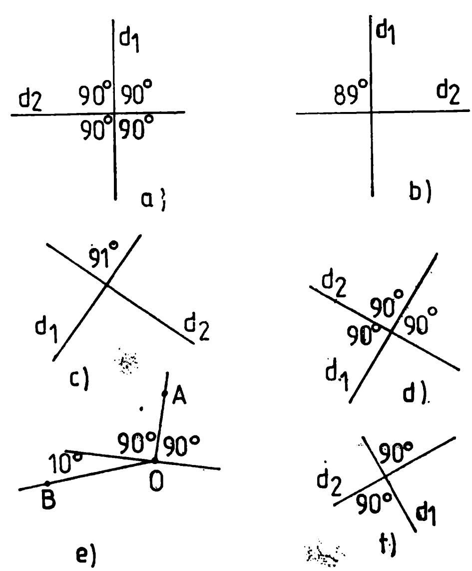
I.1.84. Se dau : $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COA}$, unghiuri în jurul unui punct. Găsiți măsurile lor în următoarele situații : a) cele trei unghiuri sînt congruente ; b) $\widehat{AOB} \equiv \widehat{BOC}$ iar $m(\widehat{COA}) = 3 \cdot m(\widehat{AOB})$; c) $\widehat{BOC} \equiv \widehat{COA}$, iar $m(\widehat{AOB}) = 2 \cdot m(\widehat{COA})$; d) $m(\widehat{AOB}) = 2 \cdot m(\widehat{BOC})$, $m(\widehat{COA}) = 3 \cdot m(\widehat{BOC})$; e) $m(\widehat{AOB})$ este cu 40° mai mică decît $m(\widehat{BOC})$ iar $m(\widehat{BOC})$ este de două ori mai mare decît $m(\widehat{COA})$.



R. a) Din ipoteză rezultă că unghiurile au același vîrf ; ele sînt unghiuri în jurul unui punct la care suma măsurilor este 360°. Cum cele trei unghiuri sînt congruente rezultă că $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{AOC}) = \dfrac{360^\circ}{3} = 120^\circ$;

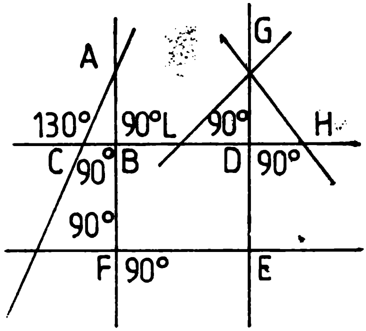
b) Sînt unghiuri în jurul unui punct ; suma măsurilor lor este 360°. Avem : $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) + m(\widehat{AOC}) = 360^\circ$. Ținem seama de ipoteză : $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{AOB}) + 3 \cdot m(\widehat{AOB}) = 360^\circ$, adică $5 \cdot m(\widehat{AOB}) = 360^\circ$. De aici avem că $m(\widehat{AOB}) = \dfrac{360^\circ}{5} = 72^\circ$. Deci $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{BOC}) = 72^\circ$ și $m(\widehat{AOC}) = 3 \cdot 72^\circ = 216^\circ$ imposibil, căci măsura unui unghi nu poate fi mai mare decît 180°. c) $m(\widehat{COB}) = m(\widehat{COA}) = 90^\circ$, $m(\widehat{BOA}) = 180^\circ$; d) $m(\widehat{AOB}) = 120^\circ$, $m(\widehat{BOC}) = 60^\circ$, $m(\widehat{COA}) = 180^\circ$; e) $m(\widehat{AOB}) = 120^\circ$, $m(\widehat{BOC}) = 160^\circ$, $m(\widehat{COA}) = 80^\circ$.

I.1.85.^{PP}. În care din desenele alăturate sînt puse în evidență două drepte perpendiculare ?

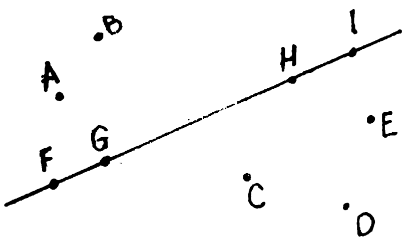


R. În desenul *a)* cele două drepte formează patru unghiuri drepte, deci cele două drepte sînt drepte perpendiculare. În desenul *b)* unul din cele patru unghiuri nu are 90° ci 89°, deci nu avem două drepte perpendiculare. Asemănător în desenul *c)*. În desenul *d)*, trei din cele patru unghiuri în jurul unui punct au suma măsurilor egală cu 270°. Al patrulea are măsura de $360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$, deci avem patru unghiuri drepte și deci cele două drepte sînt drepte perpendiculare. În desenul *e)* un unghi nu are 90°, deci nu avem două drepte perpendiculare. În desenul *f)* avem două drepte perpendiculare, pentru că suplementul fiecărui unghi dat, de 90°, este cu măsura tot de 90° ; așadar vem patru unghiuri de 90°.

I.1.86. Folosiţi figura alăturată ($F \in$ dr. AB iar L, D, H aparţin dr. CB) şi găsiţi valoarea logică a următoarelor propoziţii : a) dr. AB este perpendiculara din A pe dr. CB ; b) dr. GH este perpendiculara din G pe dr. CB ; c) dr. HD este perpendiculara din H pe dr. GD ; d) dr. FB este perpendiculara în B pe dr. BC ; e) dr. AC este perpendiculara din A pe dr. DH ; f) dr. GL este perpendiculara în L pe dr. BD ; g) dr. EF este perpendiculara în F pe dr. AB şi perpendiculara din E pe dr. AB.

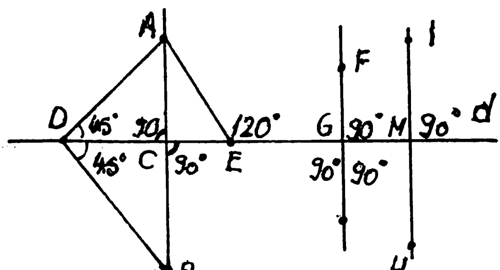


R. a) Folosim problema anterioară (desenul *f*). Constatăm că dr. $AB \perp$ dr. CB, deci propoziţia este adevărată ; b) Deoarece dr. GH nu este perpendiculară pe dr. CB, propoziţia este falsă ; c) Folosim problema anterioară (desenul *f*). Dreapta HD este perpendiculară pe dr. GD deci propoziţia este adevărată ; d) S-a constatat la punctul a) că dr. $AB \perp$ $\perp$ dr. BC. Din ipoteză, $F \in$ dr. AB, deci dr. $FB \perp$ dr. BC şi propoziţia este adevăraăt ; e) falsă ; f) falsă ; g) adevărată.



I.1.87. Executaţi pe caiet figura alăturată şi apoi cu ajutorul echerului puneţi în evidenţă pe desenul respectiv perpendicularele pe dreapta d din punctele A, B, C, D şi E şi apoi perpendicularele pe dreapta d în punctele F, G, H şi I. Realizaţi aceleaşi cerinţe şi cu ajutorul raportorului.

I.1.88. Folosiţi figura prezentată şi indicaţi următoarele distanţe : a) de la B la d ; b) de la D la dr. AB ; c) de la F la d ; d) de la A la E ; e) de la I la d ; f) de la H la I ; g) de la I la F ; h) de la G la E ; i) de la E la dr. AC.



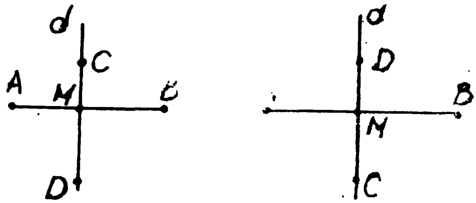
R. Distanţa de la un punct la o dreaptă este lungimea (măsura) segmentului format din punct şi piciorul perpendicularei pe dreapta respectivă. Deci distanţa de la B la d este BC ; b) DC ; c) FG ; d) Distanţa de la un punct la alt punct este măsura segmentului format din cele două puncte. Deci distanţa de la A la E este AE ; e) IM ; f) HI ; g) IF ; h) GE ; i) EC.

I.1.89. Se dă $[AB]$ şi M mijlocul său. Punctul C nu aparţine dr. AB iar dr. $CM \perp$ dr. AB. Cum se numeşte dr. CM?

R. Mediatoarea segmentului AB.

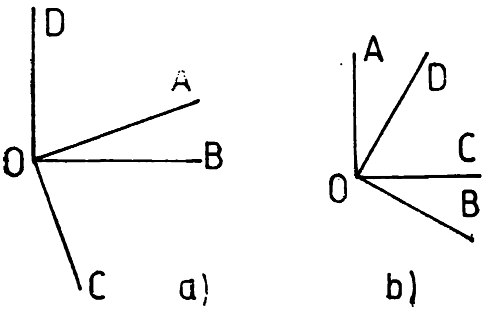
I.1.90. Se dă (AB) şi M mijlocul său. În punctul M se consideră o dreaptă d astfel încît $d \perp$ dr. AB. Fie $C \in d$ şi $D \in d$ în semiplane diferite determinate de dr. AB. Aflaţi valoarea logică a afirmaţiilor următoare: a) dr. CD este mediatoarea lui (AB); b) dr. $AB \perp d$; c) dr. AB este mediatoarea lui (CD).

R. a) Deoarece $C \in d$ și $D \in d$ avem că dr. $CD = d$. Din ipoteză $d \perp$ dr. AB în M care este mijlocul lui (AB): rezultă că d este mediatoarea lui (AB) deci dr. CD este mediatoarea lui (AB). Avem că propoziția este adevărată; b) Deoarece dr. $AB \perp d$ rezultă că și $d \perp$ dr. AB adică relația „este perpendiculară pe" este o relație simetrică. Avem deci propoziție adevărată; c) Punctele C și D au fost date la întîmplare pe dreapta $d =$ dr. CD deci punctul M nu este mijlocul lui (CD). Așadar dr. AB nu este mediatoarea lui (CD) chiar dacă dr. $AB \perp$ dr. CD. Rezultă că propoziția este falsă.



I.1.91. Se dă unghiul AOB. Pe $[OA$, în O, fie $[OC$ astfel încît $[OA \perp [OC$. Pe $[OB$, în O fie $[OD$ astfel încît $[OB \perp [OD$. Demonstrați că $m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{AOD})$ în cazul cînd $m(\widehat{AOB})$ este: a) $70°$; b) $25°$; c) $140°$; d) oarecare cuprinsă între $0°$ și $90°$ și, $90°$ și $180°$.

R. a) Deoarece, în ipoteză, $[OA \perp [OC$ rezultă că $m(\widehat{AOC}) = 90°$. Cum $[OB$ este inclusă în interiorul lui $\widehat{AOC}$ avem că: $m(\widehat{BOC}) + m(\widehat{BOA}) = 90°$ deci $m(\widehat{BOC}) = 90° - m(\widehat{AOB}) = 90° - 70° = 20°$.

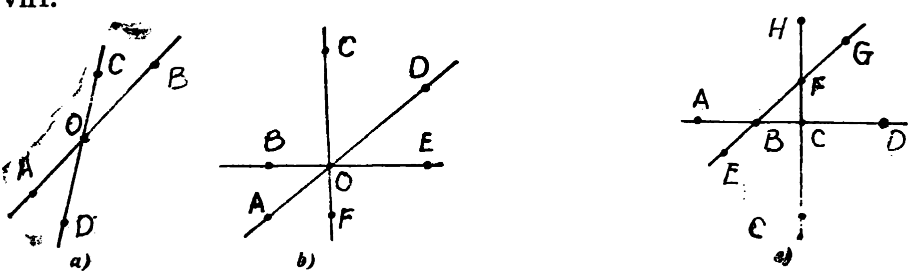


Asemănător raționăm și găsim că $m(\widehat{AOD}) = 20°$. Cum cele două unghiuri au aceeași măsură rezultă că $m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{AOD})$; b) $m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{AOD}) = 65°$; c) unghiul AOB este unghi obtuz deci $[OC$ este inclusă în interiorul lui AOB adică $m(\widehat{AOD}) = 140° - 90° = 50°$; $[OD$ este inclusă în interiorul lui $\widehat{AOB}$, deci $m(BOC) = 140° - 90° = 50°$. Deci $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle BOC$. d) asemănător ca la punctele a) și c) dar mai general.

Observație. Se știe că două unghiuri la care suma măsurilor este $90°$ se numesc unghiuri complementare.

În acest exercițiu am avut 2 unghiuri care au același complement. S-a constatat că ele sînt congruente.

I.1.92. Folosiți desenele alăturate și enumerați unghiurile opuse la vîrf.



R. a) $\sphericalangle COB$ şi $\sphericalangle AOD$, $\sphericalangle AOC$ şi $\sphericalangle BOD$; b) $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle DOE$, $\sphericalangle BOC$ şi $\sphericalangle FOE$, $\sphericalangle COD$ şi $\sphericalangle AOF$, $\sphericalangle AOC$ şi $\sphericalangle DOF$, $\sphericalangle BOD$ şi $\sphericalangle AOE$, $\sphericalangle COE$ şi $\sphericalangle BOF$; c) $\sphericalangle ABE$ şi $\sphericalangle FBC$, $\sphericalangle ABF$ şi $\sphericalangle EBC$, $\sphericalangle EFC$ şi $\sphericalangle HFG$ etc.

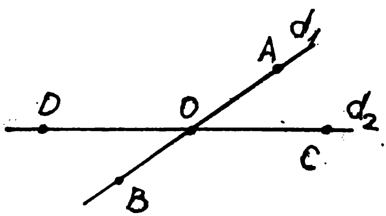
I.1.93. Unghiurile AOB şi COD sînt unghiuri opuse la vîrf (A, O, C sînt coliniare). Calculaţi măsura fiecăruia dintre unghiurile COD, AOD şi BOC ştiind că $m(\widehat{AOB})$ este: a) $50°$; b) $130°$; c) $30°$; d) $110°$; e) $72°$; f) $89°$.

R. a) Se ştie că două unghiuri opuse la vîrf sînt unghiuri congruente. Deci $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$ iar $m(\widehat{COD}) = 50°$.

În cazul cînd avem două unghiuri opuse la vîrf mai avem încă două unghiuri opuse la vîrf, fiecare din ele este suplementul unuia din unghiurile date.

Deci mai avem $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle BOC$. Deoarece $\sphericalangle AOD$ este suplementul lui $\sphericalangle AOB$ sau al lui $\sphericalangle COD$, avem că $m(\widehat{AOD}) = m(\widehat{BOC}) = 180° - m(\widehat{AOB}) = 180° - 50° = 130°$; b) $m(\widehat{COD}) = 130°$, $m(\widehat{AOD}) = m(\widehat{BOC}) = 50°$; c) $m(\widehat{COD}) = 30°$, $m(\widehat{AOD}) = m(\widehat{BOC}) = 150°$; d) $110°, 70°, 70°$; e) $72°, 108°, 108°$; f) $89°, 91°, 91°$.

I.1.94. În figura alăturată dreptele d_1 şi d_2 sînt concurente în O. Calculaţi măsura fiecăruia din unghiurile AOC, AOD, DOB şi BOC ştiind că: a) $\sphericalangle AOC$ are măsura de 3 ori mai mică decît $m(\widehat{AOD})$; b) $m(\widehat{BOC}) = 2\,m(\widehat{DOB})$; c) $m(\widehat{DOB})$ este cu $30°$ mai mică decît $m(\widehat{DOA})$; d) $m(\widehat{AOD}) = \frac{2}{3}\,m(\widehat{DOB})$.

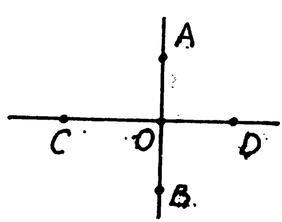


R. a) Datorită cunoştinţelor despre unghiurile opuse la vîrf avem: $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOD$ şi $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle BOC$.

Dar $\sphericalangle AOC$ şi $\sphericalangle AOD$ sînt unghiuri adiacente suplementare şi deci $m(\widehat{AOC}) + m(\widehat{AOD}) = 180°$. Din ipoteză avem că $m(\widehat{AOD}) = 3 \cdot m(\widehat{AOC})$. Deci $m(\widehat{AOC}) + 3\,m(\widehat{AOC}) = 180°$, adică $4\,m(\widehat{AOC}) = 180°$, $m(\widehat{AOC}) = 45° = m(\widehat{BOD})$; $m(\widehat{AOD}) = 3 \cdot 45° = 135° = m(\widehat{BOC})$. b) $m(\widehat{AOC}) = 60°$, $m(\widehat{AOD}) = 120°$, $m(\widehat{DOB}) = 60°$, $m(\widehat{BOC}) = 120°$; c) $75°, 105°, 75°, 105°$; d) $108°, 72°, 108°, 72°$.

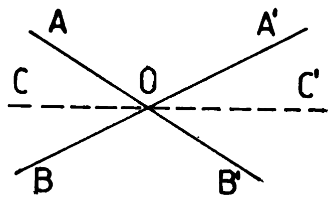
I.1.95. Pentru a recunoaşte două drepte perpendiculare, cu ajutorul definiţiei din manualul de geometrie, este nevoie să se dea cele patru unghiuri proprii formate de cele două drepte concurente, fiecare de cîte $90°$.

Cu ajutorul cunoştinţelor despre unghiurile opuse la vîrf, cîte unghiuri din cele formate trebuie să ştim pentru a recunoaşte două drepte perpendiculare?



R. Un singur unghi cu măsura de $90°$, adică un singur unghi drept. Justificare: folosim desenul alăturat; fie dată $m(\widehat{AOC}) = 90°$; $\sphericalangle AOC$ şi $\sphericalangle AOD$ sînt unghiuri adiacente suplementare, deci $m(\widehat{AOD})=180^\circ - m(\widehat{AOC})=180^\circ-90^\circ=90^\circ$; $\sphericalangle AOC$ şi $\sphericalangle BOD$ sînt unghiuri opuse la vîrf, aşadar sînt congruente, adică $m(\widehat{DOB}) = 90^\circ$; asemănător, $\sphericalangle AOD$ şi $\sphericalangle BOC$ sînt unghiuri opuse la vîrf, adică $m(\widehat{BOC}) = 90^\circ$; rezultă că cele patru unghiuri sînt unghiuri de 90°, deci dreptele sînt două drepte perpendiculare.

I.1.96. Demonstraţi că bisectoarele a două unghiuri opuse la vîrf formează cu laturile unghiurilor patru unghiuri congruente şi că aceste bisectoare sînt semidrepte opuse.



R. Notăm cele două unghiuri opuse la vîrf cu $\widehat{AOB}$ şi $\widehat{A'OB'}$ şi cu $[OC$ şi $[OC'$ bisectoarele lor respective. Ştim că dacă două unghiuri sînt unghiuri opuse la vîrf atunci ele sînt congruente. Deci, avem: $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle A'OB'$, (1). Din datele problemei, $[OC$ este bisectoare, deci

$$\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle COB \qquad (2)$$

rezultă că:

$$m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{COB}) = \frac{m(\widehat{AOB})}{2}. \qquad (3)$$

De asemenea, $[OC'$ este bisectoare, deci

$$A'OC' \equiv \sphericalangle C'OB' \qquad (4)$$

rezultă că:

$$m(\widehat{A'OC'}) = m(\widehat{C'OB'}) = \frac{m(\widehat{A'OB'})}{2}. \qquad (5)$$

Folosind (1), (3) şi (5) găsim că:

$$\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle COB \equiv A'OC' \equiv \sphericalangle C'OB'. \qquad (6)$$

Aceasta arată că cele patru unghiuri sînt congruente. Pentru a justifica că cele două bisectoare sînt semidrepte opuse, arătăm că ele sînt laturile unui unghi alungit. Vom calcula:

$$m(\widehat{COA}) + m(\widehat{AOA'}) + m(\widehat{A'OC'})$$

folosind faptul că

$$m(\widehat{COA}) = m(\widehat{C'OA'}) = \frac{m(\widehat{A'OB'})}{2}.$$

Deci:

$$m(\widehat{COA}) + m(\widehat{AOA'}) + m(\widehat{A'OC'}) = m(\widehat{A'OC'}) + m(\widehat{AOA'}) + m(\widehat{A'OC'}) = m(\widehat{AOA'}) +$$
$$+ 2m(\widehat{A'OC'}) = m(\widehat{AOA'}) + 2\cdot\frac{m(\widehat{A'OB'})}{2} = m(\widehat{AOA'}) + m(\widehat{A'OB'}) = m(\widehat{AOB'}) = 180^\circ.$$

Rezultă că $[OC$ şi $[OC'$ sînt semidrepte opuse.

I.1.97. Se dă $AB = 10$ cm. Desenaţi (construiţi) cercul cu centrul în A, de rază egală cu 4 cm şi cercul cu centrul în B, de rază egală cu 3 cm. Observaţi dacă cele două cercuri au puncte comune.

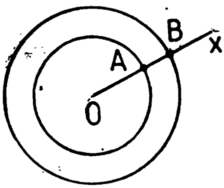
R. Nu. Intersecţia celor două cercuri este mulţimea vidă. Suma lungimilor razelor, $4 + 3 = 7$ este mai mică decît distanţa dintre centrele lor, $AB = 10$ cm.

I.1.98. Se dă $AB = 10$ cm. Desenați (construiți) cercul cu centrul în A de rază egală cu 4 cm și cercul cu centrul în B de rază egală cu 6 cm. Observați dacă cele două cercuri au puncte comune.

R. Da. Intersecția celor două cercuri este o mulțime cu un singur punct. Suma lungimilor razelor este 4 cm + 6 cm = 10 cm. Ea este egală cu distanța, AB, dintre centrele celor două cercuri.

I.1.99. Se știe că $OA = 4$ cm, $OB = 3$ cm, $OC = OD = 5$ cm, $OE = OF = 3$ cm, $OG = HO = 4$ cm. Care dintre punctele A, B, C, D, E, F, G, H sînt puncte ce aparțin cercului de centru O și de rază cu lungimea de 3 cm?

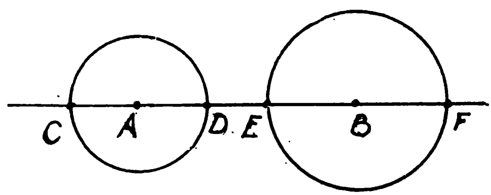
R. Un punct M aparține cercului de centru O dacă OM este egal cu lungimea razei cercului. În cazul nostru egale cu 3 cm sînt numerele $OB = OE = OF$. Deci, punctele respective sînt B, E și F.



I.1.100. Două cercuri au același centru O, iar razele au lungimile de 3 cm și respectiv de 5 cm. (Ox intersectează cercurile în A și respectiv B. Calculați lungimea lui (AB).

R. Avem $OA = 3$ cm și $OB = 5$ cm. Punctele O, A și B sînt coliniare iar $OA + AB = OB$ adică $3 + AB = 5$, de unde $AB = 5 - 3 = 2$ (cm).

I.1.101. Două cercuri au centrele în punctele A și B care aparțin dreptei d. Cercul de centru A are raza de 3 cm iar cel de centru B de 7 cm. Dreapta d intersectează cele două cercuri în punctele C, D, E, F (ordinea este C, A, D, E, B, F). Calculați DE și CF știind că: a) $AB = 12$ cm; b) $AB = 20$ cm; c) $AB = 11$ cm.



R. Avem a) $AD + DE + EB = AB$ sau 3 cm + DE + 7 cm = 12 cm, de unde DE = 12 cm − 10 cm = 2 cm.

$$CF = CA + AD + DE + EB + BF;\quad CF = 3 + 3 + 2 + 7 + 7 = 22 \text{ (cm)};$$

b) $DE = 10$ cm, $CF = 30$ cm; c) $DE = 1$ cm, $CF = 21$ cm.

I.1.102. Se dă $AB = 10$ cm. Construiți (desenați) cercul cu centrul în A de rază egală cu 5 cm și cercul cu centrul în B de rază 8 cm. Observați dacă cele două cercuri au puncte comune.

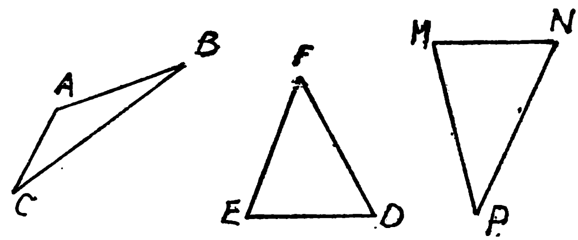
R. Da. Intersecția cercurilor respective este o mulțime formată din două puncte diferite. Suma lungimilor razelor este 13 cm care este mai mare decît distanța dintre centrele lor, $AB = 10$ cm.

Observație Nu întotdeauna cînd suma lungimilor razelor este mai mare ca distanța dintre centrele celor două cercuri, intersecția lor este formată din două puncte diferite. În cazul cînd, de exemplu, $AB = 3$ cm, iar razele cercurilor sînt respectiv de 5 cm și 8 cm, intersecția este formată dintr-un singur punct; diferența lungimilor razelor, 8 cm − 5 cm = 3 cm, este egală cu distanța dintre cele două centre. În cazul cînd, de exemplu, $AB = 2$ cm iar razele sînt tot de 5 cm și 8 cm, intersecția este mulțimea vidă; diferența lungimilor razelor, 8 cm − 5 cm = 3 cm, este mai mare decît distanța dintre centre, $AB = 2$ cm.

§2. Triunghiul. Congruența triunghiurilor

I.2.1. Folosiți desenul alăturat pentru a enumera în fiecare caz: a) vîrfurile triunghiului; b) laturile triunghiului; c) unghiurile triunghiului.

R. Avem: a) A, B, C; E, F, D; M, P, N; b) $[AC]$, $[AB]$, $[BC]$; $[FD]$, $[FE]$, $[ED]$; $[MN]$, $[MP]$, $[PN]$; c) $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$, $\sphericalangle CAB$; $\hat{F}$, $\sphericalangle FED$, $\hat{D}$; $\hat{M}$, $\hat{N}$, $\hat{P}$.



I.2.2. Se dau triunghiurile: ABC, MNS și TAD. Enumerați pentru fiecare triunghi: a) vîrfurile; b) laturile; c) unghiurile.

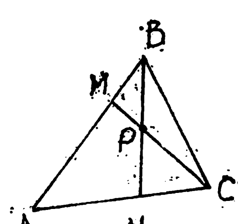
R. Avem: A, B, C; M, N, S; T, A, D; b) $[AB]$, $[AC]$, $[BC]$; $[MN]$, $[MS]$, $[NS]$; $[TA]$, $[TD]$, $[AD]$; c) $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle ACB$, $\sphericalangle BAC$; $\hat{M}$, $\hat{N}$, $\sphericalangle MSN$; $\hat{T}$, $\sphericalangle TAD$, $\sphericalangle ADT$.

I.2.3. Se dă triunghiul ABC și următoarele afirmații: a) $[AC]$ este latură opusă lui $\hat{B}$; b) $[AB]$ este latură opusă lui $\hat{C}$; c) $[BC]$ este latură alăturată lui $\hat{A}$; d) $\hat{A}$ este cuprins între laturile $[AC]$ și $[AB]$; e) $\hat{B}$ este cuprins între laturile $[AB]$ și $[CB]$; f) $\hat{C}$ este cuprins între laturile $[AC]$ și $[AB]$; g) $\hat{A}$ este alăturat laturii $[AC]$; h) $\hat{B}$ este alăturat laturii $[CB]$; i) $\hat{C}$ este opus laturii $[AB]$; j) $\hat{A}$ și $\hat{C}$ sînt la capetele laturii $[AC]$.

Care din aceste afirmații sînt adevărate?

R. Afirmațiile adevărate sînt a), b), d), e), g), h), i), j)

I.2.4. Folosiți desenul alăturat pentru enumerarea triunghiurilor în care: a) $\sphericalangle ABP$ este unghi; b) $[AM]$ este latură; c) $\sphericalangle PAN$ este unghi.



R. a) $\sphericalangle ABP$ este unghi în triunghiurile: MBP, MNB, ABP, ABN. b) În triunghiurile: AMP, AMN, AMC; c) În triunghiurile: APN, APC.

Observație. Se înțelege că se iau în discuție numai punctele ce sînt puse în evidență în desenul dat

I.2.5. Triunghiul ABC are $m(\widehat{ABC}) = 90°$; triunghiul MNP are $m(\widehat{PMN}) = 150°$; în triunghiul EFD avem $[EF] \equiv [ED]$; în triunghiul IKL avem $[IK] \equiv [KL] = [IL]$.

Care din aceste triunghiuri este triunghi isoscel, care este triunghi dreptunghic, care este triunghi echilateral şi care obtuzunghic?

R. Triunghiuri isoscele sînt ΔEFD şi ΔIKL, căci au cîte două laturi congruente; triunghiul IKL este triunghi echilateral; ΔABC este un triunghi dreptunghic, căci are un singur unghi drept; ΔMNP este un triunghi obtuzunghic pentru că are un unghi obtuz, cu măsura de 150°.

I.2.6. Triunghiul dreptunghic MAB are unghiul drept cu vîrful în B. a) Care este ipotenuza? b) Care sînt catetele?

R. a) Ipotenuza este latura opusă unghiului drept, adică $[AM]$; b) catetele sînt laturile triunghiului ce formează unghiul drept, deci $[AB]$ şi $[BM]$.

I.2.7. Catetele triunghiului dreptunghic ABC sînt $[AC]$ şi $[CB]$. a) Care este unghiul drept? b) Care este ipotenuza?

R. a) Vîrful unghiului drept este „capăt" comun la cele două catete, deci $\sphericalangle ACB$. b) Ipotenuza este latura opusă unghiului drept, adică $[AB]$.

I.2.8. Ipotenuza triunghiului dreptunghic EPC este $[PC]$. Enumeraţi: a) catetele; b) unghiurile care nu sînt drepte.

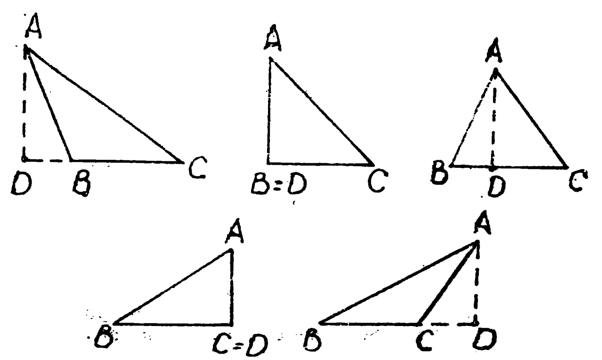
R. a) Catetele sînt $[PE]$ şi $[EC]$; b) $\sphericalangle EPC$ şi $\sphericalangle ECP$ pentru că $\sphericalangle E$ este unghiul drept.

I.2.9. În triunghiul ABC avem $D \in (BC)$, $E \in (BC)$ şi $F \in (BC)$ astfel încît $(BD) \equiv (DE) \equiv (EF) \equiv (FC)$. Se dau următoarele afirmaţii: a) (AD) este mediană în triunghiul ABE; b) (AD) este mediană în ΔAEF; c) (AE) este mediană în ΔABC; d) $[AF]$ nu este mediană în ΔABC; e) (AF) este mediană în ΔAEC; f) (AE) nu este mediană în ΔADF. Care din aceste afirmaţii sînt adevărate?

R. Afirmaţiile adevărate sînt a), c), d), e).

I.2.10. ABC este un triunghi iar $[AD]$ este înălţime ($D \in$ dr. BC). Puneţi în evidenţă în desen fiecare situaţie.

R. Distingem cazurile din figura alăturată.



I.2.11^M. „Două laturi şi unghiul cuprins", „o latură şi unghiurile alăturate" şi „trei laturi" sînt singurele moduri de a da trei

din cele şase numere asociate unui triunghi? Care sînt celelalte moduri?

R. Fie triunghiul ABC. a) „Două laturi şi unghiul cuprins" înseamnă: $[BA]$, $\widehat{BAC}$, $[AC]$ sau $[AB]$, $\widehat{ABC}$, $[BC]$ sau $[AC]$, $\widehat{ACB}$, $[CB]$. b) „O latură şi unghiurile alăturate" înseamnă: $\widehat{CAB}$, $[AB]$, $\widehat{ABC}$ sau $\widehat{ABC}$, $[BC]$, $\widehat{BCA}$ sau $\widehat{BCA}$, $[CA]$ $\widehat{CAB}$. c) „Trei laturi" înseamnă: $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$. Acestea sînt cele trei situaţii cînd, cu datele respective, se poate construi un singur triunghi, Ele mai sînt numite şi cazuri de construcţie ale triunghiurilor. Mai sînt încă trei situaţii care nu sînt numite cazuri de construcţie pentru că obţinem unele „surprize". Avem: a) „Două laturi şi un unghi opus uneia din ele" care înseamnă: $[BA]$, $\widehat{BAC}$, $[BC]$ sau $[BC]$, $\widehat{BAC}$, $[AC]$ sau $[AB]$ $\widehat{ABC}$, $[AC]$ sau $[AC]$ $\widehat{ABC}$, $[BC]$ sau $[AC]$, $\widehat{ACB}$, $[AB]$ sau $[AB]$, $\widehat{ACB}$, $[CB]$. b) „O latură şi două unghiuri, nu amîndouă alăturate" care înseamnă: $[BC]$, $\widehat{CBA}$, $\widehat{BAC}$ sau $[AC]$, $\widehat{CBA}$, $\widehat{BAC}$ sau $[BA]$, $\widehat{BAC}$, $\widehat{ACB}$ sau $[BC]$, $\widehat{BAC}$, $\widehat{ACB}$ sau $[AC]$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{CBA}$ sau $[AB]$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{CBA}$. c) „Trei unghiuri" care înseamnă: $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$, $\widehat{CAB}$. Se constată că sînt şase situaţii în care cele şase elemente ale triunghiului au fost combinate cîte trei obţinîndu-se în total 20 de cazuri.

I.2.12^M. „Construiţi" (desenaţi) un triunghi ABC cunoscînd $m(\hat{A})=35°$, $AB = 5$ cm şi $BC = 4$ cm. Cîte soluţii are problema?

R. Cu rigla gradată construim segmentul AB cu lungimea de 5 cm. În punctul A cu raportorul construim $[AX$ astfel încît să avem $m(\sphericalangle XAB)$ de 35°. Cu ajutorul compasului construim cercul cu centrul în B de rază 4 cm. Acest cerc intersectează $[AX$ în două puncte C şi C_1. Avem $BC = BC_1 = 4$ cm.

Aşadar, obţinem două triunghiuri cu datele problemei: ΔABC şi ΔABC_1, deci problema are două soluţii.

Observaţie. Datele problemei sînt: două laturi şi un unghi opus uneia din laturi; nu este un „caz de construcţie".

I.2.13.^{M}. Construiţi un triunghi ABC cunoscînd $m(\hat{A}) = 150°$, $AB = 2$ cm şi $BC = 5$ cm. Cîte soluţii are problema?

R. Cu rigla gradată construim segmentul AB cu lungimea de 2 cm. În punctul A cu raportorul construim $[AX$ astfel încît să avem $\sphericalangle XAB$ de 150°. Cu ajutorul compasului construim cercul de centru B şi raza de 5 cm.

Acest cerc intersectează $[AX$ într-un singur punct C. Avem $BC = 5$ cm. Obţinem un singur triunghi, ΔABC, deci avem o singură situaţie adică problema are o singură soluţie.

Observaţie. Ca şi în problema precedentă, datele problemei sînt: două laturi şi un unghi opus uneia. Spre deosebire de problema precedentă unghiul este obtuz, iar cercul cu centrul în B intersectează $[AX$ într-un singur punct şi avem un singur triunghi. Problema precedentă a dat două triunghiuri diferite, deci nu întotdeauna avem un singur triunghi.

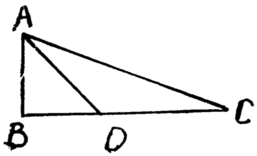
I.2.14^M. Construiţi un triunghi ABC cunoscînd: a) $m(\hat{A}) = 60°$, $AB = 4$ cm, $BC = 2$ cm; b) $m(\hat{A}) = 145°$, $AB = 5$ cm, $BC = 4$ cm.

R. Cu rigla gradată construim $[AB]$ de 4 cm. În punctul A construim $[AX$ astfel încît $m(\widehat{XAB}) = 60°$. Cu compasul construim cercul cu centrul în B avînd raza de 2 cm. Se observă că acest cerc nu intersectează $[AX$ în nici-un punct. Deci nu există pe $[AK$ un punct C astfel încît $BC = 2$ cm. Se spune că problema nu are soluţie, adică nu există un triunghi cu datele din problemă.

b) Procedăm asemănător ca la a) şi constatăm din nou că cercul cu centrul în B nu intersectează $[AX$. Deci problema nu are soluţie.

Observaţie. Încă două probleme care întăresc motivul că nu poate fi caz de construcţie situaţia : „două laturi şi un unghi opus uneia din ele".

I.2.15 PO. Construiţi triunghiul ABC, cunoscînd BC, lungimea medianei $[AD]$ şi unghiul ADB format de mediana $[AD]$ cu latura $[BC]$.



R. Considerăm triunghiul ABC. Observăm că problema nu prezintă nici o dificultate. Oricît de mici sau mari ar fi AD şi BC sau măsura unghiului ADB (evident mai mic decît 180°), problema are soluţie.

Construim un segment congruent cu $[BC]$. Construim mijlocul D al acestui segment. În D construim un unghi congruent cu unghiul dat ADB. Pe latura acestui unghi, diferită de $[DB$, fixăm punctul A cu ajutorul lungimii medianei.
Avînd cele trei vîrfuri ale triunghiului, completăm construcţia triunghiului.

I.2.16.M. Arătaţi că nu poate exista un triunghi care are laturile cu următoarele măsuri : a) 4 cm, 9 cm, 3 cm ; b) 4 cm, 9 cm, 14 cm.

R. Cu rigla gradată construim un segment AB de lungime egală cu 9 cm, de exemplu. Construim cercul de centru A şi rază de lungime egală cu 4 cm, apoi cercul de centru B şi rază de lungime egală cu 3 cm. Observăm că aceste cercuri au ca intersecţie mulţimea vidă, deci nu se poate construi un triunghi cu măsurile laturilor, numerele date în problemă. Aşadar nu există triunghiul.

b) Asemănător observăm că cele două cercuri, de exemplu, de raze de lungime 4 cm şi 9 cm nu se intersectează, deci nu există un triunghi cu datele problemei.

Observaţie. Nu întotdeauna în cazul de construcţie : „latură, latură, latură" avem (există) un triunghi cu măsurile laturilor, numerele date.

I.2.17. Se ştiu adevărate următoarele enunţuri : a) $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$; b) $\Delta A'BT \equiv \Delta B'PC'$; c) $\Delta AMN \equiv \Delta AST$. Scrieţi congruenţele care există cu privire la laturile şi unghiurile triunghiurilor respective.

R. Avem : a) $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$, $[AB] \equiv [MN]$, $[AC] \equiv [MP]$, $[BC] \equiv [NP]$; b) $\sphericalangle BA'T \equiv \sphericalangle PB'C'$, $\sphericalangle A'BT \equiv \sphericalangle B'PC'$, $\sphericalangle A'TB \equiv \sphericalangle B'C'P$, $[A'B] \equiv [B'P]$, $[A'T] \equiv [B'C']$, $[BT] \equiv [PC']$; c) $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A$, $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle AST$, $\sphericalangle N \equiv \sphericalangle T$, $[AM] \equiv [AS]$, $[AN] \equiv [AT]$, $[MN] \equiv [ST]$.

I.2.18. Din afirmaţia adevărată : $\Delta A'B'C' \equiv \Delta ABC$ un elev a dat următorul răspuns : $[A'B'] \equiv [AB]$, $[B'C'] \equiv [BC']$, $[CA'] \equiv [C'B]$, $\sphericalangle A' \equiv \sphericalangle A$, $\sphericalangle B' \equiv \sphericalangle B$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$. Este corect răspunsul? Justificaţi.

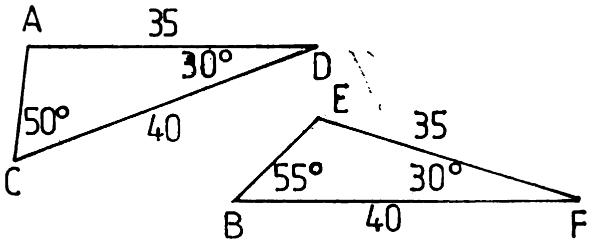
R. Nu. Nu sînt corecte congruenţele $[B'C'] \equiv [BC']$, $[CA'] \equiv [C'B]$. Ele trebuie să fie astfel : $[B'C'] \equiv [BC]$ şi respectiv $[C'B'] \equiv [CB]$.

I.2.19. Se ştie că : $(AB') \equiv (A'B)$ şi $(B'C) \equiv (BC')$. Sînt suficiente aceste congruenţe pentru ca afirmaţia : $\Delta AB'C \equiv \Delta A'BC'$ să fie adevărată? De ce?

R. Nu. Pentru a se îndeplini un caz de congruenţă este nevoie de trei congruenţe. În cazul nostru trebuie sau $\sphericalangle AB'C \equiv \sphericalangle A'BC'$ pentru cazul $L.U.L.$ sau $[AC] \equiv [A'C']$ pentru cazul $L.L.L.$

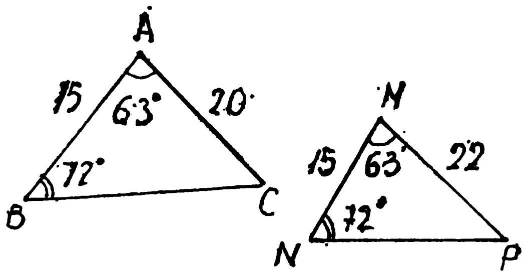
I.2.20. Ce greşeală conţine figura alăturată cu privire la elementele celor două triunghiuri?

R. Avem : $[AD] \equiv [EF]$, $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle EFB$, $[DC] \equiv [FB]$ deci $\Delta ACD \equiv \Delta FBE$ şi rezultă că $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle EBF$; dar aceste unghiuri în figură nu sînt cu măsuri egale.

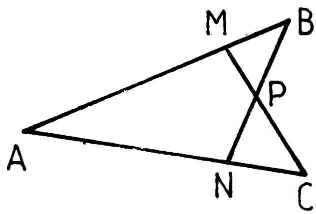


I.2.21. Ce greşeală conţine figura alăturată cu privire la elementele celor două triunghiuri?

Se constată că $\widehat{BAC} \equiv \widehat{NMP}$, $[AB] \equiv [MN]$, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{MNP}$ şi conform unui caz de congruenţă avem că $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$. Din această congruenţă ar rezulta că $[AC] \equiv [MP]$. În cazul nostru $AC = 20$ iar $MP = 22$. Deci, greşeala constă în faptul că laturile AC şi MP nu au măsurile egale.



I.2.22. În desenul alăturat se ştie că $[BP] \equiv [PC]$ şi $[MP] \equiv [NP]$. Demonstraţi că $\sphericalangle ABN \equiv \sphericalangle ACM$.

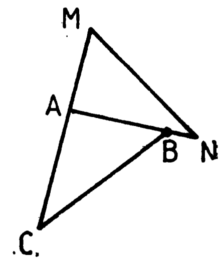


R. Din ipoteză $[BP] \equiv [PC]$ (1) şi $[MP] \equiv [NP]$ (2). Se constată că $\sphericalangle MPB \equiv \sphericalangle NPC$(3) deoarece sînt unghiuri opuse la vîrf. Folosim (1), (2), (3) ; aplicînd un caz de congruenţă a trunghiurilor, (L.U.L.), avem că $\Delta MPB \equiv \Delta NPC$. Din aceasta avem : $\sphericalangle MBP \equiv \sphericalangle NCP$ dar $\sphericalangle MBP = \sphericalangle ABN$ şi $\sphericalangle NCP = \sphericalangle ACM$. Deci : $\sphericalangle ABN \equiv \sphericalangle ACM$.

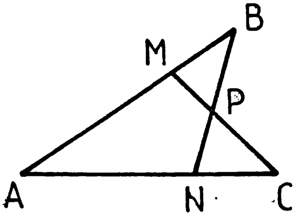
I.2.23^{M}. Triunghiul ABC are $m(\hat{A}) = 90°$, $AC = 4$ cm, $AB = 3$ cm. Dacă „prelungim" latura CA cu $AM = 3$ cm, şi latura AB cu $BN = 1$ cm, comparaţi $[MN]$ cu $[BC]$.

R. „Prelungim" latura CA, considerînd pe semidreapta opusă lui $[AC$ punctul M astfel ca $AM = 3$ cm. Asemănător, avem punctul B ce aparţine la semidreapta opusă lui $[BA$. Din ipoteză $m(\hat{A}) = 90°$ înseamnă $m(\widehat{BAC}) = 90°$, deci şi $m(\widehat{MAN}) = 90°$. Deci $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle MAN$ (1). Constatăm că $AN = AB + BN = 4$ cm $= AC$. Obţinem că $[AN] \equiv [AC]$ (2).

Din ipoteză $AB = 3$ cm şi $AM = 3$ cm deci $[AB] \equiv [AM]$ (3). Folosim (2), (1) şi (3), conform cazului de congruenţă $L.U.L.$, obţinem că $\Delta MAN \equiv \Delta BAC$, de unde $[MN] \equiv [BC]$.



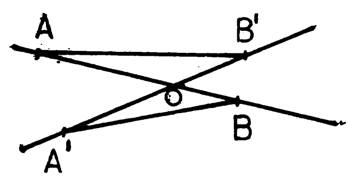
I.2.24.[M]. În desenul alăturat se ştie că $[AM] \equiv [AN]$, $\sphericalangle AMC \equiv \sphericalangle ANB$. Ce se poate spune despre : a) $\sphericalangle B$ şi $\sphericalangle C$? b) $[BN]$ şi $[MC]$?



R. a) Astfel de întrebare se referă, de regulă în probleme, la congruenţa sau necongruenţa unghiurilor respective. Pentru a cerceta dacă unghiurile sînt congruente, folosim *metoda triunghiurilor congruente*. Cercetăm din care triunghiuri fac parte $\sphericalangle B$ şi $\sphericalangle C$. Se observă că $\sphericalangle B$ este unghi în triunghiurile MBP, ABP şi ABN iar $\sphericalangle C$ în triunghiurile NPC, APC şi AMC. Dacă asociem şi afirmaţiile adevărate din ipoteză, la aceste triunghiuri, găsim că trebuie să comparăm triunghiurile ABN şi AMC. Deci, din ipoteză ştim că $[AM] \equiv [AN]$ (1), $\sphericalangle AMC \equiv \sphericalangle ANB$ (2). Cum $\sphericalangle A$ este comun acestor două triunghiuri rezultă, folosind şi relaţiile (1) şi (2), conform cazului *U.L.U.*, că $\Delta ABN \equiv \Delta ACM$. Din această congruenţă avem că $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$.

b) Din congruenţa triunghiurilor anterioare avem că şi $[BN] \equiv [MC]$.

I.2.25[M]. Dr. AB şi dr. $A'B'$ sînt drepte concurente în punctul O astfel încît $[AO] \equiv [A'O]$ şi $[BO] \equiv [B'O]$. Arătaţi că : a) $\Delta AOB' \equiv \Delta A'OB$; b) $\Delta ABB' \equiv \Delta A'B'B$; c) $\Delta ABA' \equiv \Delta A'B'A$.

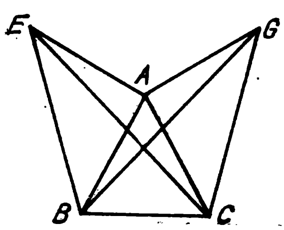


R. Din ipoteză $[AO] \equiv [A'O]$ (1) şi $[OB] \equiv [B'O]$ (2). Deoarece unghiurile AOB' şi $A'OB$ sînt unghiuri opuse la vîrf avem că $\sphericalangle AOB' \equiv \sphericalangle A'OB$ (3). Din (2), (1) şi (3) aplicînd un caz de congruenţă a triunghiurilor, *L.U.L.*, obţinem că $\Delta AOB' \equiv \Delta A'OB$.

b) Din ipoteză $[AO] \equiv [A'O]$ şi $[BO] \equiv [B'O]$ rezultă că $AO + BO = A'O + B'O$ deci $AB = A'B'$ adică $[AB] \equiv [A'B']$ (4). Din congruenţa triunghiurilor de la punctul a) avem : $\sphericalangle OAB' \equiv \sphericalangle OA'B$ (5) şi $[AB'] \equiv [A'B]$ (6). Din (4), (5) şi (6) avem, conform cazului de congruenţă L.U.L., $\Delta ABB' \equiv \Delta A'B'B$.

c) Tot din congruenţa triunghiurilor de la punctul a) avem că $\sphericalangle AB'O \equiv \sphericalangle A'BO$ (7) Din (4), (7) şi (6) rezultă, conform *L.U.L.*, că $\Delta ABA' \equiv \Delta A'B'A$.

I.2.26.[PO]. Se dă triunghiul ABC cu $\hat{A}$ ascuţit. În punctul A considerăm $[AE$ perpendiculară pe dr. AB astfel încît $(AB) \equiv (AE)$ iar E şi C în semiplane opuse determinate de dr. AB. În punctul A mai considerăm $[AG \perp$ dr. AC astfel încît $(AC) \equiv (AG)$ iar G şi B în semiplane opuse determinate de dr. AC. Demonstraţi că : $(EC) \equiv (BG)$.



R. Din ipoteză avem : $(AB) \equiv (AE)$ (1), $(AC) \equiv (AG)$ (2), $[AE \perp$ dr. AB, deci $m(\widehat{EAB}) = 90°$ (3) şi $[AG \perp$ dr. AC, deci $m(\widehat{GAC}) = 90°$ (4). Se constată că $m(\widehat{EAC}) = m(\widehat{EAB}) + m(\widehat{BAC}) = 90° + m(\widehat{BAC})$ şi că $m(\widehat{GAB}) = m(\widehat{GAC}) + m(\widehat{BAC}) = 90° + m(\widehat{BAC})$ (s-au folosit relaţiile (3) şi (4)). Rezultă că $m(\widehat{EAC}) = m(\widehat{GAB})$ deci $\sphericalangle EAC \equiv \sphericalangle GAB$ (5). Din (1),(2) şi (5) găsim că $\Delta EAC \equiv \Delta BAG$ (6) de unde $(EC) \equiv (BG)$.

CAPITOLUL II

Geometrie bazată pe judecată (raționament)

§ 1. Triunghiul isoscel

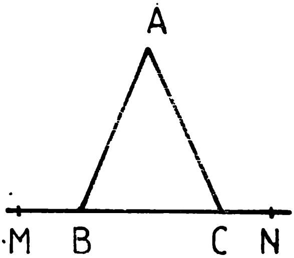
II.1.1. Fie PBC un triunghi isoscel cu baza $[BC]$ și un punct A astfel încît P să fie în interiorul triunghiului ABC. $[CP$ intersectează pe $[AB]$ în M iar $[BP$ intersectează pe $[AC]$ în N. Se știe că $[MP] \equiv [NP]$. Demonstrați că $\sphericalangle ABN \equiv \sphericalangle ACM$.

R. Din ipoteză triunghiul isoscel PBC are baza $[BC]$ deci avem că $[BP] \equiv [PC]$. Dacă alăturăm restul problemei la această congruență obținem problema I.2.22^{M} pag. 110, cu rezolvarea corespunzătoare.

II.1.2. Se dă triunghiul isoscel AMN ($[AM) \equiv [AN]$). Pe $[AM$ se consideră B astfel încît $M \in [AB]$ iar pe $[AN$ punctul C astfel încît $N \in [AC]$. Se știe că $\sphericalangle AMC \equiv \sphericalangle ANB$. Ce se poate spune despre : a) $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle C$? b) $[BN]$ și $[MC]$?

R. Comparați cu problema I.2.24. pag. 111. Rezolvarea este identică.

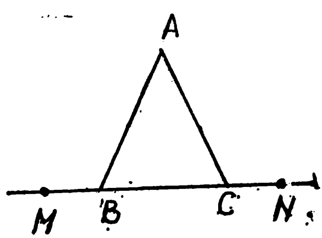
II.1.3. Triunghiul ABC este un triunghi isoscel unde $(AB) \equiv (AC)$. Se știe că $m(\widehat{ABC}) = 40°$. Fie punctele M și N astfel încît $B \in (MC)$ și $C \in (BN)$. Calculați : a) $m(\widehat{ACB})$; b) $m(\widehat{ABM})$; c) $m(\widehat{ACN})$.



R. a) Din ipoteză $(AB) \equiv (AC)$, deci triunghiul isoscel ABC are baza $[BC]$. Aplicăm teorema : Dacă un triunghi este triunghi isoscel, atunci unghiurile de la baza lui sînt unghiuri congruente. În cazul nostru $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$ deci $m(\widehat{ACB}) = 40°$, căci în ipoteză se știe că $m(\sphericalangle ABC) = 40°$.

b) Se observă că $m(\widehat{ABM}) + m(\widehat{ABC}) = 180°$. Deci $m(\widehat{ABM}) = 180° - m(\widehat{ABC}) = 180° - 40° = 140°$; c) $140°$.

II.1.4^{PP}. Triunghiul ABC este un triunghi isoscel cu baza $[BC]$. Fie M și N puncte astfel încît $B \in (MC)$ și $C \in (BN)$. Demonstrați că $\sphericalangle MBA \equiv \sphericalangle NCA$.

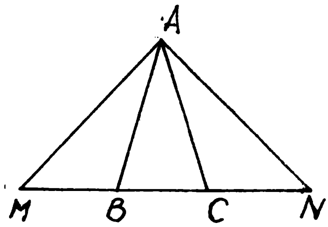


R. Soluția I. Din ipoteză $[BC]$ este baza triunghiului isoscel. Aplicăm teorema : dacă un triunghi este isoscel, atunci unghiurile de la baza lui sînt unghiuri congruente. În cazul nostru, $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$ (1). Din ipoteză, $B \in (MC)$ deci punctele

M, B și C sînt puncte coliniare. Avem că: $m(\widehat{MBA}) + m(\widehat{ABC}) = 180°$, adică $m(\widehat{MBA}) = 180° - m(\widehat{ABC})$ (2). Tot din ipoteză, $C \in (BN)$ deci punctele B, C și N sînt puncte coliniare. Avem că: $m(\widehat{ACB}) + m(\widehat{ACN}) = 180°$, adică $m(\widehat{NCA}) = 180° - m(\widehat{ACB})$ (3). În relațiile (2) și (3) folosim relația (1) și găsim că $\sphericalangle MBA \equiv \sphericalangle NCA$.

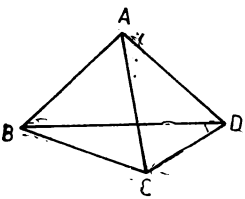
Soluția a II-a: $\sphericalangle MBA$ și $\sphericalangle NCA$ sînt suplementare unghiurilor congruente ale triunghiului ABC, deci sînt congruente.

II.1.5^M. Dacă M și N sînt puncte situate pe „prelungirea" bazei BC a unui triunghi isoscel ABC, astfel încît $[BM] \equiv [CN]$ și B să fie între M și C, iar C între B și N, atunci $[AM] \equiv [AN]$.



R. Din ipoteză triunghiul isoscel ABC are baza BC, deci $[AB] \equiv [AC]$ (1). Din problema anterioară avem că $\sphericalangle MBA \equiv \sphericalangle ACN$ (2). Din ipoteză $[BM] \equiv [CN]$ (3). Din (1), (2) și (3), aplicînd un caz de congruență a triunghiurilor, *L.U.L.*, rezultă că $\Delta MBA \equiv \Delta NCA$ și deci, $[AM] \equiv [AN]$.

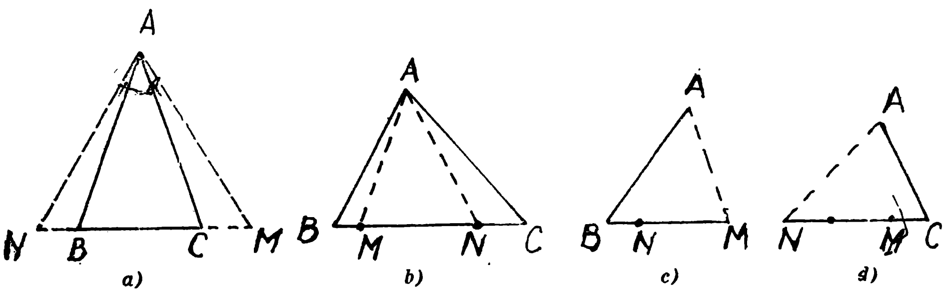
II.1.6^M. În figura alăturată, triunghiurile ABC și ADC sînt triunghiuri isoscele $[AB] \equiv [AC]$, $[AC] \equiv [AD]$. Demonstrați că $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ADB$.



R. Deoarece triunghiurile sînt isoscele (din ipoteză) și se dau care sînt laturile congruente, observăm că datorită faptului că relația „congruent" între segmente este o relație tranzitivă, din $[AB] \equiv [AC]$ și $[AC] \equiv [AD]$ obținem că $[AB] \equiv [AD]$ deci ΔABD este un triunghi isoscel. Conform teoremei: dacă un triunghi este triunghi isoscel atunci el are unghiurile de la bază congruente, rezultă că $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ADB$.

Observație. Dacă în ipoteză nu se indicau laturile congruente la cele două triunghiuri, problema devenea dificilă din cauza situațiilor ivite. Cercetați, de exemplu, situația cînd $[BC] \equiv [AC]$ și $[AC] \equiv [AD]$.

II.1.7^M. Perpendiculara în A pe latura AB a unui triunghi isoscel ABC „taie" baza BC în M, iar perpendiculara în A pe latura AC „taie" BC în N. Demonstrați că: a) $[BM] \equiv [CN]$; b) ΔAMN este un triunghi isoscel.



R. a) Dacă sîntem atenți la textul ipotezei, adică la cuvintele „taie" baza BC, observăm că fig. a) nu convine problemei căci în cazul cînd triunghiul ABC are în A un unghi ascuțit, perpendicularele respective nu intersectează baza BC.

Cazul cînd $m(\hat{A}) = 90°$ se exclude căci $M = C$ şi $B = N$. Rămîne situaţia cînd $m(\hat{A}) > 90°$ adică fig. b). Pentru a compara comod triunghiurile respective, ele au fost desenate „separat" în fig. c), d).

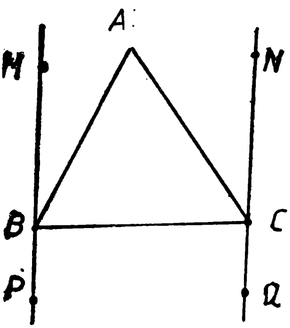
Din ipoteză ΔABC este un triunghi isoscel cu baza BC, deci $[AB] \equiv [AC]$ (1). Fiind triunghi isoscel, are şi unghiurile de la bază congruente (conform teoremei), rezultă că $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle ACN$ (2). Din ipoteză, dr. $AM \perp$ dr. AB, deci $m(\widehat{BAM}) = 90°$. (3) Tot din ipoteză, dr. $AN \perp$ dr. AC, deci $m(\widehat{CAN}) = 90°$ (4). Din (3) şi (4) avem că $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle CAN$ (5). Din (1) (2) şi (5), folosind un caz de congruenţă a triunghiurilor, *U.L.U.*, avem $\Delta BAM \equiv \Delta CAN$ şi deci $[BM] \equiv [CN]$.

b) *Metoda I.* Din congruenţa celor două triunghiuri (BAM şi CAN), rezultă $[AM] \equiv [AN]$. Deoarece triunghiul AMN are două laturi congruente, conform definiţiei, este un triunghi isoscel.

Metoda a II-a. Tot din congruenţa celor două triunghiuri, rezultă că $\sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle ANC$. Deoarece triunghiul ANM are două unghiuri congruente, conform unei teoreme, rezultă că este un triunghi isoscel.

Observaţie : în aceeaşi ipoteză se poate cere să se demonstreze că $[BN] \equiv [MC]$. Pentru aceasta demonstraţi mai întîi că $\sphericalangle BAN \equiv \sphericalangle CAM$ şi apoi folosiţi cazul *L.U.L.*

II.1.8[PP]. Perpendicularele în B şi C pe baza BC a unui triunghi isoscel ABC formează cu $[BA$ şi respectiv cu $[CA$ unghiuri congruente.

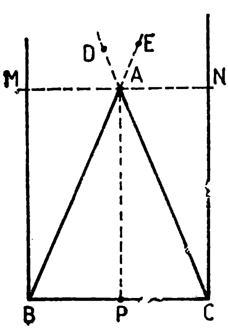


R. Folosim notaţiile din desenul alăturat. Se observă că datorită dreptei MP care este perpendiculară în B pe $[BC]$ avem două unghiuri care au ca latură pe $[BA$. Acestea sînt: $\sphericalangle MBA$ şi $\sphericalangle ABP$. Asemănător, datorită dreptei NQ avem alte două unghiuri care au ca latură pe $[CA$: $\sphericalangle NCA$ şi $\sphericalangle ACQ$. Din ipoteză $[BC]$ este baza triunghiului ABC, deci conform teoremei : Dacă un triunghi este triunghi isoscel atunci unghiurile lui de la bază sînt congruente, avem : $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$ (1). Deoarece, din ipoteză, dr. $MB \perp$ dr. BC şi dr. $NC \perp$ dr. BC avem că $\sphericalangle MBC \equiv \sphericalangle NCB$ (2). Dar $m(\widehat{MBA}) = m(\widehat{MBC}) - m(\widehat{ABC})$ căci $[BA$ este în interiorul lui $\sphericalangle MBC$.

Asemănător, $m(\widehat{NCA}) = m(\widehat{NCB}) - m(\widehat{ACB})$. Folosim în ultimele două egalităţi relaţiile (1) şi (2) şi constatăm că $\sphericalangle MBA \equiv \sphericalangle NCA$.

Se demonstrează apoi că avem şi $\sphericalangle PBA \equiv \sphericalangle QCA$.

II.1.9.[M]. Perpendicularele în B şi C pe baza BC a unui triunghi isoscel ABC „întîlnesc" bisectoarea unghiului format de $[AB$ şi de „prelungirea" semidreptei notată $[AC$, respectiv bisectoarea unghiului format de $[AC$ şi de „prelungirea" semidreptei notată $[AB$ în punctele M şi N. Demonstraţi că $[BM] \equiv [CN]$, (text completat).



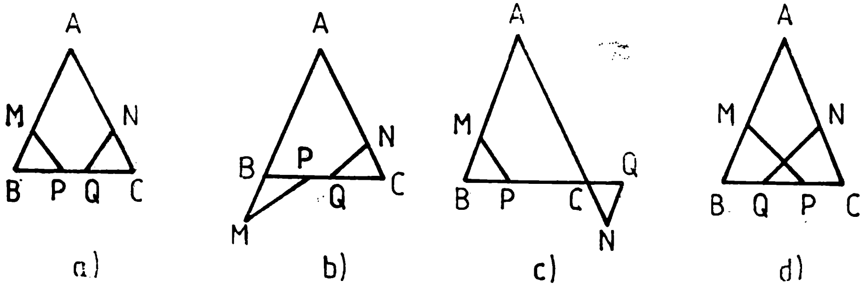
R. Notăm cu $[AE$ opusa lui $[AB$ şi cu $[AD$ opusa lui $[AC$. Unghiurile DAB şi EAC sînt unghiuri opuse la vîrf. Din ipoteză $[AM$ şi $[AN$ sînt bisectoarele lor respective. Se ştie că bisectoarele a două unghiuri opuse formează cu laturile unghiurilor, patru unghiuri congruente. În cazul nostru, avem $\sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle NAC$ (1).

Folosind problema anterioară putem spune că $\sphericalangle MBA \equiv \sphericalangle NCA$ (2). Din ipoteză triunghiul ABC este triunghi isoscel cu baza $[BC]$, deci $[AB] \equiv [AC]$ (3).

Din (1), (2) şi (3) obţinem că $\Delta MBA \equiv \Delta NCA$ (*U.L.U.*), deci rezultă concluzia problemei : $[BM] \equiv [CN]$.

II.1.10[M]. În triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) avem $[BM] \equiv [CN]$ ($M \in$ dr.AB, $N \in$ dr.AC) şi $[BP] \equiv [QC]$ (P, $Q \in$ dr.BC). Demonstraţi că $[MP] \equiv [NQ]$.

R. Din ipoteză avem în ΔABC, $[AB] \equiv [AC]$, deci baza este $[BC]$ şi cum unghiurile de la bază sînt congruente avem $\sphericalangle MBP \equiv \sphericalangle NCQ$ (1). Deasemenea, $[BM] \equiv [CN]$ (2) şi $[BP] \equiv [QC]$ (3). Din (1), (2), (3) rezultă că $\Delta MBP \equiv \Delta NCQ$ şi deci $[MP] \equiv [NQ]$.



Observaţie. Problema nu este complet rezolvată. În ipoteză avem că $M \in$ dr. AB şi $N \in$ dr. AC ar însemna că am avea şi o situaţie ca în figura b), cînd triunghiurile MBP şi NCQ nu mai sînt congruente şi deci $[MP] \not\equiv [NQ]$. Am mai putea avea şi situaţie ca în figura c), cînd $\Delta MBP \equiv \Delta NCQ$ deoarece $[BM] \equiv [CN]$, $[BP] \equiv [CQ]$ şi $\sphericalangle MBP \equiv \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle QCN$. Rezultă că $[MP] \equiv [NQ]$. Desigur, mai sînt situaţii pe care nu le mai enumerăm. Pentru a nu avea multe situaţii şi pentru ca afirmaţia $[MP] \equiv [NQ]$ să fie adevărată, putem pune restricţia în ipoteză ca $M \in [AB]$, $N \in [AC]$, $P \in [BC]$ şi $Q \in [BC]$. În acest mod nu avem decît situaţiile din desenele *a* şi *d*.

II.1.11. a) Triunghiul ABC are m($\sphericalangle A$)=25° iar m($\sphericalangle B$)=25°. Triunghiul MNP are unghiul MNP de 48° iar m($\hat{P}$)=47°60′. Sînt cele două triunghiuri isoscele? b) Se dă triunghiul ABD cu m($\hat{B}$) = 80° iar $C \in (BD)$ astfel încît m($\widehat{ACD}$) = 100°. Ce fel de triunghi este triunghiul ABC?

R. a) Aplicăm teorema : dacă un triunghi are două unghiuri congruente atunci el este un triunghi isoscel. În cazul nostru ΔABC are două unghiuri de aceeaşi măsură, adică congruente, deci este isoscel. Deoarece m($\hat{P}$) = 48° şi ΔMNP este isoscel. b) Punctele B, C, D sînt coliniare deci m($\widehat{ACB}$) + m($\widehat{ACD}$) = 180°. Din aceasta, avem că m($\widehat{ACB}$) = 180° − m($\widehat{ACD}$) = = 180° − 100° = 80°.

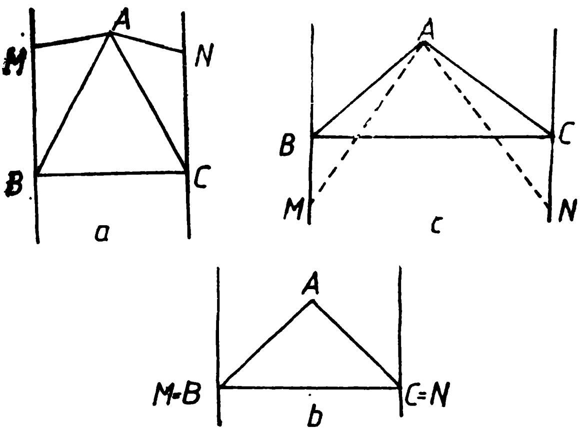
Deoarece ΔABC are două unghiuri congruente, el este un triunghi isoscel.

II.1.12[M]. Se dă triunghiul isoscel ABC. Perpendiculara în B pe baza BC „întîlneşte" perpendiculara în A pe $[AC]$ în M. Perpendiculara în C pe baza BC „întîlneşte" perpendiculara în A pe $[AB]$ în punctul N. Demonstraţi că $[MB] \equiv [NC]$.

R. Un triunghi isoscel poate avea unghiul de la vîrf : unghi ascuţit, unghi drept, unghi obtuz. Fiecare situaţie este pusă în evidenţă în desenul alăturat.

Vom face raţionament pentru fiecare situaţie.

a) Din ipoteză baza triunghiului ABC este $[BC]$ deci avem $[AB] \equiv [AC]$ (1). În problema II.1.8 P.P.pag,114 am demonstrat că $\sphericalangle MBA \equiv \sphericalangle NCA$ (2). Din ipoteză dr. $MA \perp$ dr. AC deci $\sphericalangle MAC$ este unghi drept. Deasemenea, dr. $NA \perp$ dr. AB deci $\sphericalangle NAB$ este unghi drept. Rezultă că $\sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle NAB$. Se observă că unghiurile MAB şi NAC au acelaşi complement, pe $\sphericalangle BAC$. Se ştie că două unghiuri care au acelaşi complement sînt unghiuri congruente. Obţinem că $\sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle NAC$ (3).



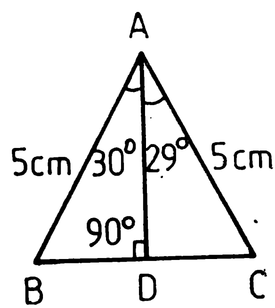
Din (1), (2), (3) folosind unul din cazurile de congruență a triunghiurilor ($U.L.U.$), rezultă că $\Delta MAB \equiv \Delta NAC$ și deci $[MB] \equiv [NC]$.

b) În această situație perpendiculara în A pe $[AC]$ se confundă cu dr. AB și intersectează perpendiculara în B pe $[BC]$ în B deci $M = B$ și nu se poate vorbi de $[MB]$ din concluzie. Asemănător, nu se poate vorbi de segmentul $[NC]$

c) Ca și în cazul a), $[AB] \equiv [AC]$ (1). Deasemenea, în problema XII. 1.8^{PP}. pag. 114, s-a regăsit că $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle ACN$ (2). Din ipoteză dr. $MA \perp$ dr. AC, deci $\sphericalangle MAC$ este unghi drept. La fel, $\sphericalangle NAB$ este unghi drept. Rezultă că $\sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle NAB$. Se observă că $[AM$ și $[AN$ sînt incluse în interiorul unghiului obtuz, deci $m(\widehat{BAM}) = m(\widehat{BAC}) - m(\widehat{MAC}) = m(\widehat{BAC}) - 90°$ și $m(\widehat{CAN}) = m(\widehat{BAC}) - m(\widehat{BAN}) = m(\widehat{BAC}) - 90°$. Din aceste două egalități putem spune că $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle CAN$ (3). Din (1), (2), (3) avem că $\Delta MAB \equiv \Delta NAC$ și deci $[MB] \equiv [NC]$.

Observație. Demonstrația de la a) se deosebește de cea de la c) prin faptul că relația (3) a fost justificată cu cunoștințe diferite.

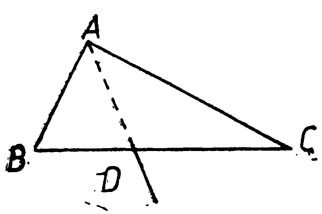
II.1.13. Ce greșeală conține desenul alăturat?



R. Dacă admitem că $AB = AC = 5$ cm înseamnă că triunghiul ABC este isoscel cu unghiul de la vîrf, $\hat{A}$. Dacă admitem că $[AD]$ este înălțime, căci $m(\widehat{ADB}) = 90°$, rezultă că înălțimea corespunzătoare bazei este și bisectoare și ar trebui ca $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{DAC})$. Greșeala constă în faptul că unghiurile BAD și DAC nu sînt congruente.

Dacă admitem că aceste unghiuri nu sînt congruente, înseamnă că $[AD$ nu este bisectoare și deci nu este nici înălțime, iar greșeala constă în faptul că $m(\widehat{ADB}) = 90°$.

II.1.14^M. Demonstrați că dacă una din bisectoarele unui unghi al unui triunghi determină cu latura a treia unghiuri congruente, triunghiul este un triunghi isoscel.

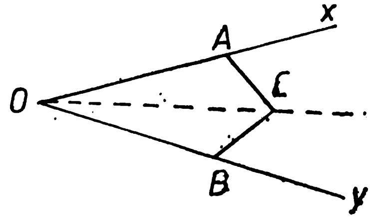


R. Notăm triunghiul cu ABC. Să alegem ca unghi unghiul cu vîrful în A. Notăm cu $[AD$, bisectoarea acestuia. În acest mod avem că $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle DAC$ (1). Observăm că $[AD$ intersectează $[BC]$ și formează patru unghiuri. Conform ipotezei, aceste unghiuri sînt congruente. Putem deci scrie că $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle ADC$ (2).

Din faptul că avem (1), (2) și $[AD]$ latură comună pentru triunghiurile ADB și ADC putem scrie conform cazului de congruență $U.L.U.$, că $\Delta ADB \equiv \Delta ADC$ de unde obținem că $[AB] \equiv [AC]$ și deci triunghiul ABC este un triunghi isoscel.

Observație. Cele patru unghiuri cu vîrful în D sînt unghiuri congruente, din ipoteză, deci fiecare este drept. Aceasta înseamnă că dr. $AD \perp$ dr. BC și deci $[AD]$ joacă rol de înălțime în ΔABC. Problema se mai poate enunța astfel: Dacă într-un triunghi una din bisectoarele unui unghi conține și înălțimea triunghiului („bisectoarea este și înălțime") atunci triunghiul este un triunghi isoscel. Acest enunț poate fi folosit frecvent în diferite probleme.

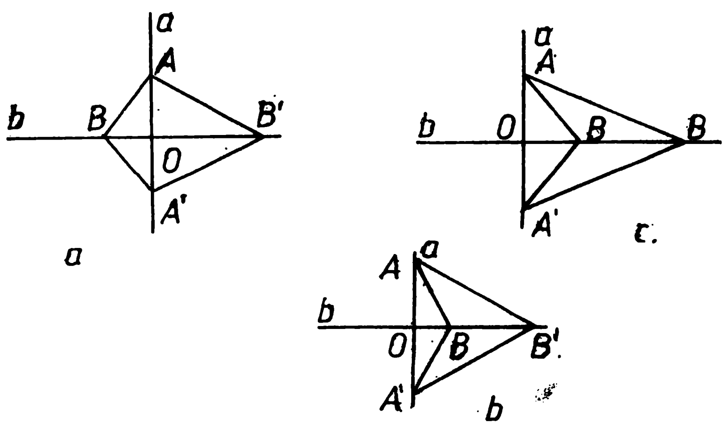
II.1.15[M]. Pe laturile $[Ox$ și $[Oy$ ale unui unghi nealungit xOy alegem punctele A și B așa încît $[OA] \equiv [OB]$, iar în interiorul unghiului alegem un punct C astfel ca $[AC] \equiv [BC]$. Demonstrați că $[OC$ este bisectoarea unghiului.



R. Din ipoteză: $[OA] \equiv [OB]$ (1) și $[AC] \equiv [BC]$ (2). Cum latura $[OC]$ este comună, folosind cazul $L.L.L.$ de congruență a triunghiurilor și relațiile (1) și (2) avem că $\Delta OAC \equiv \Delta OBC$. De aici obținem că $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOC$ și deci $[OC$ este bisectoarea unghiului AOB pentru că C este un punct în interiorul lui.

Observație. Din ipoteză: $[OA] \equiv [OB]$. Rezultă că triunghiul AOB este un triunghi isoscel. Am demonstrat, de fapt în această problemă, că un punct C, luat la întîmplare, la distanțe egale $AC = BC$ de vîrfurile unui triunghi isoscel, aparține bisectoarei unghiului de la vîrf (cînd C este în interiorul unghiului respectiv) sau opusei ţale (cînd C este în exteriorul unghiului de la vîrf al triunghiului isoscel). Se poate demonstra să acest punct aparține și mediatoarei $[AB]$ ceea ce duce la concluzia că într-un triunghi isoscel mediatoarea bazei conține bisectoarea unghiului de la vîrf.

II.1.16[PP]. Dacă a și b sînt două drepte perpendiculare ce se intersectează în punctul O, dacă A și A' sînt două puncte ce aparțin lui a, diferite între ele și diferite de O, astfel încît $(OA) \equiv (OA')$ și dacă B și B' sînt două puncte ce aparțin lui b, diferite între ele și diferite de O, demonstrați că triunghiurile ABB' și $A'BB'$ sînt triunghiuri congruente.



R. Din ipoteză știm că A, A' și O sînt diferite între ele. Tot din ipoteză, $(OA) \equiv (OA')$. Aceste aspecte permit să afirmăm că $O \in (AA')$ și că O este mijlocul segmentului AA'. Raționamentul nu se modifică cu nimic dacă punctele B, O și B' sînt în diferite situații, ca în desenul alăturat. Din ipoteză $a \perp b$, deci în triunghiurile ABA' și $AB'A'$, $[OB]$ și respectiv $[OB']$ sînt înălțimi. Deoarece O este mijlocul lui $[AA']$ rezultă că $[OB]$ și $[OB']$ sînt și mediane în triunghiurile respective.

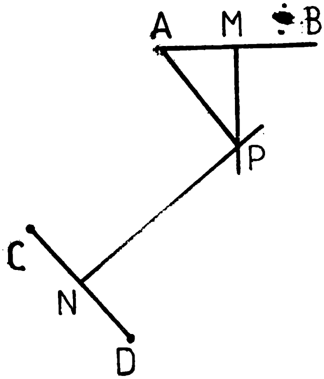
Aplicăm teorema : dacă într-un triunghi înălţimea este şi mediană, atunci triunghiul este un triunghi isoscel. Obţinem că triunghiurile ABA' şi $AB'A'$ sînt triunghiuri isoscele cu baza $[AA']$. Avem, deci, $[AB] \equiv [BA']$ şi $[AB'] \equiv [A'B']$. Aceste relaţii şi faptul că $[BB']$ este latura comună, permit să afirmăm că $\Delta ABB' \equiv \Delta A'BB'$ conform cazului de congruenţă a triunghiurilor *L.L.L.*

Observaţie. În această problemă se constată că dreapta b este mediatoarea lui $[AA']$. În cursul demonstraţiei am arătat că triunghiurile ABA' şi $AB'A'$ sînt triunghiuri isoscele. Aşadar punctele B şi B', care sînt oarecare şi aparţin mediatoarei unui segment, au format triunghiuri isoscele cu baza segmentul respectiv. Din aceasta, datorită faptului că distanţele BA şi BA' sînt egale precum şi distanţele $B'A$ şi $B'A'$ sînt egale, putem afirma următorul adevăr : punctele ce aparţin mediatoarei unui segment sînt, fiecare, la egală distanţă de „capetele" acelui segment.

II.1.17[M]. Se dă $[AB] \equiv [CD]$, M şi N sînt respectiv mijloacele celor două segmente. Mediatoarele lor MP şi NP au punctul comun P. Demonstraţi :

a) Dacă $[MP] \equiv [NP]$, atunci $[AP] \equiv [BP] \equiv [PC] \equiv [PD]$;

b) Dacă $[AP] \equiv [PD]$, atunci $[BP] \equiv [CP]$ şi $[MP] \equiv [NP]$.



R. a) Din ipoteză dr. MP este mediatoarea lui $[AB]$. Din observaţia de la problema anterioară rezultă că triunghiul APB este un triunghi isoscel deci $[AP] \equiv [BP]$ (1).

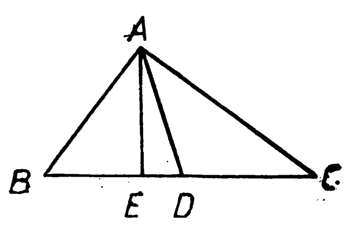
Asemănător, deducem că ΔPCD este un triunghi isoscel, deci $[PC] \equiv [PD]$ (2). Din ipoteză $[AB] \equiv [CD]$, deci $AM = \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} = CN$, adică $[AM] \equiv [CN]$ (3). Din ipoteză $[MP] \equiv [NP]$ (4). Cum dr. MP este mediatoare, avem că $m(\widehat{AMP}) = 90°$. La fel avem $m(\widehat{CNP}) = 90°$. Rezultă că $\sphericalangle AMP \equiv \sphericalangle CNP$ (5).

Din (3), (4) şi (5), conform cazului *L.U.L.*, rezultă că $\Delta AMP \equiv \Delta CNP$, de unde avem că $[AP] \equiv [PC]$. Această relaţie „leagă" relaţiile (1) şi (2) şi obţinem concluzia problemei.

b) Din ipoteză dr. MP este mediatoare deci ΔAPB este isoscel. La fel, ΔPCD este isoscel. Ştim din ipoteză că $[AB] \equiv [CD]$ şi $[AP] \equiv [PD]$ rezultă că cele două triunghiuri isoscele sînt congruente. Din această afirmaţie avem că $[BP] \equiv [CP]$. Dacă triunghiurile isoscele sînt congruente, atunci şi înălţimile corespunzătoare bazelor sînt congruente, deci $[MP] \equiv [NP]$.

II.1.18[PO]. Construiţi triunghiul ABC cunoscînd mediana $[AD]$ congruentă cu latura $[AB]$ a triunghiului şi ştiind că mediana $[AD]$ formează cu înălţimea $[AE]$ un unghi de 30°. Ce fel de triunghi obţinem ? Justificaţi răspunsul.

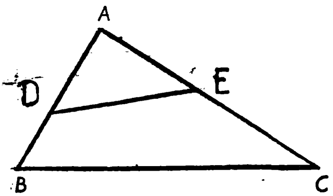
R. Considerăm triunghiului ABC. $[AD]$, fiind congruent cu $[AB]$, triunghiul ABD este triunghi isoscel. Înălţimea AE a triunghiului ABC este şi înălţimea triunghiului ABD. Se ştie că într-un triunghi isoscel înălţimea este şi bisectoare. Dacă unghhiul format de mediana AD cu înălţimea AE este un unghi de 30°, atunci triunghiul ABD este triunghi echilateral, deci unghiul B, al triunghiului ABC, este un unghi de 60°, iar mediana AD este congruentă cu $[BD]$, jumătatea laturii BC. Acum se poate realiza construcţia. Construim prima dată triunghiul echilateral de latură AD.



Pe $[BD$ construim un segment DC congruent cu $[BD]$ şi astfel am obţinut toate vîrfurile triunghiului ABC.

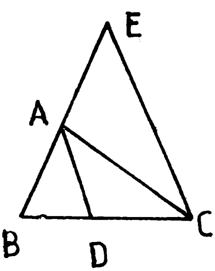
§2. Paralelism în plan

II.2.1. Folosiţi figura alăturată şi denumiţi perechile de unghiuri: ADE şi ABC, AED şi ACB. Este pusă în evidenţă în desen situaţia cînd se poate vorbi de o pereche de unghiuri alterne interne?



R. Corespondente. Da, unghiurile AED şi EDB sau unghiurile ADE şi DEC.

II.2.2. Din desenul alăturat enumeraţi perechi de unghiuri alterne interne şi apoi corespondente.

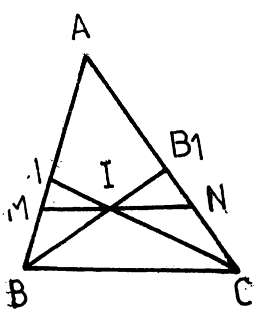


R. Alterne interne sînt unghiurile: $\sphericalangle ADC$ şi $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle CDA$ şi $\sphericalangle BAD$ etc. Corespondente sînt unghiurile: $\sphericalangle BDA$ şi $\sphericalangle DCE$ etc.

II.2.3. În fig. de la problema II.2.1 avem $m(\widehat{EDB}) = 100°$ şi $m(\widehat{ABC}) = 80°$. Cercetaţi dacă unghiurile AED şi ACB sînt congruente.

R. Unghiurile ADE şi EDB sînt adiacente suplementare, deci $m(\widehat{ADE}) = 180° - m(\widehat{EDB}) = 180° - 100° = 80°$. Folosim teorema: dacă două drepte (dr. DE şi dr. BC) formează cu o secantă, dr. AB, unghiuri corespondente congruente atunci cele două drepte sînt drepte paralele Deoarece $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ABC$, rezultă că dr. $DE \parallel$ dr. BC. Folosim teorema: dacă două drepte sînt drepte paralele (dr. DE şi dr. BC) atunci formează cu o secantă, dr. AC, unghiuri corespondente congruente. Deci $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle ACB$.

II.2.4 P.O.M.. Bisectoarele interioare ale unghiurilor $\hat{B}$ şi $\hat{C}$ ale unui triunghi ABC se intersectează în punctul I. Prin punctul I considerăm dreapta MN paralelă cu BC. Arătaţi că $MB + NC = MN$.

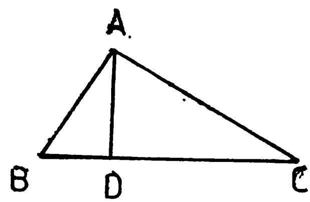


R. Unghiurile $\widehat{MIB}$ şi $\widehat{IBC}$ sînt congruente, fiind unghiuri alterne interne (dr. $MN \parallel$ dr. BC, BI secantă). Dar unghiurile $\widehat{IBC}$ şi $\widehat{IBM}$ sînt congruente, fiind jumătăţile unghiului ABC. De aici rezultă că şi unghiurile $\widehat{MIB}$ şi $\widehat{IBM}$ sînt congruente. Atunci triunghiul BIM este isoscel şi $(MI) \equiv (MB)$.

La fel $\widehat{NIC} \equiv \widehat{ICB}$ (unghiuri alterne interne) și $\widehat{NCI} \equiv \widehat{ICB}$ (CI bisectoare). Din aceste relații obținem că $\sphericalangle NIC \equiv \sphericalangle NCI$.

Deci și triunghiul ICN este isoscel și $(NI) \equiv (NC)$. Avem $MN = MI + IN = MB + NC$

II.2.5. Într-un triunghi dreptunghic în A, ABC, se consideră înălțimea $[AD]$. Demonstrați că fiecare unghi ascuțit este congruent cu unghiul format de înălțime și cateta ce este latură pentru celălalt unghi ascuțit, adică $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle DAC$ și $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BAD$.



R. Triunghiul ABC este un triunghi dreptunghic în A, deci $m(\widehat{ABC}) = 90° - m(\widehat{ACB})$ (1). Triunghiul ADC este un triunghi dreptunghic în D, deci $m(\widehat{ACB}) = 90° - m(\widehat{DAC})$ (2). În (1) folosim (2) și avem :

$$m(\widehat{ABC}) = 90° - [90° - m(\widehat{DAC})] = 90° - 90° + m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{DAC}).$$

Aceasta ne arată că $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle DAC$. Asemănător, găsim cealaltă congruență.

II.2.6. Două triunghiuri ABC și $A'B'C'$ au unghiurile B și B', C și C' respectiv complementare. Cum sînt unghiurile A și A'?

R. Faptul că $\hat{B}$ și $\hat{B}'$ sînt complementare se scrie astfel : $m(\hat{B}) = 90° - m(\hat{B}')$ (1), iar că $\hat{C}$ și $\hat{C}'$ sînt complementare, astfel : $m(\hat{C}) = 90° - m(\hat{C}')$ (2). În triunghiul ABC avem : $m(\hat{A}) = 180° - [m(\hat{B}) + m(\hat{C})]$. Folosim (1) și (2) :

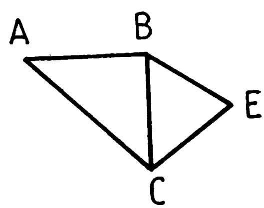
$$m(\hat{A}) = 180° - [90° - m(\hat{B}') + 90° - m(\hat{C}')] = 180° - 90° + m(\hat{B}') - 90° + m(\hat{C}') = m(\hat{B}') + m(\hat{C}') = 180° - m(\hat{A}').$$ Deci $m(\hat{A}) = 180° - m(\hat{A}')$ adică $\hat{A}$ și $\hat{A}'$ sînt unghiuri suplementare.

II.2.7. Un triunghi isoscel ABC, $[AB] \equiv [BC]$, cîte unghiuri drepte are? Care este baza lui?

R. Deoarece $[AB] \equiv [BC]$ unghiul de la vîrf este $\sphericalangle ABC$. Se știe că orice triunghi nu poate să aibă decît un singur unghi drept căci dacă ar avea două suma măsurilor celor trei unghiuri depășește 180°. Și în cazul triunghiului isoscel avem tot un singur unghi drept. Acesta este unghiul de la vîrf ; deci baza triunghiului isoscel este latura opusă unghiului drept, adică $[AC]$.

II.2.8. ABC este un triunghi dreptunghic isoscel cu unghiul drept în B iar BCE este un triunghi echilateral. Calculați măsura unghiului BAE.

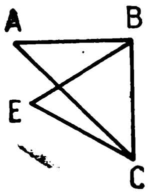
R. Sînt două situații : a) A și E în semiplane opuse determinate de dr. BC ; b) A și E în același semiplan.



a)

a) Deoarece B este unghiul drept avem $[AB] \equiv [BC]$. Triunghiul echilateral are una din laturi pe $[BC]$. Cum $[BC] \equiv [BE]$ rezultă că $[AB] \equiv [BE]$ deci ΔABE este isoscel cu $m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{CBE}) = 90° + 60° = 150°$. Unghiurile de la baza triunghiului isoscel sînt congruente, deci

$$m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{BEA}) = \frac{180° - 150°}{2} = \frac{30°}{2} = 15°.$$



b)

b) De la situaţia a) rămîne valabil că triunghiul ABE este triunghi isoscel; cum $[BE$ este în interiorul unghiului drept ABC, avem $m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{ABC}) - m(\widehat{CBE}) = 90° - 60° = 30°$. În continuare avem

$$m(BAE) = m(BEA) = \frac{180° - 30°}{2} = \frac{150°}{2} = 75°.$$

II.2.9[PP]**.** Un triunghi nu poate să aibă decît un singur unghi obtuz.

R. Demonstrăm aceasta prin metoda reducerii la absurd. Presupunem că un triunghi poate să aibă două unghiuri obtuze. În această situaţie suma măsurilor lor este mai mare decît 180°, ceea ce contrazice teorema că suma măsurilor celor trei unghiuri ale unui triunghi este egală cu 180°. Deci presupunerea nu este adevărată. Rămîne că un triunghi nu poate să aibă decît un singur unghi obtuz.

II.2.10. Un triunghi isoscel are un unghi obtuz. Care este baza?

R. Orice triunghi nu are decît un singur unghi obtuz. Aceasta s-a demonstrat în problema anterioară. Unghiul obtuz în triunghiul isoscel este unghiul de la vîrf. Demonstrăm aceasta prin metoda reducerii la absurd: presupunem că unghiul obtuz este unghi alăturat bazei. Se ştie că unghiurile alăturate bazei în triunghiul isoscel sînt congruente. Deci înseamnă că acest triunghi are două unghiuri obtuze, ceea ce contrazice afirmaţia demonstrată în problema anterioară. Aşadar presupunerea noastră nu poate fi adevărată şi a rămas că unghiul obtuz este unghiul de la vîrf. În această situaţie baza triunghiului isoscel este latura opusă unghiului obtuz

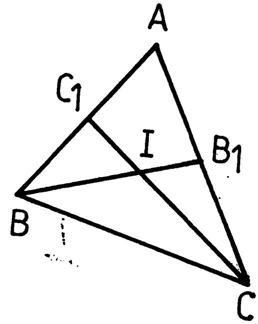
II.2.11. Triunghiul ABC este un triunghi isoscel cu $\sphericalangle ABC$ de 100°. Care sînt laturile congruente?

R. Triunghiul este isoscel cu un unghi obtuz. Acesta este unghiul de la vîrf, deci baza este $[AC]$ iar $(AB) \equiv (BC)$.

II.2.12. Despre triunghiul isoscel ABC, cu $m(\widehat{ABC}) = 20°$ un elev a afirmat că baza lui este $[BC]$. Are dreptate?

R. Are dreptate în cazul cînd avem $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB}) = 20°$ şi deci $m(\widehat{BAC}) = \frac{180 - 2 \cdot 20°}{2} = 140°$. Cum acesta este obtuz, baza este latura opusă lui, adică $[BC]$. Dar se poate ca unghiul ABC să fie unghi de la vîrf celelalte unghiuri congruente avînd cîte 80° şi baza să nu fie $[BC]$, ci $[AC]$.

II,2.13[M]**.** Să se demonstreze că măsura unghiului format de bisectoarele interioare a două unghiuri ale unui triunghi este egală cu măsura unui unghi drept plus jumătate din măsura unghiului al treilea.



R. Fie triunghiul ABC, bisectoarele $[BB_1$ şi $[CC_1$ iar punctul lor de intersecţie I. În triunghiul BCI avem:

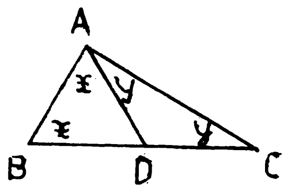
$$m(\widehat{BIC}) = 180° - [m(\widehat{IBC}) + m(\widehat{ICB})] = 180° -$$

$$- \left(\frac{m(\hat{B})}{2} + \frac{m(\hat{C})}{2}\right) = 180° - \frac{m(\hat{B}) + m(\hat{C})}{2} = 180° - \frac{180° - m(\hat{A})}{2} =$$

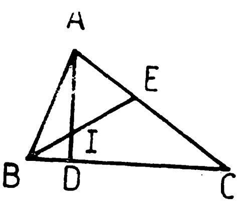
$$= 180° - 90° + \frac{m(\hat{A})}{2} = 90° + \frac{m(\hat{A})}{2}.$$

II.2.14ᴹ. Demonstrați că orice triunghi în care lungimea medianei este cît jumătate din lungimea laturii pe care „cade“, este un triunghi dreptunghic.

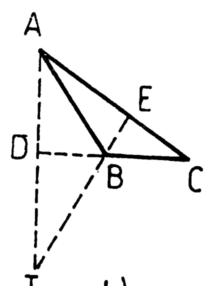
R. Notăm ABC triunghiul în care (AD) este mediană. Din ipoteză avem $AD = BC : 2$. Deoarece D este mijloc avem că $AD = BD = DC$. Obținem că ΔABD este isoscel, deci $m(\widehat{DBA}) = m(\widehat{DAB}) = x$ și că ΔADC este isoscel, deci $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{DCA}) = y$. Se știe că suma unghiurilor unui triunghi este $180°$. Avem că: $m(\widehat{DBA}) + m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{DCA}) = 180°$, adică $x + x + y + y = 180$, adică $2x + 2y = 180$. Ace st : : e dă că $x + y = 90°$ deci $m(\widehat{BAC}) = 90°$, ceea ce demonstrează că ΔABC este un triunghi drepunghic.



II.2.15ᴹ. ABC un triunghi și fie $[AD]$ — înălțimea din A și BE — bisectoarea din B. Fie I — intersecția dreptelor BE și AD. Să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului ABC știind că triunghiurile ADC și BIA sînt isoscele.



a)



b)

R. Considerăm cazul cînd $D \in (BC)$ca în figura a).

În triunghiul isoscel DCA unghiul ADC este unghi drept, deci unghiurile ascuțite sînt de cîte $45°$, adică $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{DCA}) = 45°$.

Triunghiul BIA fiind isoscel cu baza $[AB]$, căci unghiul AIB este obtuz, deoarece unghiul BID este ascuțit, unghiurile IAB și ABI au măsurile egale cu jumătate din măsura unghiului ABC.

Suma măsurilor unghiurilor triunghiului ABC poate fi scrisă astfel:

$$m(\widehat{CAB}) + m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{BCA}) = 180°, \text{ sau} \left(45° + \frac{m(\widehat{ABC})}{2}\right) + m(\widehat{ABC}) + 45° = 180°$$

Efectuînd calculele obținem $m(\widehat{ABC}) = 60°$, iar $(\widehat{CAB}) = 45° + 30° = 75°$.

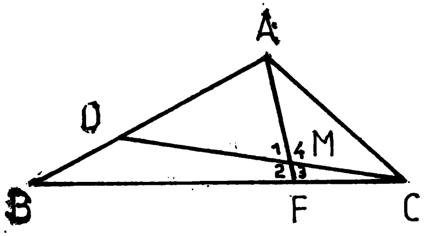
Considerăm cazul $B \in (DC)$ ca în figura b)

Triunghiul ADC este isoscel (din ipoteză). El este și dreptunghic deci $m(\widehat{ACB}) = 45°$.

Din ipoteză ΔABI este isoscel. Deoarece unghiul ABI este obtuz, deoarece unghiul BID este ascuțit, avem baza (AI) iar (BD) este înălțime și deci bisectoarea unghiului ABI. Avem deci $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle DBI$. Dar $\sphericalangle DBI \equiv \sphericalangle EBC$ (ca opuse la vîrf). Cum $[BE]$ este bisectoare, obținem că $\sphericalangle EBC \equiv \sphericalangle EBA$. Așadar, $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{EBC}) = \frac{180°}{3} = 60°$ și deci $m(\widehat{ABC}) = 120°$. Rămîne ca $m(\widehat{BAC}) = 15°$.

Cazul $C \in (BD)$ se rezolvă în mod asemănător.

II.2.16ᴹ. Triunghiul ABC are $\hat{C}$ de $30°$ și $\hat{B}$ de $15°$. Pe segmentul AB se ia $[AD] \equiv [AC]$ și pe segmentul BC se ia $[BF] \equiv [AB]$. Să se calculeze unghiurile formate de dr. DC și dr. AF (care se intersectează în M).

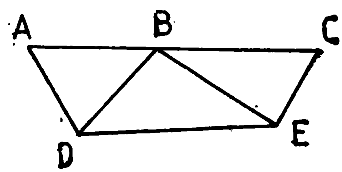


R. Unghiul BAC este de $180° - (15° + 30°) = 135°$. Triunghiul ADC este isoscel și are unghiul ADC de $\dfrac{180° - 135°}{2} = 22°30'$.

Triunghiul ABF este isoscel și are unghiul BAF de $\dfrac{180° - 15°}{2} = 82°30'$. În triunghiul ADM, unghiul $AMD \equiv \hat{M}_1$ este de $180° - (22°30' + 82°30') = 75°$

Deci unghiurile M_1 și M_3, fiind opuse la vîrf, sînt de cîte $75°$ iar unghiurile M_2 și M_4 sînt de cîte $105°$.

II.2.17PO.PP. Pe catetele $[BD]$ și $[BE]$ ale unui triunghi dreptunghic DBE, în exteriorul lui, se pun în evidență triunghiurile dreptunghice isoscele BDA și BEC cu unghiurile drepte în D și respectiv în E. Sînt punctele A, B, C, coliniare?

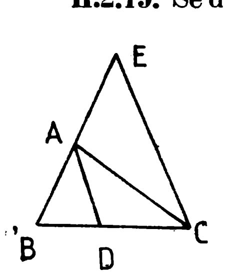


R. Pentru a cerceta dacă A, B, C sînt puncte coliniare, calculăm $m(\widehat{ABD}) + m(\widehat{DBE}) + m(\widehat{EBC})$. Dacă acest rezultat este $180°$ punctele sînt coliniare, numai în cazul cînd interioarele unghiurilor respective sînt fără puncte comune (disjuncte). În cazul nostru, din ipoteză, triunghiul BDA este triunghi dreptunghic isoscel cu unghiul drept în D; înseamnă că $m(\widehat{ABD}) = 45°$. Tot din ipoteză, triunghiul DBE este dreptunghic cu catetele $[DB]$ și $[BE]$; înseamnă că $\sphericalangle DBE$ este drept, deci $m(\widehat{DBE}) = 90°$. Deasemenea, triunghiul BEC este dreptunghic isoscel cu unghiul drept în E; înseamnă că $m(\widehat{EBC}) = 45°$. Cum triunghiurile dreptunghice isoscele sînt (din ipoteză) în exteriorul triunghiului DBE rezultă că interioarele unghiurilor ABD, DBE și EBC nu au puncte comune. Calculăm $m(\widehat{ABD}) + m(\widehat{DBE}) + m(\widehat{EBC}) = 45° + 90° + 45° = 180°$. Deci punctele sînt coliniare.

II.2.18PO. Pe catetele $[BD]$ și $[BE]$ ale unui triunghi dreptunghic DBE, în exteriorul lui, se pun în evidență triunghiurile drepunghice isoscele BDA și BEC cu unghiurile drepte în A și respectiv în C. Sînt punctele A, B, C coliniare?

R. Da. Dacă se compară această problemă cu precedenta se constată că avem la fel: $m(\widehat{ABD}) + m(\widehat{DBE}) + m(\widehat{EBC}) = 45° + 90° + 45° = 180°$. Deosebirea față de problema anterioară este, în ipoteză decît numai la locul unde este vîrful unghiului drept în triunghiurile dreptunghice isoscele BDA și BEC.

II.2.19. Se dă triunghiul ABC unde $[AD$ este bisectoare ($D \in$ dr. BC). Pe $[BA$ fie punctul E astfel încît $A \in (BE)$ și $[AE] \equiv [AC]$. Demonstrați că dr. $AD \parallel$ dr. EC.

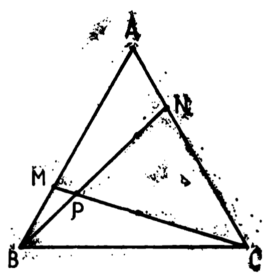


R. Deoarece, din ipoteză, $[AD$ este bisectoare avem $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{DAC}) = \dfrac{1}{2} m(\widehat{BAC})$ (1). Din ipoteză avem că $[AE] \equiv [AC]$ rezultă că triunghiul ACE este isoscel și conform teoremei, unghiurile de la bază sînt congruente deci $m(\widehat{AEC}) \equiv m(\widehat{ACE})$ (2). Se constată că unghiul BAC este unghi exterior triunghiului isoscel ACE. Știm că măsura unui unghi exterior unui triunghi este egală cu suma măsurilor unghiurilor, interioare, neadiacente lui. Avem: $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{AEC}) + m(\widehat{ACE})$. Folosind (1) găsim că $m(\widehat{BAC}) = 2 \cdot m(\widehat{AEC})$. Dacă în această relație aplicăm (1) putem scrie:

$$2\,m(\widehat{BAD}) = 2\,m(\widehat{AEC}) \text{ adică } \sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle AEC.$$

Aceste două unghiuri sînt unghiuri corespondente formate de dr. AD și dr. EC cu secanta BE și cum sînt congruente obținem că dr. $AD \parallel$ dr. EC.

II.2.20[PO.M]. În triunghiul echilateral ABC, $M \in [AB]$ și $N \in [AC]$ astfel încît $[BM] \equiv [AN]$. Notăm cu P intersecția dreptelor BN și CM. Calculați $m(\widehat{NPC})$.



R. Din ipoteză ΔABC este un triunghi echilateral. Aceasta conduce la faptul că $[AB] \equiv [BC]$ (1) și că $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{BAC}) = 60°$ (2). Din ipoteză mai avem că $[BM] \equiv [AN]$ (3). Din (2) avem că $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BAC$ (4).

Din (1), (2) și (4) obținem, conform cazului *L.U.L.* de congruență a triunghiurilor, că $\Delta ABN \equiv \Delta BCM$ de unde avem: $\sphericalangle ABN \equiv \sphericalangle BCM$ (5).

Observăm că $\sphericalangle NPC$ este unghi exterior pentru ΔBPC și deci $m(\widehat{NPC}) = m(\widehat{PBC}) + m(\widehat{BCP})$. Dacă folosim (5) avem:

$$m(\widehat{NPC}) = m(\widehat{PBC}) + m(\widehat{PBM}) = m(\widehat{ABC}) = 60°.$$

Observație. Raționamentul nu se modifică complet dacă demonstrăm că $\Delta AMC \equiv \Delta CNB$.

II.2.21[PO]. În ipoteza de la problema I. 2.26. pag. 111 demonstrați că dr. $EC \perp$ dr. BG.

R. Notăm cu T intersecția dreptelor AC și BG. Vom folosi o parte din raționamentu din demonstrația problemei enunțate. Din relația (4) rezultă că triunghiul GAT este dreptunghic în A. Știm că suma măsurilor unghiurilor ascuțite este de 90° (unghiurile ascuțite în triunghiul dreptunghic sînt unghiuri complementare). Deci $m(\widehat{AGT}) + m(\widehat{GTA}) = 90°$ (1'). Constatăm că unghiurile GTA și CTB sînt unghiuri opuse la vîrf și deci $m(\widehat{GTA}) = m(\widehat{CTB})$ (2').

Din (6) (vezi problema) avem că $\sphericalangle AGB \equiv \sphericalangle ACE$ care se mai scrie: $\sphericalangle AGT \equiv \sphericalangle TCE$ (3'). Calculăm $m(\widehat{TCE}) + m(\widehat{CTB})$ folosind (3'), (2') și (2'):

$$m(\widehat{TCE}) + m(\widehat{CTB}) = m(\widehat{AGT}) + m(\widehat{GTA}) = 90° \; (4').$$

Dacă notăm cu L intersecția dreptelor BG și EC constatăm că în triunghiul LTC, folosind (4'), avem două unghiuri complementare. Aceasta înseamnă că triunghiul este dreptunghic în L adică dr. $BG \perp$ dr. EC.

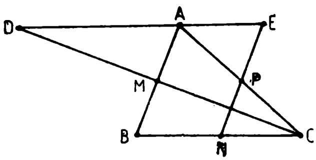
Observație. Se consideră aceleași observații ca la problema enunțată.

II.2.22[PO]. Fie punctele M, N și P mijloacele laturilor triunghiului ABC ($M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (AC)$).

Fie D și E astfel încît $(MD) \equiv (CM)$ și $(PE) \equiv (PN)$ și $D \in (CM$ iar $E \in (NP$.

a) Demonstrați $AE = \frac{BC}{2}$ și $AD = BC$;

b) Demonstrați că punctele E, A și D sînt coliniare;



c) Calculați măsura segmentului ED, dacă lungimile laturilor triunghiului ABC, AB, BC și CA, sînt invers proporționale respectiv cu numerele 3, 5 și 10, iar semiperimetrul triunghiului ABC este 19 cm.

R. a) Triunghiurile APE și CPN sînt congruente pentru că $[AP] \equiv [CP]$, $[NP] \equiv [EP]$ și $\widehat{APE} \equiv \widehat{CPN}$ ca unghiuri opuse la vîrf. De aici rezultă că $(NC) \equiv (EA)$, dar NC este jumătate din BC deci și $AE = \frac{BC}{2}$. Triunghiurile ADM și BCM sînt congruente pentru că $(AM) \equiv (BM)$, $(CM) \equiv (DM)$ și unghiurile AMD și CMB sînt opuse la vîrf. De aici rezultă că $AD = BC$.

b) Din congruența triunghiurilor AEP și NCP respectiv ADM și BCM rezultă că $\widehat{EAP} \equiv \sphericalangle BCA$ și $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CBA$. Dar suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este de 180°. Atunci și $m(\widehat{EAC}) + m(\widehat{CAB}) + m(\widehat{BAD}) = 180°$, adică punctele D, A și E sînt coliniare.

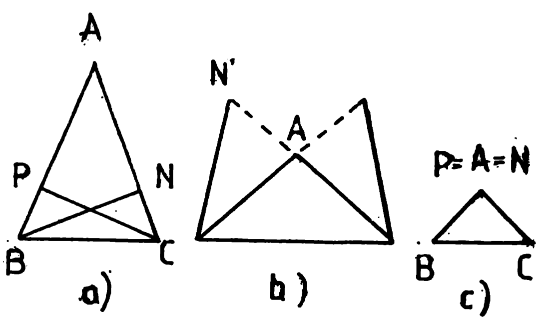
c) Calculăm BC:

$$\frac{AB}{\frac{1}{3}} = \frac{BC}{\frac{1}{5}} = \frac{CA}{\frac{1}{10}} = \frac{38}{\frac{10+6+3}{30}} = \frac{38 \cdot 30}{19}$$

$BC = 12$ cm iar $ED = 18$ cm, căci $ED = AD + AE = BC + \frac{BC}{2}$.

II.2.23[PP]. Se dă triunghiul isoscel ABC unde $[AB] \equiv [AC]$. Demonstrați că înălțimile $[CP]$ și $[BN]$ sînt congruente ($N \in$ dr. AC, $P \in$ dr. AB)

R. Problema este adevărată pentru orice triunghi isoscel. Vom face raționamentul pentru triunghi isoscel cu vîrful unghi ascuțit (fig. a), cu vîrful unghi obtuz (fig. b) și cu vîrful unghi drept (fig. c).



a) b) c)

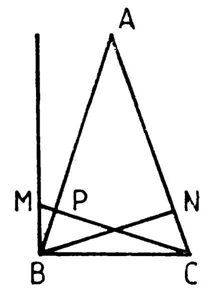
a) Avem $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$ (1) căci triunghiul este isoscel unde $[AB] \equiv [AC]$ baza fiind $[BC]$. Deoarece $[CP]$ și $[BN]$ sînt înălțimi rezultă că triunghiurile BPC și BNC sînt dreptunghice cu ipotenuza $[BC]$ comună. Dacă folosim și (1) conform cazului de congruență a triunghiurilor dreptunghice *I.U.*, avem că $\triangle PBC \equiv \triangle NCB$, de unde rezultă că $[CP] \equiv [BN]$. b) Dacă unghiul A este obtuz, punctele N și P sînt în exteriorul triunghiului. Raționamentul nu se modifică cu nimic față de situația de la a), chiar dacă „poziția" celor două triunghiuri dreptunghice este alta. c) În cazul cînd triunghiul este și dreptunghic în A, picioarele înălțimilor se confundă cu punctul A, deci înălțimile se confundă cu catetele, care sînt congruente.

II.2.24[PP]. Într-un triunghi isoscel înălţimile corespunzătoare laturilor congruente formează cu baza unghiuri congruente.

R. Fie ABC un triunghi isoscel unde $[AB] \equiv [AC]$ iar $[BN]$ şi $[CP]$ cele două înălţimi; în problema anterioară s-a demonstrat că $\Delta PBC \equiv \Delta NCB$, deci $\sphericalangle PCB \equiv \sphericalangle NBC$.

II.2.25[M]. Într-un triunghi ascuţitunghic isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) avem perpendiculara în B pe dr. BC şi înălţimea $[CP]$ care se intersectează în $M(P \in$ dr. $AB)$.

Ştiind că N este piciorul înălţimii din B demonstraţi că $\sphericalangle MBP \equiv \equiv \sphericalangle NBC$.



R. În problema precedentă s-a demonstrat că $\sphericalangle PCB \equiv \equiv \sphericalangle NBC$ (1), adică unghiurile formate de înălţimile corespunzătoare laturilor congruente şi bază sînt congruente. Triunghiul MBC este triunghi dreptunghic în B iar $[BP]$ joacă rol de înălţime. Se ştie că într-un triunghi dreptunghic un unghi ascuţit este congruent cu unghiul ce are ca laturi înălţimea şi cateta ce nu formează acest unghi ascuţit (vezi II.2.5 pag. 120). Deci $\sphericalangle PCB \equiv \sphericalangle MBP$ (2). Din (1) şi (2) obţinem că $\sphericalangle MBP \equiv \sphericalangle NBC$.

Observaţie. În ipoteză, triunghiul isoscel ABC este ascuţitunghic. Cercetaţi situaţia cînd este obtuzunghic.

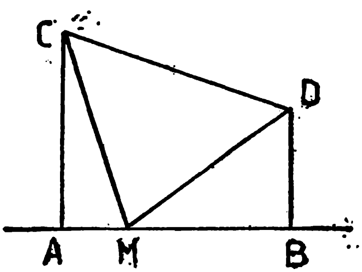
II.2.26[M]. Se dă triunghiul ABC ($[AB] \equiv [AC]$). Se consideră în B şi C perpendicularele pe dr. BC.

Semidreptele ce conţin înălţimile din C şi B ale triunghiului, intersectează respectiv cele două perpendiculare în M şi N

Demonstraţi că $[BM] \equiv [CN]$.

R. S-a demonstrat mai sus la problema II.2.24[PP]. că înălţimile triunghiului isoscel corespunzătoare laturilor congruente formează cu baza unghiuri congruente. La noi avem deci : $\sphericalangle MCB \equiv \sphericalangle NBC$ (1). Din perpendicularitatea din ipoteză avem că triunghiurile MCB şi NBC sînt dreptunghice în B respectiv C şi au cateta $[BC]$ comună. Aplicînd cazul de congruenţă pentru triunghiurile dreptunghice C.U, obţinem că $\Delta MBC \equiv \Delta NCB$ de unde găsim $[BM] \equiv [CN]$.

II.2.27[M]. Folosind notaţiile din desenul alăturat avem : $(AM) \equiv (BD)$, $(BM) \equiv (AC)$, dr. $AC \perp$ dr. AB şi dr. $BD \perp$ dr. AB. Calculaţi măsurile unghiurilor triunghiului CMD.



R. Triunghiurile AMC şi BDM sînt congruente pentru că sînt triunghiuri dreptunghice ($m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = 90°$) şi au catetele $(AM) \equiv (BD)$, $(AC) \equiv (BM)$ respectiv congruente, din ipoteză.

Din congruenţa triunghiurilor AMC şi BDM rezultă că şi $(CM) \equiv (MD)$. Mai rezultă că $m(\widehat{CMA}) + m(\widehat{DMB}) = 90°$, deoarece unghiurile ascuţite ale triunghiului dreptunghic sînt unghiuri complementare.

Atunci $m(\widehat{CMD}) = 90°$.

Am obţinut că triunghiul CMD este un triunghi dreptunghic isoscel deci măsurile unghiurilor sînt : $m(\widehat{MCD}) = m(\widehat{MDC}) = 45°$ şi, evident, $m(\widehat{CMD}) = 90°$.

§3. Patrulatere. Patrulatere particulare

II.3.1.^{M}. Calculaţi măsurile unghiurilor unui patrulater convex ştiind că sînt numere direct proporţionale cu numerele 2, 3, 6 şi 7.

R. Notăm cu x, y, z, t măsurile unghiurilor patrulaterului. De la aritmetică-algebră, faptul că numerele x, y, z, t sînt respectiv direct proporţionale cu numerele 2, 3, 6, 7 se scrie astfel: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6} = \frac{t}{7}$. Notăm fiecare raport cu a. Avem: din $\frac{x}{2} = a$, $x = 2a$; din $\frac{y}{3} = a$, $y = 3a$; din $\frac{z}{6} = a$, $z = 6a$; din $\frac{t}{7} = a$, $t = 7a$.

Se ştie că suma măsurilor unghiurilor unui patrulater este 360° deci putem scrie că $x + y + z + t = 360°$. Această relaţie devine scrisă cu ajutorul lui a: $2a + 3a + 6a + 7a = 360°$, adică $18 \cdot a = 360°$ de unde $a = 20°$. Aşadar $x = 2 \cdot 20° = 40°$; $y = 3 \cdot 20° = 60°$; $z = 6 \cdot 20° = 120°$; $t = 7 \cdot 20° = 140°$.

II.3.2^{M}. a) Calculaţi măsurile unghiurilor patrulaterului A, B, C, D ştiind că ele sînt respectiv numere proporţionale cu numerele 3, 4, 5, 3. b) Calculaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABD ştiind că triunghiul BCD este un triunghi isoscel.

R. a) Vom schiţa calculul pe raţionamentul de la problema anterioară.

$m(\hat{A}) = x$, $m(\hat{B}) = y$, $m(\hat{C}) = z$, $m(\hat{D}) = t$.

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = \frac{t}{3} = a;\ x = 3a,\ y = 4a,\ z = 5a,\ t = 3a,$$

$$x + y + z + t = 360°;\ 3a + 4a + 5a + 3a = 360°.$$

$$15a = 360°;\ a = 24°;\ x = 3 \cdot 24° = 72°,$$

$$y = 4 \cdot 24° = 96°;\ z = 5 \cdot 24° = 120°;\ t = 72°.$$

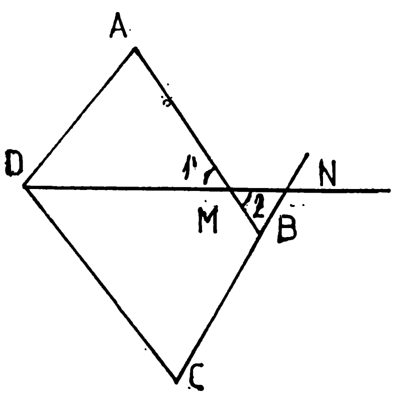
b) Din ipoteză BCD este triunghi isoscel cu unghiul C de 120°, deci baza este $[BD]$. Rezultă că $m(\widehat{CBD}) = m(\widehat{CDB}) = \frac{180° - 120°}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$.

Deoarece $[BD$ este în interiorul lui $\hat{B}$ avem, $m(\widehat{ABD}) = m(\hat{B}) - m(\widehat{CBD}) = 96° - 30° = 66°$. Deoarece $[DB$ este în interiorul lui $\hat{D}$, avem $m(\widehat{BDA}) = m(\hat{D}) - m(\widehat{CDB}) = 72° - 30° = 42°$. Evident, $m(\widehat{BAD}) = 72°$.

II.3.3^M^. Să se demonstreze că dacă măsura unuia din unghiurile unui patrulater este egală cu media aritmetică a celorlalte măsuri ale unghiurilor patrulaterului, atunci acel unghi este drept.

R. Fie patrulaterul $ABCD$. Din ipoteză, cu privire la media aritmetică avem : $m(\hat{A}) = \dfrac{m(\hat{B}) + m(\hat{C}) + m(\hat{D})}{3}$. Ştim că suma măsurilor unghiurilor unui patrulater este 360°, deci : $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) + m(\hat{D}) = 360°$. Înlocuind $m(\hat{B}) + m(\hat{C}) + m(\hat{D})$ cu $3m(\hat{A})$ avem $m(\hat{A}) + 3 \cdot m(\hat{A}) = 360°$, de unde $m(\hat{A}) = 90°$.

II.3.4^M^. Fie $ABCD$ un patrulater astfel încît $\hat{A} \equiv \hat{C}$. Bisectoarea unghiului D intersectează dreptele AB şi BC în M, respectiv N. Să se demonstreze că triunghiul BMN este triunghi isoscel.



R. Rezolvăm situaţia cînd $M \in (AB)$.

În triunghiul AMD, $m(\widehat{AMD}) = 180° - \left(m(\hat{A}) + \dfrac{m(\hat{D})}{2}\right)$.

În triunghiul NCD, $m(\widehat{DNC}) = 180° - \left(m(\hat{C}) + \dfrac{m(\hat{D})}{2}\right)$.

Din ipoteză unghiurile A şi C sînt congruente, deci : $m(\widehat{AMD}) \equiv m(\widehat{DNC})$. Deoarece unghiurile AMD şi NMB sînt unghiuri opuse la vîrf, ele sînt unghiuri congruente.

Aşadar $\sphericalangle DNC \equiv \sphericalangle NMB$, adică triunghul BMN este un triunghi isoscel. Asemănător se justifică situaţia cînd $B \in (MA)$.

II.3.5^PO·M^. Un patrulater convex are două laturi opuse congruente şi cele 2 diagonale congruente.

Să se arate că celelalte laturi ale patrulaterului sînt paralele.

R. Fie patrulaterul $ABCD$ cu laturile opuse $(AD) \equiv (BC)$ şi diagonalele $(AC) \equiv (BD)$ Conform cazului $L.L.L.$, triunghiurile ABD şi ABC care au latura comună AB sînt triunghiuri congruente. De aici rezultă că unghiurile $\widehat{DAB}$ şi $\widehat{CBA}$ sînt congruente.

Considerăm acum triunghiurile ADC şi BCD cu latura comună DC şi $(DA) \equiv (CB)$ şi $(AC) \equiv (BD)$. Şi aceste triunghiuri sînt congruente ; în consecinţă şi unghiurile $\widehat{ADC}$ şi $\widehat{BCD}$ sînt congruente. Dar suma celor patru unghiuri este 360°, atunci $\widehat{BAD} + \widehat{ADC} = 180°$ şi rezultă că dr. $AB \parallel$ dr. DC.

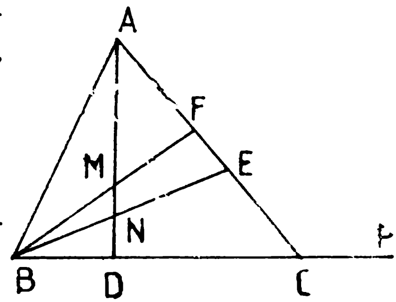
II.3.6. În triunghiul ABC, $[AD]$ şi $[BF]$ sînt înălţimi ($D \in [BC]$, $F \in [AC]$), iar BE este bisectoare ($E \in [AC]$). $[BF]$ şi $[BE]$ intersectează înălţimea $[AD]$ în punctele M respectiv N. Unghiul BAC al triunghiului este de 65°34′, iar unghiul ACP, unghi exterior triunghiului în C, este de 132°18′. Aflaţi măsurile unghiurilor patrulaterului $MNEF$.

R. Cu ajutorul unghiului exterior aflăm cît are unghiul C al triunghiului : $m(\widehat{ACB}) = 180° - m(\widehat{ACP})$, deci $m(\widehat{ACB}) = 47°42'$.

Calculăm cît are unghiul ABC al triunghiului și avem : $m(\widehat{ABC}) = 180° - m(\widehat{BCA}) - m(\widehat{CAB})$, deci $m(\widehat{ABC}) = 66°44'$.

Din triunghiul dreptunghic BFA aflăm $m(\widehat{ABF})$. Avem :

$$m(\widehat{ABF}) = 90° - m(\widehat{BAC}) \text{ deci } m(\widehat{ABF}) = 24°26'.$$



Unghiul $\sphericalangle ABE$ are măsura cît jumătate din măsura unghiului ABC, deci $m(\widehat{ABE}) = 33°22'$.

Atunci $m(\widehat{FBE}) = m(\widehat{ABE}) - m(\widehat{ABF})$, adică $m(\widehat{FBE}) = 8°56'$.

Din triunghiul EFB calculăm : $m(\widehat{BEF}) = 90° - m(\widehat{FBE})$ și deci $m(\widehat{BEF}) = 81°4'$

Din triunghiul dreptunghic BDA : $m(\widehat{DAB}) = 90° - m(\widehat{ABD})$, deci $m(\widehat{DAB}) = 23°16'$

Unghiul BND, fiind unghi exterior triunghiului ABN, are măsura egală cu suma măsurilor interioare unghiurilor nealăturate.

$$m(\widehat{BND}) = m(\widehat{ANE}) = m(\widehat{DAB}) + m(\widehat{ABN}), \text{ deci } m(\widehat{ANE}) = 56°38'.$$

Unghiul FMN, fiind opus la vîrf cu unghiul BMA, se poate calcula cu ajutorul unghiurilor ABM și MAB. Avem :

$$m(\widehat{FMN}) = 180° - m(\widehat{DAB}) - m(\widehat{ABM}), \text{ de unde } m(\widehat{FMN}) = 132°18'.$$

Unghiul EFM al patrulaterului este unghi drept deoarece $[BF]$ este înălțime. Verificăm calculele formînd suma unghiurilor patrulaterului :

$$m(\widehat{MNE}) + m(\widehat{NEF}) + m(\widehat{EFM}) + m(\widehat{FMN}) = 56°38' + 81°4' + 90° + 132°18' = 360°.$$

II.3.7. Unghiurile triunghiului ABC sînt direct proporționale cu 14, 12 și 10.

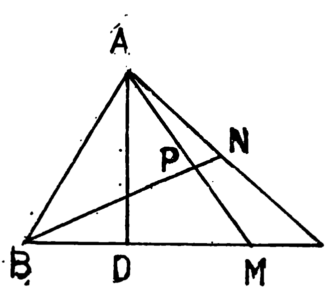
Bisectoarea unghiului ABC, $[BN$ ($N \in$ dr. AC), intersectează segmentul $[AM]$, simetricul lui $[AB]$ față de înălțimea $[AD]$ în punctul P. Aflați măsurile unghiurilor patrulaterului $PMCN$.

R. Calculăm măsurile unghiurilor triunghiului ABC, folosind cunoștințele de la aritmetică și algebră :

$$\frac{A}{14} = \frac{B}{12} = \frac{C}{10} = \frac{180°}{36} = 5°$$

De aici avem : $\hat{A} = 70°$, $\hat{B} = 60°$, $\hat{C} = 50°$.

Construim triunghiul :



Dacă $[AM]$ este simetricul lui $[AB]$ față de înălțimea $[AD]$, atunci triunghiul ABM este isoscel. Dar $m(B) = 60°$. De aici rezultă că triunghiul ABM este echilateral. Atunci bisectoarea $[BN$ este perpendiculară pe AM, adică $\hat{P}$ are 90°.

Unghiul BMA are tot 60° deci unghiul AMC are 120°.

Al patrulea unghi, unghiul CNP, poate fi calculat în mai multe moduri. Obținem : $(\widehat{CNP}) = 100°$ dacă folosim faptul că suma măsurilor unghiurilor unui patrulater este 360°.

Așadar : $m(\hat{P}) = 90°$, $m(\hat{M}) = 120°$, $m(\hat{C}) = 50°$ și $m(\hat{N}) = 100°$.

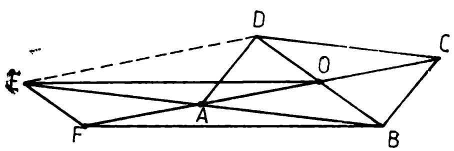
II.3.8. Se consideră $ABCD$ un paralelogram cu $\hat{A}$ obtuz. În exteriorul său avem $[AF \perp$ dr. AB și $[AH \perp$ dr. AD. Demonstrați că $\sphericalangle HAF \equiv \sphericalangle ABC$.

R. Deoarece $[AF \perp$ dr AB avem că $m(\widehat{FAB}) = 90°$. Din $[AH \perp$ dr. AD avem că $m(\widehat{HAD}) = 90°$. Se constată că $m(\widehat{DAH}) + m(\widehat{HAF}) + m(\widehat{FAB}) + m(\widehat{BAD}) = 360°$. Obținem din aceasta că $m(\widehat{HAF}) + m(\widehat{BAD}) = 180°$ (1). Dar $ABCD$ este un paralelogram unde unghiurile alăturate DAB și ABC sînt suplementare, deci $m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{BAD}) = 180°$ (2). Din (1) și (2) rezultă că $\sphericalangle HAF \equiv \sphericalangle ABC$.

II.3.9. În paralelogramul $ABCD$ avem $AD = 2$ cm iar perimetrul său 24 cm. Calculați măsurile celorlalte laturi.

R. Se știe că laturile opuse ale unui paralelogram sînt congruente. Deci $[AD] \equiv [BC]$ și $[AB] \equiv [CD]$. Rezultă $AD = BC = 2$ cm. Din ipoteză $AB + BC + CD + AD = 24$, adică $AB + 2 + CD + 2 = 24$; $2AB = 20$, $AB = 10 = CD$.

II.3.10[M]. Se dau paralelogramele $ABCD$ de centru O și $BOEF$ de centru A. Dacă $DE = 6$ cm, calculați lungimea segmentului CF.



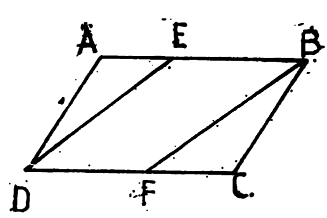
R. $ABCD$ și $BOEF$ fiind paralelograme, diagonalele lor se înjumătățesc, deci avem:

$(AC) \equiv (OC) \equiv (AF)$ și $(AB) \equiv (AE)$.

Arătăm că triunghiurile CBA și DAE sînt congruente: $(BC) \equiv (AD)$ (laturi opuse în paralelogramul $ABCD$)
$(AB) \equiv (EA)$ (jumătăți de diagonală în paralelogramul $BOEF$)
$\widehat{EAD} \equiv \widehat{ABC}$ (unghiuri corespondente, pentru că dr. $AD \parallel$ dr. CB și EB e secantă).
Din congruența acestor triunghiuri rezultă că și $(DE) \equiv (CA)$, deci $CA = 6$ cm. Dar $(AF) \equiv (AO)$, atunci $AF = 3$ cm și am obținut $CF = 9$ cm.

Observație. Se mai poate demonstra că $[DE] \equiv [AC]$ astfel: din faptul că $BOEF$ este paralelogram avem că dr. $EF \parallel$ dr. DO (1) și $(EF) \equiv (OB)$. Dar $(OB) \equiv (OD)$. Obținem că $(EF) \equiv (DO)$ (2). Din (1) și (2) rezultă că patrulaterul $DOFE$ este un paralelogram și deci $[DE] \equiv [FO]$. Cum $FO = 2AO = AC$, obținem că $[DE] \equiv [AC]$.

II.3.11[PP]. a) Demonstrați că bisectoarele a două unghiuri opuse ale unui paralelogram sînt paralele. b) Demonstrați că bisectoarele a două unghiuri alăturate ale unui paralelogram sînt perpendiculare.

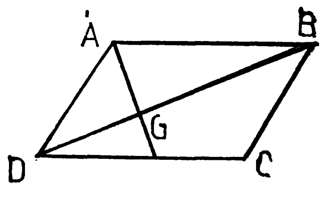


R. a) Fie $ABCD$ paralelogramul dat, $[DE$ și $[BF$ bisectoarele unghiurilor opuse, $\hat{D}$ și $\hat{B}$. Avem că: $m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{EDC}) = \dfrac{m(\widehat{ADC})}{2}$ (1). Avem că: $m(\widehat{ABF}) = m(\widehat{CBF}) = \dfrac{m(\widehat{ABC})}{2}$ (2).

În orice paralelogram unghiurile opuse sînt congruente, deci : $m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{ABC})$. Din (1) și (2) obținem că $m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{ABF})$ (3). Din faptul că $ABCD$ este paralelogram avem că dr. $AB \parallel$ dr. CD. Folosind secanta DE găsim că $m(\widehat{EDC}) = m(\widehat{AED})$ (4), ca unghiuri alterne interne. Din (1) și (4) avem că $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle AED$ (5). Din (3) și (5) obținem $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle ABF$ și folosind secanta AB rezultă că $[DE \parallel [BF$.

b) Se știe că unghiurile alăturate ale unui paralelogram sînt suplementare. Avem $m(\hat{A}) + m(\hat{D}) = 180°$. (1)

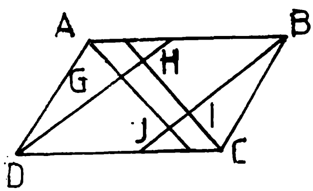
Știm că $m(\widehat{DAG}) = m(\widehat{GAB}) = \frac{1}{2} m(A)$, iar $m(\widehat{ADG}) = \frac{1}{2} m(\hat{D})$. Calculăm :



$$m(\widehat{DAG}) + m(\widehat{ADG}) = \frac{1}{2} m(\hat{A}) + \frac{1}{2} \cdot m(\hat{D}) = \frac{m(\hat{A}) + m(\hat{D})}{2} = \frac{180°}{2} = 90°.$$

Deci $[AG \perp [DG$.

II.3.12^{M}. Arătați că punctele de intersecție ale bisectoarelor unghiurilor unui paralelogram sînt vîrfurile unui dreptunghi, dacă aceste bisectoare nu sînt toate concurente. Cînd sînt ele concurente?



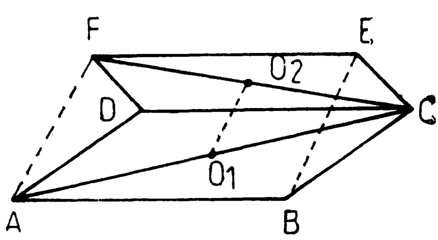
R. Folosim notațiile din figura alăturată. Din problema anterioară am văzut că bisectoarele a două unghiuri opuse sînt paralele. Deci putem spune că dr. $DH \parallel$ dr. BI și dr. $AJ \parallel$ dr. CH. Rezultă că patrulaterul $GHIJ$ este un paralelogram căci are laturile opuse paralele.

Tot în problema anterioară am demonstrat că bisectoarele a două unghiuri alăturate sînt perpendiculare, deci unghiul AGD este drept, ca și unghiul HGJ. Așadar paralelogramul $GHIJ$ are un unghi drept, deci este un dreptunghi. Bisectoarele sînt concurente cînd $ABCD$ este un romb.

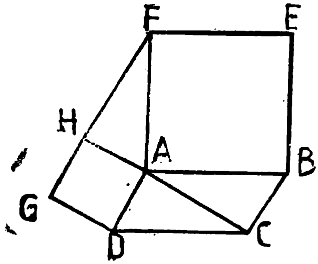
II.3.13^{M}. Se dau paralelogramele $ABCD$ și $DCEF$ și O_1 și O_2 centrele lor. Dacă $BE = a$, calculați segmentul O_1O_2?

R. Observăm că $ABEF$ este paralelogram pentru că laturile opuse (AB) și (FE) sînt paralele și congruente ambele cu (DC).

Atunci (AF) este congruent cu (BE). În triunghiul ACF, (O_1O_2) este linie mijlocie pentru că O_1 și O_2 sînt mijloacele diagonalelor (AC) respectiv (FC).



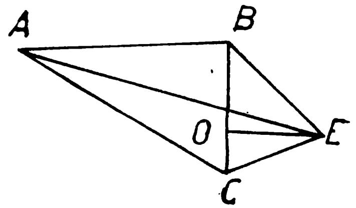
Deci O_1O_2 este jumătate din $AF = BE$, adică $O_1O_2 = \frac{a}{2}$.



II.3.14^M. În figura alăturată $ABCD$ este paralelogram, cu $\hat{A}$ obtuz, iar $ABEF$ și $ADGH$ sînt pătrate. Demonstrați că $(HF) \equiv (AC)$. Cercetați cazul cînd $\hat{A}$ este ascuțit.

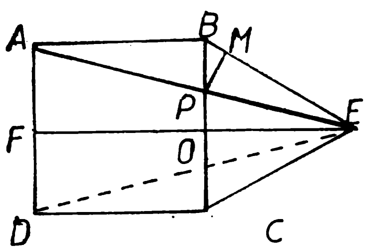
R. Se știe că laturile pătratului sînt congruente. Avem : $(AF) \equiv (AB)$ (1) și $(HA) \equiv (AD)$ (2). Se știe că laturile opuse ale unui paralelogram sînt congruente, deci $(AD) \equiv (BC)$ (3). Din (2) și (3) găsim că $(HA) \equiv (BC)$ (4). S-a demonstrat anterior, în problema 3.8. pag. 130, că $\sphericalangle HAF \equiv \sphericalangle ABC$ (5). Din (1), (4) și (5) conform cazului *L.U.L.*, rezultă că $\Delta HAF \equiv \Delta CBA$, deci $(HF) \equiv (AC)$.

II.3.15 ^{PP}. ABC este un triunghi dreptunghic isoscel cu unghiul drept în B iar BCE este un triunghi echilateral. Punctele A și E sînt în semiplane opuse determinate de dr. BC. În cazul cînd O este mijlocul lui $[BC]$ arătați că EA este bisectoarea unghiului BEO.



R. La problema II.2.8 pag 120 în situația a), s-a arătat că $m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{BEA}) = 15°$. Deoarece O este mijlocul lui $[BC]$ în triunghiul echilateral BCE, $[EO]$ este mediană și înălțime, deci dr. $OE \perp$ dr. BC. Cum și dr. $AB \perp$ dr. BC rezultă că dr. $AB \parallel$ dr. OE (perpendiculare pe dr. BC). La aceste paralele folosim secanta AE și obținem că unghiurile alterne interne BAE și AEO sînt congruente deci $m(\widehat{AEO}) = 15° = m(\widehat{BEA})$. Rezultă că $[EA$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BEO$.

II.3.16$^{PO.M}$. În figura alăturată $ABCD$ este pătrat, BEC este triunghi echilateral, F mijlocul lui AD, dr. $FE \cap$ dr. $BC = \{O\}$, dr. $AE \cap$ dr. $BC = \{P\}$, dr. $PM \cap$ dr. $BE = \{M\}$. Demonstrați că $[PM] \equiv [PO]$.



R. S-a văzut la problema II.2.8 pag. 120 că triunghiul ABE este un triunghi isoscel. Asemănător, triunghiul DCE este un triunghi isoscel. Aceste două triunghiuri isoscele sînt congruente căci $[AB] \equiv [BE] \equiv [EC] \equiv [CD]$ și $m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{ECD}) = 150°$. Rezultă că $[AE] \equiv [DE]$, deci triunghiul AED este isoscel, unde F este mijlocul bazei, deci $[EF]$ este mediană, așadar și înălțime. Obținem că dr. $EF \perp$ dr. AD. Dar dr. $AD \parallel$ dr. BC ($ABCD$ pătrat). Găsim că dr. $EF \perp$ dr. BC, ceea ce conduce la faptul că $[EO]$ este înălțime în triunghiul echilateral BEC, deci și mediană adică O este mijlocul lui $[BC]$. Conform problemei anterioare, $[EA$ este bisectoarea unghiului BEO. Deducem că $\sphericalangle MEP \equiv \sphericalangle OEP$. Această relație ne conduce să spunem că triunghiurile dreptunghice POE (în O) și MPE (în M), care au (PE) ipotenuză comună, sînt congruente. Din congruența lor avem că $[PM] \equiv [PO]$.

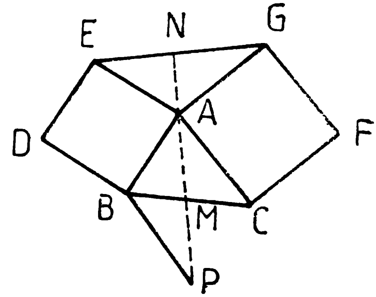
II.3.17^{PO}. Pe laturile $[AB]$ și $[AC]$ ale unui triunghi ABC se construiesc în exterior pătratele $ABDE$ și $ACFG$.

Arătați că : a) $[EC] \equiv [BG]$; b) dr. $EC \perp$ dr. BG; c) Mediana AM a triunghiului ABC și înălțimea AN a triunghiului AEG sînt „în prelungire" ($M \in$ dr. BC și $N \in$ dr. EG).

R. a) Din ipoteză $ABDE$ este pătrat, deci $[AE] \equiv [AB]$ și dr. $AE \perp$ dr. AB. Deasemenea $ACFG$ este pătrat, deci $[AG] \equiv [AC]$ și dr. $AG \perp$ dr. AC. Demonstrația acum este identică ca la problema pag. 111, I.2.26. în cazul cînd $\sphericalangle BAC$ este ascuțit.

b) Dacă ținem cont de implicațiile obținute la a) constatăm că sîntem în cazul problemei II.2.21. pag. 124.

c) Cu alte cuvinte, concluzia se mai poate formula astfel : demonstrați că punctele N, A și M sînt puncte coliniare. Vom folosi următoarea *construcție ajutătoare* : pe $[AM$ considerăm punctul P astfel că $[AM] \equiv [MP]$ (1). Din ipoteză, $[AM]$ este mediană, deci M este mijlocul lui $[BC]$, așadar $[BM] \equiv [MC]$ (2). Folosind (1), (2) și teorema : dacă într-un patrulater diagonalele se intersectează în ,,părți" congruente, atunci patrulaterul este un paralelogram, obținem că patrulaterul $ABPC$ este paralelogram. Sîntem în ipoteza problemei II.3.8 pag.130 adică : $ABPC$ paralelogram ; $[AE \perp$ dr. AB și $[AG \perp$ dr. AC. Conform concluziei acestei probleme avem că $\sphericalangle ABP \equiv \sphericalangle EAG$ (3). Deoarece avem $[AE] \equiv [AB]$, $[AG] \equiv [AC]$ și în plus relația (3) rezultă că $\Delta ABP \equiv \Delta EAG$. Din această congruență obținem că $\sphericalangle AEG \equiv \sphericalangle BAP$ care se mai scrie $\sphericalangle AEN \equiv \sphericalangle BAP$ (4). Din ipoteza, $[AN]$ este înălțime deci triunghiul AEN este dreptunghic în N. Avem că $m(\widehat{EAN}) = 90° - m(\widehat{AEN})$. Folosind (4) găsim $m(\widehat{EAN}) = 90° - m(\widehat{BAP})$ (5).

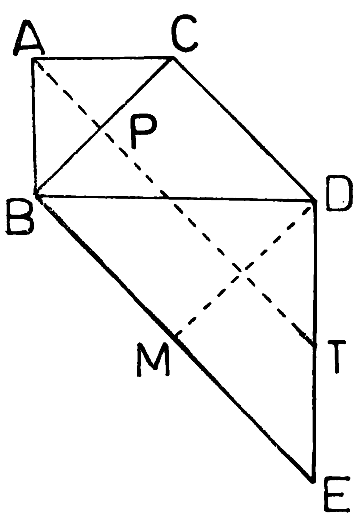


Pentru ca punctele N, A și M să fie puncte coliniare trebuie ca, de exemplu, $\sphericalangle NAM$ să fie unghi alungit. Găsim că $m(\widehat{NAM}) = m(\widehat{EAN}) + m(\widehat{EAB}) + m(\widehat{BAP})$. Cu ajutorul lui (5) avem $m(\widehat{NAM}) = 90° - m(\widehat{BAP}) + 90° + m(\widehat{BAP}) = 180°$. Deci N, A și M sînt coliniare, adică mediana AM și înălțimea AN sînt ,,în prelungire".

II.3.18^{PO}. Construiți un pătrat la care se dă diagonala. Folosiți numai compasul și rigla negradată.

R. Construcția se bazează pe faptul că diagonalele pătratului se înjumătățesc și sînt perpendiculare una pe alta.

Considerăm diagonala. Construim un segment congruent cu diagonala. Împărțim diagonala în două părți congruente. În mijlocul diagonalei ,,ridicăm" o perpendiculară, pe care, de o parte și de alta a diagonalei construim cu ajutorul compasului, segmente congruente cu jumătatea diagonalei. Obținînd astfel celelalte două vîrfuri ale pătratului, pe care îl putem construi.



II.3.19^{M}. Triunghiurile ABC, BCD, BDE sînt triunghiuri isoscele și dreptunghice, $m(\widehat{APC}) = 90°$ și $CD = 5$. Se cere cît are segmentul AT (Vezi desenul alăturat)

R. Unghiurile CBD și DBE fiind de cîte 45° unghiul CBE este de 90°, deci dreptele AT și BE sînt paralele, fiind ambele perpendiculare pe aceeași dreaptă, BC.

La fel, unghiul ABD este de 90° pentru că $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{CBD}) = 45°$.

Atunci și dr. AB este paralelă cu dr. DE, fiind ambele perpendiculare pe dr. DB.

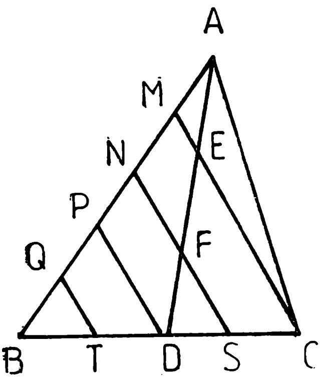
Deci patrulaterul $ABET$ este paralelogram.

Dacă considerăm dr. $DM \perp$ dr. BE atunci se formează pătratul $BCDM$ și triunghiul DME, care este dreptunghic isoscel, deci $BE = AT$, căci AT, este dublul lui CD, atunci $AT = 10$.

II.3.20[PO]. În triunghiul ABC, E și F sînt situate pe mediana (AD) astfel încît $(AE) \equiv (EF) \equiv (FD)$ iar T este mijlocul lui (BD) și S al lui (DC). Dr. CE „taie" dr. AB în M, dr. SF în N și paralelele duse la dr. SN prin D și T „taie" pe dr. AB în P și Q.

a) Arătați că $(AM) \equiv (MN) \equiv (NP) \equiv (PQ) \equiv (QB)$.

b) Dacă $DP = 2$ cm, cît sînt NS și QT?



R. a) Paralelele QT, PD, NS și MC sînt echidistante deoarece pe secanta BC determină segmente congruente. Atunci vor determina segmente congruente și pe secanta AB. Deci

$$(BQ) \equiv (QP) \equiv (PN) \equiv (NM).$$

Observăm că în triunghiul ANF, ME este linie mijlocie, deci

$$NM) \equiv (MA) \left(\text{pentru că } FE = EA = \frac{AD}{3}\right).$$

Deci avem $(AM) \equiv (MN) \equiv (NP) \equiv (PQ) \equiv (QB)$.

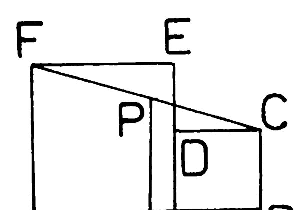
b) În ΔCMB, (PD) este linie mijlocie căci D e mijlocu lui (BC) iar P mijlocul lui (BM).

Rezultă $MC = 2PD = 2 \cdot 2 = 4$ (cm).

NS este linie mijlocie în trapezul $CMPD$, deci $NS = \dfrac{4+2}{2} = 3$ (cm). QT este linie mijlocie în triunghiul BDP, deci $QT = \dfrac{2}{2} = 1$ (cm).

II.3.21[PO]. Pe un segment „fix" (AB) se ia un punct „mobil" M și se construiesc, ca în figura alăturată, pătratele $AMEF$ și $BMDC$.

Demonstrați că P, mijlocul segmentului FC este „fix" cînd M „descrie" (AB).



R. Vom „lămuri" pe rînd cuvintele : fix, mobil și descris. În loc de segment „fix" (AB) putem spune „segment dat" sau „segment fixat în plan", adică nu orice segment al planului.

În loc de punct „mobil" al lui (AB) putem spune „orice punct al lui (AB)", adică nu unul dat anume. Cuvintul „descrie" se poate traduce tot prin fiecare punct al segmentului, adică oricare punct ce aparține segmentului.

Problema cere să demonstrăm că oricare ar fi punctul $M \in (AB)$ ce implică diferite situații pentru cele două pătrate, deci diferite situații pentru segmentele FC, mijloacele lor nu sînt puncte diferite. Altfel spus, problema cere să arătăm că pentru orice „poziție" a lui M toate segmentele FC „trec" prin P (sînt concurente în P).

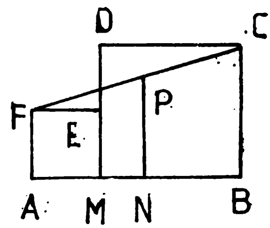
Constatăm din faptul că avem cele două pătrate, dr. $AF \perp$ dr. AB și dr. $BC \perp$ dr. AB deci dr. $AF \parallel$ dr. BC ce duc la situația că patrulaterul $ABCF$ este un trapez.

Fie perpendiculara din P pe dr. AB, care intersectează pe dr. AB în N. Deoarece dr. $PN \parallel$ dr. BC rezultă că (PN) este linie mijlocie în trapezul $ABCF$ adică N este mijlocul lui (AB) iar acesta este unic pe (AB) oricare ar fi $M \in (AB)$. Folosim cunoștințele despre linia mijlocie a trapezului :

$$NP = \frac{AF + BC}{2} = \frac{AM + MB}{2} = \frac{AB}{2}.$$

Cum $[AB]$ este dat și este unic în această problemă, rezultă că și $[NP]$ este unic (are „lungime neschimbată"), deci și P este unic adică „fix".

Observație. a) pentru a înțelege mai bine ideea demonstrației mai raționați pe un alt desen, unde M are altă „poziție" ca, de exemplu, în figura alăturată.



b) problema a impus, prin figura din ipoteză, ca cele două pătrate să fie în același semiplan determinat de dr. AB. Se poate studia și situația cînd cele două pătrate sînt situate în semiplane diferite. În acest caz cercetați dacă punctul P, mijlocul segmentului FC este „fix" cînd M „descrie" (AB).

II.3.22^PP^. În triunghiul MBC, $[BU$ și $[CU$ sînt bisectoare interioare pentru triunghiul MBC. Calculați $m(\widehat{CMU})$ în cazul cînd $m(\widehat{UBC}) + m(\widehat{UCB}) = 36°$.

R. $[BU$ și $[CU$ sînt bisectoare interioare. Se știe că bisectoarele interioare ale unui triunghi sînt concurente, într-un punct.

În cazul nostru punctul U este punctul de concurență. Așadar $[MU$ este și ea bisectoare. Din ipoteză $[BU$ este bisectoare rezultă că $m(\widehat{MBU}) = m(\widehat{UBC})$. $[CU$ este bisectoare rezultă că $m(\widehat{MCU}) = m(\widehat{UCB})$. Din ipoteză $m(\widehat{UBC}) + m(\widehat{UCB}) = 36°$. Din aceasta avem că $2m(\widehat{UBC}) + 2m(\widehat{UCB}) = 72°$, deci $m(\widehat{MBC}) + m(\widehat{MCB}) = 72°$. Obținem că $m(\widehat{BMC}) = 180° - [m(\widehat{MBC}) + m(\widehat{MCB})] = 180° - 72° = 108°$. Cum $[MU$ este bisectoare avem că $m(\widehat{CMU}) = \frac{1}{2} m(\widehat{BMC}) = \frac{108°}{2} = 54°$.

II.3.23^M^. În triunghiul ABC, $m(\hat{A}) = 72°$, $[BM$, și $[BU$ împart unghiul B în trei părți congruente; $[BM$ este în interiorul lui $\sphericalangle ABU$, iar $[CM$ în interiorul lui $\sphericalangle ACU$, la fel $[CM$, $[CU$ împart unghiul C în trei părți congruente. Se cere $m(\widehat{CMU})$.

R. Din ipoteză se constată că $[BM$ și $[BU$ sînt trisectoare pentru unghiul B, deci $m(\widehat{ABM}) = m(\widehat{MBU}) = m(\widehat{UBC}) = \frac{1}{3} m(\hat{B})$.

$[CM$ și $[CU$ sînt trisecoare pentru unghiul C, deci $m(\widehat{ACM}) = m(\widehat{MCU}) = m(\widehat{UCB}) = \frac{1}{3} m(\hat{C})$.

Avem $m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180° - m(\hat{A}) = 180° - 72° = 108°$. Cu acest rezultat găsim că $m(\widehat{UBC}) + m(\widehat{UCB}) = 36°$. Aceasta relație și faptul că în triunghiul MBC observăm că $[BU$ și $[CU$ sînt bisectoare ne conduc la conținutul problemei anterioare unde s-a demonstrat că $m(\widehat{CMU}) = 54°$.

SECŢIUNEA A V-A

CLASA a VII-a

CAPITOLUL I

NUMERE REALE

I. 1. Calculaţi:

a) $$\frac{\frac{1}{2}-\left(-\frac{5}{2}\right):(-2,5)-\frac{4}{5}}{\left(-\frac{1}{5}\right)^3:\left(-\frac{1}{2}\right)^3}\cdot\frac{(-2)^4(3-4)^{58}}{1,3\cdot(-5)^2}\cdot 0,1;$$

b) $$\frac{1}{(-2)^{201}}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{200}\left(-\frac{1}{2}\right);$$

c) $$\frac{(0,75-1)^2-6,0625}{0,04-\sqrt{4,1616}}.$$

R. a) Ţinînd cont de ordinea operaţiilor cu numere reale, obţinem succesiv:

$$\frac{\frac{1}{2}-\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\left(-\frac{10}{25}\right)-\frac{4}{5}}{-\frac{1}{5^3}\cdot(-2)^3}\cdot\frac{(-2)^4(-1)^{58}}{\frac{13}{10}\cdot 25}\cdot\frac{1}{10}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}-1-\frac{4}{5}}{\frac{2^3}{5^3}}\cdot\frac{+2^4}{\frac{13\cdot 5}{2}}\cdot\frac{1}{10}=-\frac{13}{10}\cdot\frac{5^3}{2^3}\cdot\frac{2^4\cdot 2}{5\cdot 13}\cdot\frac{1}{2\cdot 5}=-1$$

b) Analog obţinem:

$$\frac{1}{(-2)^{201}}-\frac{1}{(-2)^{200}}\cdot\frac{1}{(-2)}=\frac{1}{(-2)^{201}}-\frac{1}{(-2)^{201}}=-\frac{1}{2^{201}}+\frac{1}{2^{201}}=0.$$

c) Avem succesiv:

$$\frac{(-0,25)^2-6,0625}{0,04-2,04}=\frac{-6}{-2}=3.$$

I. 2. Stabiliți semnul numerelor:

$$x = (0,1)^3 - (0,1)^5;\ y = (-0,1)^3 - (-0,1)^5;\ z = (0,1)^8 - (0,01)^8;$$
$$t = (0,1)^{-3} - (0,1)^{-5};\ u = (-2,27)^{12} - (-2,27)^{13}.$$

R. Obținem $x = \frac{1}{10^3} - \frac{1}{10^5} > 0$; $y = -\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^5} < 0$; $z = \frac{1}{10^8} - \frac{1}{10^{16}} > 0$

$$t = \left(\frac{1}{10}\right)^{-3} - \left(\frac{1}{10}\right)^{-5} = 10^3 - 10^5 < 0;\ u = (2,27)^{12} + (2,27)^{13} > 0.$$

I. 3. Calculați:

a) $\frac{2}{9}(-1)^n - \frac{7}{9}(-1)^{n+1} + 1,\ n \in \mathbb{N}.$

b) $(-1)^{2n} + (-1)^{2n+1} + (-1)^{2n+3},\ n \in \mathbb{N}.$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^k : \frac{2^{k+1} + 6^{k+1}}{3^{k+1} + 3^{2k+2}},\ k \in \mathbb{N}^*.$

R. a) Ținem cont că $(-1)^n = 1$ pentru n număr natural par și $(-1)^n = -1$ pentru n număr natural impar și obținem:

I. pentru n par: $\frac{2}{9} + \frac{7}{9} + 1 = \frac{18}{9} = 2$ și

II. pentru n impar: $-\frac{2}{9} - \frac{7}{9} + 1 = 0.$

b) Obținem: $1 - 1 - 1 = -1.$

c) Avem $\left(\frac{2}{3}\right)^k : \frac{2^{k+1}(1 + 3^{k+1})}{3^{k+1}(1 + 3^{k+1})} = \frac{2^k}{3^k} \cdot \frac{3^{k+1}}{2^{k+1}} = \frac{3}{2}.$

I. 4. x, y, z și a, b, c fiind numere reale strict pozitive calculați:

$$x^{-1} \cdot x^{-2} \cdot x^{-3};\ (12x^{-3}y^2z^{-1}) : (-3x^{-1}y^{-2});$$
$$\left[-\frac{1}{2}(a^{-3}b^4c^{-1})^{-1}\right] : \left[-\frac{1}{4}(a^{-2}b^{-1})^{-1}\right];\ -\frac{1}{2a^{-4}b^{-3}} \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a^{-1}b^{-4}c^{-3}}\right);$$
$$3a^{-2}b^{-1}(2a^2 - a^{-1}b^{-1} + 5b^{-1}).$$

R. Obținem respectiv: x^{-6}; $-4x^{-2}y^4z^{-1}$; $2ab^{-3}c$; $\frac{1}{3}a^5(b^7)^1c^3$; $6b^{-1} - 3a^{-3}b^{-2} + 15a^{-2}b^{-2}$

I. 5. Calculaţi :

$$(2^5 \cdot 2^2)^2;\ 7^6 \cdot 7^2 \cdot (7 \cdot 7^3)^2;\ \left\{\left[\left(\frac{5}{2}\right)^2\right]^3\right\}^5;\ [(-2)^{-3}]^5;$$

$$[(-3)^{-2}]^{-2};\ [(-1)^{-1} \cdot (-2)^{-2}(-3)^{-3}]^{-1}.$$

R. Obţinem : $(2^7)^2 = 2^{14}$; $7^6 \cdot 7^2 \cdot (7^4)^2 = 7^{16}$; $\left(\frac{5}{2}\right)^{2\cdot3\cdot5} = \left(\frac{5}{2}\right)^{30}$;$(-2)^{-15} = \left(\frac{1}{-2}\right)^{15} = -\frac{1}{2^{15}}$; $\frac{1}{81}$; $[(-1)^{-1}]^{-1} \cdot [(-2)^{-2}]^{-1} \cdot (-3)^{-3}]^{-1} = (-1)^1 \cdot (-2)^2 \cdot (-3)^3 = (-1)(4)(-27) = 108.$

I. 6. Care număr este mai mare :

a) $2\sqrt{2}$ sau $\sqrt{18}$? ; b). $5\sqrt{243}$ sau $27\sqrt{27}$? ; c). $\sqrt{75}$ sau $2\sqrt{50}$?

R. a) $\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$, deci $\sqrt{18} > 2\sqrt{2}$; b) $5\sqrt{243} = 5\sqrt{3^5} = 45\sqrt{3}$, $27\sqrt{3^3} = 81\sqrt{3}$, deci $27\sqrt{27} > 5\sqrt{243}$; c) $2\sqrt{50} = \sqrt{200}$, deci $2\sqrt{50} > \sqrt{75}$.

I. 7^PO. Scoateţi factorii de sub radical :

a) $\sqrt{5x^2}$; b) $\sqrt{3x^4y^2}$; c) $\sqrt{75x^2y}$; d) $\sqrt{\frac{3x^2}{y^3}}$.

R. a) $\sqrt{5x^2} = |x|\sqrt{5}$; b) $x^2|y|\sqrt{3}$; c) $5|x|\sqrt{3y}, y > 0$; d) $\frac{|x|\sqrt{3}}{|y|\sqrt{y}}$, $y > 0$.

I. 8. Calculaţi :

a) $5\sqrt{3} + 3\sqrt{27} - 6\sqrt{243} + 2\sqrt{12}$; b) $\sqrt{8} - 5\sqrt{18} + \sqrt{50}$;

c) $3\sqrt{50} - 3\sqrt{2} - \sqrt{147}$; d) $\frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{25}{243}}$; e) $\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^{-2}$; f) $\left(\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}}\right)^{-2}$

R. a) $5\sqrt{3} + 3\sqrt{3^2 \cdot 3} - 6 \cdot \sqrt{3^4 \cdot 3} + 2\sqrt{2^2 \cdot 3} = 5\sqrt{3} - 9\sqrt{3} - 54\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = -54\sqrt{3}$;

b) $2\sqrt{2} - 15\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = -8\sqrt{2}$; c) $15\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 7\sqrt{3} = 12\sqrt{2} - 7\sqrt{3}$;

d) $\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{5}{9\sqrt{3}} = \frac{23}{9\sqrt{3}} = \frac{23\sqrt{3}}{27}$; e) $\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$;

f) $\left(\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$.

I. 9. Aflaţi valoarea de adevăr a propoziţiilor :

a) $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$; b) $\sqrt{84} \neq 4\sqrt{5}$; c) $3\sqrt{54} \neq 9\sqrt{6}$;

d) $7\sqrt{3} = 3\sqrt{7}$; e) $\sqrt{0{,}24} \neq \frac{\sqrt{6}}{5}$; f) $5\sqrt{3} > 2\sqrt{19}$;

g) $8\sqrt{2} \leqslant 4\sqrt{8}$; h) $\sqrt{5,(2)} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$; i) $\sqrt{3{,}96} = \frac{3\sqrt{11}}{5}$;

j) $(2\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 2) = 8 + 3\sqrt{5}$;

k) $(3\sqrt{1} - \sqrt{7})(\sqrt{0} + \sqrt{9} + \sqrt{7}) = 2$;

l) $\sqrt{4^2 + 1} + \sqrt{4^2 - 1} = 8$; m) $(\sqrt{20} + 5\sqrt{5})(2\sqrt{5} - 4{,}5) > 0$;

n) $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$; o) $\frac{15}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$; p) $\frac{27}{3\sqrt{3}} \neq \frac{9\sqrt{3}}{3}$;

r) $\frac{5}{\sqrt{6} + 1} = \sqrt{6} - 1$; s) $\frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2} + 1} > \frac{5 - 3\sqrt{2}}{7}$;

t) $\frac{\sqrt{7} + \sqrt{11}}{\sqrt{7} - \sqrt{11}} \leqslant \frac{-9 - \sqrt{77}}{2}$.

R. a) $\sqrt{24} = \sqrt{6 \cdot 4} = 2\sqrt{6}$, deci propoziție adevărată; b) $\sqrt{84} = \sqrt{4 \cdot 21} = 2\sqrt{21} \neq 4\sqrt{5}$, adevărată; c) $3\sqrt{54} = 3\sqrt{9 \cdot 6} = 9\sqrt{6}$, falsă; d) $7\sqrt{3} = \sqrt{49 \cdot 3} = \sqrt{147}$, $3\sqrt{7} = \sqrt{63}$, falsă; e) $\sqrt{0{,}24} = \sqrt{\frac{24}{100}} = \frac{2\sqrt{6}}{10} = \frac{\sqrt{6}}{5}$, falsă; f) $5\sqrt{3} = \sqrt{75}$, $2\sqrt{19} = \sqrt{76}$ și $\sqrt{75} > \sqrt{76}$, falsă; g) $8\sqrt{2} = \sqrt{128}$, $4\sqrt{8} = \sqrt{128}$, adevărată; h) $\sqrt{5,(2)} = \sqrt{\frac{47}{9}} = \frac{\sqrt{47}}{3}$, $\frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{48}}{3}$, falsă; i) $\sqrt{3{,}96} = \sqrt{\frac{396}{100}} = \frac{\sqrt{396}}{10}$, $\frac{3\sqrt{11}}{5} = \frac{\sqrt{99}}{5} = \frac{2\sqrt{99}}{10} = \frac{\sqrt{396}}{10}$, adevărată; j) $(2\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 2) = 10 + 4\sqrt{5} - \sqrt{5} - 2 = 8 + 3\sqrt{5}$, adevărată;
k) $(3 - \sqrt{7})(3 + \sqrt{7}) = 9 - 7 = 2$, adevărată; l) $\sqrt{4^2 + 1} + \sqrt{4^2 - 1} = \sqrt{17} + \sqrt{15}$. Ridicînd la pătrat ambii membri $17 + 15 + 2\sqrt{255} = 64$, $32 + 2\sqrt{255} = 64$, $2\sqrt{255} = 32$, $\sqrt{255} = 16$, de unde $255 = 256$, falsă; m) Arătăm că $2\sqrt{5} < 4{,}5$. Intr-adevăr $20 < 20{,}25$, $2\sqrt{5} - 4{,}5 < 0$, deci falsă; n) $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, adevărată; e) $\frac{15}{2\sqrt{5}} = \frac{15\sqrt{5}}{10} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$, adevărată; p) $\frac{27}{3\sqrt{3}} = \frac{27\sqrt{3}}{9} = 3\sqrt{3}$, $\frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$, falsă; r) $\frac{5}{\sqrt{6} + 1} = \frac{5(\sqrt{6} - 1)}{(\sqrt{6}+1)(\sqrt{6}-1)} = \frac{5(\sqrt{6} - 1)}{5} = \sqrt{6} - 1$, adevărată; s) $\frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2} + 1} = \frac{(\sqrt{2} - 1)(2\sqrt{2} - 1)}{(2\sqrt{2} + 1)(2\sqrt{2} - 1)} = \frac{4 - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 1}{7} = \frac{5 - 3\sqrt{2}}{7}$, falsă; t) $\frac{\sqrt{7} + \sqrt{11}}{\sqrt{7} - \sqrt{11}} = \frac{(\sqrt{7} + \sqrt{11})^2}{(\sqrt{7} - \sqrt{11})(\sqrt{7} + \sqrt{11})} = \frac{18 + 2\sqrt{77}}{-4} = \frac{9 + \sqrt{77}}{-2}$, adevărată.

I. 10. Verificați dacă numerele:

$$\sqrt{32};\ 8;\ 2-\sqrt{6};\ \sqrt{2}-\sqrt{3}$$

pot fi termenii unei proporții și în caz afirmativ scrieți toate proporțiile cu acești termeni.

R. Se verifică imediat că: $\sqrt{32}(2-\sqrt{6}) = 8(\sqrt{2}-\sqrt{3})$ de unde rezultă proporția: $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \dfrac{8}{2-\sqrt{6}}$ și celelalte.

I.11. Fie numerele $a = 2\sqrt{4-\sqrt{15}}$ și $b = \sqrt{6}-\sqrt{10}$.

Calculați a^2 și b^2. Ce observați?

R. $a^2 = (2\sqrt{4-\sqrt{15}})^2 = 4(4-\sqrt{15})$; $b^2 = (\sqrt{6}-\sqrt{10})^2 = 6 - 2\sqrt{6\cdot 10} + 10 = 16 - 2\sqrt{4\cdot 15} = 16 - 4\sqrt{15} = 4(4-\sqrt{15})$.

Se observă că $a^2 = b^2$, deși $a \neq b$ $(a > 0,\ b < 0)$.

I.12PO. Care dintre următoarele numere este mai mare:

$$a \text{ sau } a^{-1};\ a \text{ sau } a^2;\ a^2 \text{ sau } a^{-2};\ a^x \text{ sau } a^{-x},$$

unde a este un număr real strict pozitiv și diferit de 1?

R. Sînt două cazuri, după cum a este subunitar sau supraunitar. Obținem respectiv $a > a^{-1}$ dacă $a > 1$, $a < a^{-1}$ dacă $a < a < 1$; $a^2 > a^{-2}$ dacă $a > 1$, $a^x < a^{-x}$ dacă $0 < a < 1$, $a^x > a^{-x}$ dacă $a > 1$ și $x > 0$ sau dacă $0 < a < 1$ și $x < 0$ și $a^x < a^{-x}$ dacă $0 < a < 1$ și $x > 0$ sau dacă $a > 1$ și $x < 0$.

I.13. Determinați valoarea de adevăr a propozițiilor:

p_1: „$a^2 > 0$, oricare ar fi a număr real”.

p_2: „$a^3 > 0$, oricare ar fi a număr real”

p_3: „$a^x > 0$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ și $x \in \mathbb{R}$.

R. $a^2 > 0$ oricare ar fi semnul lui a, deci p_1 este adevărată; p_2 este falsă, deoarece pentru $a < 0$, $a^3 < 0$; p_3 este adevărată, pentru $x > 0$ este evident iar pentru $x < 0$, avem $a^x = \dfrac{1}{a^{-x}} > 0$.

În mod analog se demonstrează celelalte egalități.

I.14PO. Enumerați elementele următoarelor mulțimi:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 5 \dot{-} k,\ k \in \mathbb{N}\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 5 - k,\ k \in \mathbb{Z},\ k \geqslant -5\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 5 - k,\ k \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N},\ k \geqslant -5\}.$$

$$D = \{x \in \mathbb{N} \mid x = k - 3,\ k \in \mathbb{N},\ k \leqslant 10\}$$

$$E = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = k - 3,\ k \in \mathbb{N},\ k \leqslant 10\}$$

$$F = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 1 - 3p,\ p \in \mathbb{Q},\ p \geqslant -3\}$$

$$G = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 1 - 3p,\ p \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z},\ p \geqslant -3\}$$

R. În cazul mulțimii A_1, x număr natural implică $x \geqslant 0$, adică $5 - k \geqslant 0$ sau $k \leqslant 5$ și, considerînd numerele naturale $k \leqslant 5$, adică $0, 1, 2, 3, 4, 5$, obținem mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

În cazul mulțimii B se impune $5 - k > 0$ sau $k < 5$. Considerînd numerele întregi cu proprietățile $k \leqslant 5$ și $k \geqslant -5$, adică numerele $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ se obține $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

În cazul mulțimii C, se consideră pentru $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ numai valorile $-5, -4, -3, -2, -1, 0$ și se obține $C = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

În cazul mulțimii D, $x \in \mathbb{N}$ implică $k - 3 > 0$ sau $k > 3$. Considerînd numerele naturale k cu proprietățile $k \leqslant 10$ și $k \geqslant 3$, adică numerele $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ se obține $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

În cazul mulțimii E se consideră numerele naturale k : $0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 6, 8, 9, 10$ și se obține $E = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

În cazul mulțimii F, $x \in \mathbb{N}$ implică $1 - 3p \geqslant 0$ sau $3p \leqslant 1$ sau $p \leqslant \frac{1}{3}$: Pe de altă parte, $x \in \mathbb{N}$ implică $1 - 3p \in \mathbb{N}$, adică $3p \in \mathbb{N}$, de unde rezultă p întregi sau raționale de orma $\frac{a}{3}$ cu $a \in \mathbb{Z}$. Ținînd cont și de ipoteza $p \geqslant -3$, rezultă pentru p valorile : $-3, -2, -1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}$ și rezultă : $F = \{0, 1, 2, 3, 4, 7, 10\}$. În cazul mulțimii G, p trebuie să îndeplinească condițiile : $p \leqslant \frac{1}{3}$, $p \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $p \geqslant -3$, adică p poate fi $-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$, de unde rezultă $G = \{0, 2, 3\}$.

I. 15PO**.** Enumerați elementele următoarelor mulțimi :

$$A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x = \frac{5}{k - 3},\ k \in \mathbb{N}\right\}$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{N} \mid x = \frac{5}{k - 3},\ k \in \mathbb{N}\right\}$$

$$C = \left\{x \in \mathbb{N} \mid x = \frac{5}{k - 3},\ k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}\right\}$$

$$D = \left\{x \in \mathbb{N} \mid x = \frac{5}{k - 3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$E = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x = \frac{2k + 6}{k - 2},\ k \in \mathbb{N}\right\}$$

$$F = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x = \frac{2k + 6}{k - 2},\ k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}\right\}$$

$$G = \left\{x \in \mathbb{N} \mid x = \frac{k^2 - 3k + 2}{k - 3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$H = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x = \frac{2k^2 - k - 1}{2k - 1},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$I = \left\{x \in \mathbb{N} \mid x = \frac{2k^2 + 1}{k^2 + 1},\ k \in \mathbb{R}\right\}$$

$$J = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x = \frac{k^2 - 2}{k^2 - 1},\ k \in \mathbb{Q}\right\}$$

R. În cazul mulţimii A, $x \in \mathbb{Z}$ implică $\frac{5}{k-3} \in \mathbb{Z}$, de unde $k - 3$ trebuie să fie divizor al lui 5. Deci $k - 3$ poate fi ± 5, ± 1, adică k poate fi $-2, 2, 4, 8$ din care eliminăm pe -2, k fiind natural. Deci $A = \{-5, 1, 5\}$.

Pentru determinarea elementelor mulţimii B se procedează ca în cazul mulţimii A, ţinînd cont, în plus, de faptul că $x \in \mathbb{N}$. Rezultă $B = \{1, 5\}$. În cazul mulţimii C, se reţine dintre valorile lui k determinate în cazul mulţimii A, valoarea -2 în ipoteza $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Pentru $k = -2$, rezultă $x = -1$. Cum $x \in N$, rezultă $C = \Phi$.

În cazul mulţimii D, se dau lui k valorile $-2, 2, 4, 8$, obţinute mai sus şi rezultă $D = \{-5, -1, 1, 5\}$.

Pentru determinarea mulţimii E, numărul $x = \frac{2k + 6}{k - 2}$ se mai scrie $\frac{2k+6}{k-2} = \frac{2k-4}{k-2} + \frac{10}{k-2} = \frac{2(k-2)}{k-1} + \frac{10}{k-2} = 2 + \frac{10}{k-2}$. $x \in \mathbb{Z}$ implică $\frac{10}{k-2} \in \mathbb{Z}$, de unde $k - 2$ trebuie să fie divizor al lui 10, adică ± 1, ± 2, ± 5 sau ± 10. Rezultă pentru k valorile : $-8, -3, 0, 1, 3, 4, 7, 12$. În ipoteza $k \in \mathbb{N}$ rezultă $E = \{-8, -3, 3, 4, 7, 12\}$.

Pentru determinarea mulţimii F, în ipoteza $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ se reţin pentru k valorile -8, -3 dintre cele determinate pentru mulţimea E şi rezultă $F = \{0, 1\}$.

În cazul mulţimii G, x se scrie succesiv : $x = \frac{k^2 - 3k + 2}{k - 3} = \frac{k^2 - 3k}{k - 3} + \frac{2}{k - 3} = k + \frac{2}{k-3}$. $x \in \mathbb{Z}$ implică $\frac{2}{k-3} \in \mathbb{Z}$, deci $k - 3$ trebuie să fie divizor al lui 2. Din $k - 3 \in \{-2, -1, 1, 2\}$ rezultă $k \in \{1, 2, 4, 5\}$ şi $G = \{0, 6\}$.

Pentru determinarea mulţimii H, se observă că $x = \frac{2k^2 - k}{2k - 1} - \frac{1}{2k - 1} = k - \frac{1}{2k - 1}$ şi trebuie ca $2k - 1 = -1$ sau $2k - 1 = 1$, deci $k \in \{0, 1\}$. Înlocuind în expresia lui x rezultă $H = \{0, 1\}$.

În cazul mulţimii I, $x = \frac{2k^2 + 1}{k^2 + 1} = \frac{2k^2 + 2}{k^2 + 1} - \frac{1}{k^2 + 1} = \frac{2(k^2 + 1)}{k^2 + 1} - \frac{1}{k^2 + 1} = 2 - \frac{1}{k^2 + 1}$. $x \in \mathbb{N}$ implică $k^2 + 1 \in \{-1, 1\}$, adică $k^2 \in \{-2, 0\}$ Ecuaţia $k^2 = -2$ nu are soluţii în $\mathbb{R}$, iar din $k^2 = 0$ rezultă $k = 0$. Înlocuind în expresia lui x, rezultă $x = 1$ şi deci $I = \{1\}$. În cazul mulţimii J, $x = \frac{k^2 - 2}{k^2 - 1} = \frac{k^2 - 1}{k^2 - 1} - \frac{1}{k^2 - 1} = 1 - \frac{1}{k^2 - 1}$. $x \in \mathbb{Z}$ implică $k^2-1=1$ sau $k^2-1=-1$, adică $k^2=2$ sau $k^2=0$. Ecuația $k^2=2$ nu are soluții în $\mathbb{Q}$. Rezultă, deci $k=0$ și $J=\{2\}$.

I. 16^PO^. Arătați că există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încît numerele

$$x=\frac{3}{k}+\frac{2}{k-1} \text{ și } y=\frac{3}{k-2}+\frac{5}{k+2} \text{ să fie întregi.}$$

R. Numărul x este întreg dacă, de exemplu, $\frac{3}{k} \in \mathbb{Z}$ și $\frac{2}{k-1} \in \mathbb{Z}$, ceea ce este echivalent cu k divizor al lui 3 și $k-1$ divizor al lui $+2$, adică $k \in \{-3, -1, 1, 3\}$ și $k-1 \in \{-2, -1, 1, 2\}$ sau $k \in \{-3, -1, 1, 3\} \cap \{-1, 0, 2, 3\} = \{-1, 3\}$. Dînd lui k valorile -1 și 3 se obține $x_1=\frac{3}{-1}+\frac{2}{-2}=-3-1=-4$, respectiv $x_2=\frac{3}{3}+\frac{2}{3-1}=1+1=2$. Așadar există $k=-1$ sau $k=3$ pentru ca $x \in \mathbb{Z}$.

În mod analog $y \in \mathbb{Z}$ dacă, de exemplu $k-2$ divide pe 3 și $k+2$ divide pe 5, ceea ce se întîmplă cînd $k-2 \in \{-3, -1, 1, 3\}$ și $k+2 \in \{-5, -1, 1, 5\}$ sau $k \in \{-1, 1, 3, 5\} \cap \{-7, -3, -1, 3\} = \{-1, 3\}$.

Înlocuind pe k cu aceste valori, obținem $y_1=\frac{3}{-1-2}+\frac{5}{-1+2}=-1+5=4$, respectiv $y_2=\frac{3}{3-2}+\frac{5}{3+2}=3+1=4$.

I. 17^PO^. Determinați numerele k întregi pentru care numerele următoare sînt întregi:

$$A=\frac{k+1}{4}, \quad B=\frac{k-2}{3}, \quad C=\frac{k^2-9}{k-3}.$$

R. Numărul A este întreg atunci cînd 4 divide $k+1$ sau cînd $k+1$ este un multiplu de 4. Deci $k+1=4p$, $p \in \mathbb{Z}$, deci $k=4p-1$, $p \in \mathbb{Z}$. Într-adevăr, pentru $k=4p-1$, rezultă $A = \frac{4p-1+1}{4}=p$, deci întreg.

Analog: $B \in \mathbb{Z}$ implică $k-2=3p$, $p \in Z$, adică $k=3p+2$, $p \in \mathbb{Z}$.

C se scrie succesiv: $C=\frac{k^2-9}{k-3}=\frac{(k-3)(k+3)}{k-3}=k+3$, de unde rezultă că $C \in \mathbb{Z}$ pentru orice $k \in \mathbb{Z}-\{3\}$. (Pentru $k=3$ nu există numărul rațional C, numitorul fiind zero).

I. 18^PO^. Determinați $k \in \mathbb{Z}$ pentru care numerele:

$$x=\frac{k+3}{5} \text{ și } y=\frac{3k-1}{5} \text{ sînt simultan întregi:}$$

R. Avem $k=5x-3$ și $3k=5y+1$. Numerele k care satisfac condițiile impuse vor fi de forma: $5p+r$, $p \in \mathbb{Z}$, $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Verificînd pentru fiecare valoare a lui r, obținem întregii $k=5p+2$, $p \in \mathbb{Z}$.

I. 19^PO^. Să se arate că $x=\frac{5k-3}{4}$ și $y=\frac{7k-2}{6}$ nu pot fi ambele întregi pentru aceleași valori ale lui k.

R. Presupunem x şi y întregi. Avem $k = \dfrac{4x+3}{5}$, respectiv $k = \dfrac{6y+2}{7}$. Se impune $\dfrac{4x+3}{5} = \dfrac{6y+2}{7}$, adică $2(15y - 14x) = 11$, contradicţie un număr par nefiind egal cu un număr impar. Deci nu există nici o valoare a lui k care să satisfacă cerinţele exerciţiului.

I.20PO. Arătaţi că numărul :

$$N = \frac{(-1)^n(2n-1)+1}{4}$$

este întreg oricare ar fi numărul $n \in \mathbb{N}^*$.

R. Un număr natural n este par, adică de forma $2p$, $p \in \mathbb{N}$ sau impar, adică de forma $2p + 1$, $p \in \mathbb{N}$.

Pentru a verifica faptul că N este întreg vom considera, pe rînd, n par, respectiv impar. Aşadar pentru $n = 2p$, cu $p \in \mathbb{N}$, avem :

$$N = \frac{(-1)^{2p}[2(2p)-1]+1}{4} = \frac{4p-1+1}{4} = \frac{4p}{4} = p.$$

Pentru $n = 2p + 1$, $p \in \mathbb{N}$, obţinem :

$$N = \frac{(-1)^{2p+1}[2(2p+1)-1]+1}{4} = \frac{(-1)(4p+2-1)+1}{4} =$$

$$= \frac{-4p-2+1+1}{4} = -p.$$

Deci pentru n par se obţin întregii pozitivi, iar pentru n impar se obţin întregii negativi.

I.21PO. Diferenţa pătratelor a două numere naturale consecutive este un număr natural impar.

R. Dacă $n - 1$ şi n sînt cele două numere naturale consecutive, atunci $n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$, adică un număr natural impar.

I.22. Dacă $a + b$ este impar atunci $a \cdot b$ este număr par, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{Z}$.

R. $a + b$ impar implică $a + b = 2p + 1$, $p \in \mathbb{N}$. Fie a un număr natural par, adică $a = 2q$. Atunci $b = 2p + 1 - 2q = 2(p - q) + 1$ este un număr impar şi rezultă că produsul $a \cdot b$ este evident par. Dacă a ar fi impar, adică $a = 2q + 1$, atunci $b = 2p + 1 - 2q - 1 = 2(p - q)$, adică par şi, la fel, $a \cdot b$ ar fi par.

Acelaşi raţionament se face în cazul $a \cdot b$ impar.

I.23PO. Arătaţi că numerele :

$$x = \frac{n^3 - n}{6}, \quad y = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} \quad \text{şi} \quad z = \frac{5n^2 + 5n + 2}{2}$$

sînt întregi oricare ar fi n întreg.

R. $x = \dfrac{n^3 - n}{6} = \dfrac{(n-1)\,n(n+1)}{6}$. Numărătorul fiind produsul a trei numere întregi consecutive, rezultă că se divide cu 3. Fiind şi produsul a doi întregi consecutivi se divide cu 2. Deci se divide cu 6.

$y = \dfrac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} = \dfrac{n(n^2 + 3n + 2)}{6} = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ şi se raţionează analog.

$z = \dfrac{5n^2 + 5n + 2}{2} = \dfrac{5n(n+1) + 2}{2}$; cum $n(n+1)$ se divide cu 2, rezultă că $5n(n+1) + 2$ se divide cu 2 şi deci z este întreg.

I.24^PO. Care număr este mai mare:

$$A = \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{sau} \quad B = \frac{(-1)^n}{n^2+1}, \quad n \in \mathbb{N}?$$

R. Pentru a stabili valoarea lui $(-1)^n$, vom considera pe rînd n par respectiv n impar. Dacă n par, adică $n = 2p$, $p \in \mathbb{Z}$, atunci:

$$A = \frac{(-1)^{2p}}{(2p)^2} = \frac{1}{4p^2} \quad \text{şi} \quad B = \frac{(-1)^{2p}}{(2p)^2 + 1} = \frac{1}{4p^2 + 1}$$

şi rezultă că $A > B$ deoarece B are numitorul mai mare decît numitorul lui A.

Dacă n impar, adică $n = 2p + 1$, $p \in \mathbb{Z}$, atunci:

$$A = \frac{(-1)^{2p+1}}{(2p+1)^2} = \frac{-1}{(2p+1)^2} \quad \text{şi} \quad B = \frac{(-1)^{2p+1}}{(2p+1)^2 + 1} = \frac{-1}{(2p+1)^2 + 1}$$

şi rezultă că $A < B$ deoarece sînt negative şi numitorul lui B este mai mare decît numitorul lui A.

I.25^PO. Arătaţi că între oricare două numere raţionale mai există cel puţin un alt număr raţional.

R. Dacă a, b sînt două numere raţionale $a < b$, atunci $\dfrac{a+b}{2}$ (media aritmetică a numerelor a şi b) se află între a şi b. Într-adevăr, de exemplu, $\dfrac{a+b}{2} < b \Leftrightarrow a + b < 2b \Leftrightarrow a < b$.

I.26^PO. Arătaţi că numărul $\sqrt{2}$ este iraţional.

R. Presupunem că $\sqrt{2}$ ar fi raţional, adică ar exista numerele întregi prime între ele, nenule, astfel încît $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$. Ridicînd la pătrat egalitatea, rezultă $2 = \dfrac{m^2}{n^2}$ sau $m^2 = 2n^2$ Cum m^2 este un număr par, rezultă că m trebuie să fie par. Fie atunci $m = 2p$, rezultă $(2p)^2 = 2n^2$, adică $2p^2 = n^2$, de unde n^2 par, adică n par. Acest lucru contrazice presupunerea făcută: m, n prime între ele. Deci $\sqrt{2}$ este un număr iraţional.

I.27. Arătaţi care din numerele următoare sînt raţionale şi care iraţionale:

a) $-1{,}56$; b) $1{,}(560)$; c) $\sqrt{3}$; d) $\sqrt{6}$; f) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

R. a) $-1{,}56 = -\frac{156}{100} \in \mathbb{Q}$; b) $1{,}(560) = \frac{1559}{999} \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ și $\sqrt{\frac{2}{3}}$ sînt iraționale (vezi exercițiul I. 26).

I.28. Fie $x \in \mathbb{R}$. Notăm $|x| = \begin{cases} -x \text{ dacă } x < 0 \\ 0 \text{ dacă } x = 0, \\ x \text{ dacă } x > 0 \end{cases}$

numit „modulul numărului real x". Determinați:

$$\left|\frac{5}{2}\right|; \quad |-1{,}3|; \quad |1-\sqrt{2}|; \quad |5-2\sqrt{6}|; \quad \left|\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right|.$$

R. Aplicînd definiția modulului rezultă:

$$\left|\frac{5}{2}\right| = \frac{5}{2}; \quad |-1{,}3| = 1{,}3; \quad |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1; \quad |5-2\sqrt{6}| =$$

$$= |(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2| = 5-2\sqrt{6}; \quad \left|\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right| = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}.$$

I.29. x fiind un număr real oarecare, determinați:

a) $|-x|$; b) $|2x|$; c) $|(1-\sqrt{2})x|$; d) $|x^2|$; e) $|x-1|$;

R. a) Conform definiției:

$$|-x| = \begin{cases} -x, \text{ dacă } -x > 0 \\ 0 \text{ dacă } -x = 0 \\ -(-x), \text{ dacă } -x < 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad |-x| = \begin{cases} -x, \text{ dacă } x < 0 \\ 0, \text{ dacă } x = 0, \\ x, \text{ dacă } x > 0 \end{cases}$$

adică $|-x| = |x|$. b) $|2x| = |2| \cdot |x| = 2|x|$;

c) $|(1-\sqrt{2})x| = |1-\sqrt{2}|\,|x| = (\sqrt{2}-1)\,|x|$; d) $x^2 > 0$ pentru orice x implică $|x^2| = x^2$; e) Conform definiției

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, \text{ dacă } x-1 > 0 \\ 0, \quad \text{dacă } x-1 = 0 \\ -x+1, \text{ dacă } x-1 < 0. \end{cases}$$

I.30. Fie $x \in \mathbb{R}$. Notăm $[x]$ cel mai mare întreg mai mic decît x (numit „partea întreagă a numărului x") și $\{x\} = x - [x]$" partea fracționară a numărului x". Determinați:

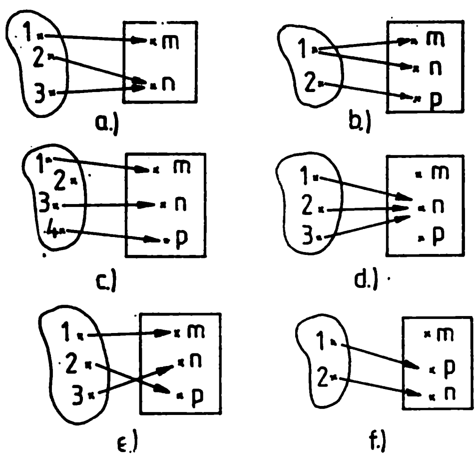
$$[-5{,}3]; \quad \{-5{,}3\}; \quad \left[-\frac{22}{7}\right]; \quad \left\{-\frac{1}{4}\right\}; \quad [-\sqrt{2}]; \quad [\sqrt{2}];$$

$$\{2\}; \quad [\pi]; \quad [1+\sqrt{5}]; \quad \left[\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right].$$

CAPITOLUL II

FUNCŢII

II.1. Decideţi care dintre următoarele diagrame reprezintă funcţii : $f: A \to B$ şi care nu. (Cu A am notat, în fiecare caz mulţimile cu elementele 1, 2, 3, 4, iar cu B am notat mulţimile cu elementele m, n, p.)



R. Diagrama a) reprezintă o funcţie deoarece oricărui element aparţinînd mulţimii A îi corespunde un element şi numai unul din mulţimea B.

Diagrama b) nu reprezintă o funcţie deoarece elementul $1 \in A$ are două imagini (m şi n) în muţimea B.

Diagramele d), e), f) reprezintă funcţii.

II.2. Fiind date mulţimile $A = \{a, b\}$ şi $B = \{1, 2\}$, determinaţi toate funcţiile $f: A \to B$. Procedaţi la fel în cazul mulţimilor $E = \{0, 1\}$ şi $F = \{0, 1\}$ şi în cazul mulţimilor $M = \{0, 1, 2\}$ şi $N = \{a, b\}$.

R. Funcţiile vor diferi între ele prin modul în care se realizează corespondenţa. În primul caz se pot distinge patru funcţii diferite:

1) $a \to 1$	2) $a \to 2$	3) $a \to 1$	4) $a \to 2$
$b \to 2$	$b \to 1$	$b \to 1$	$b \to 2$

În mod analog se pot defini 4 funcţii $f: E \to F$, respectiv 8 funcţii $f: M \to N$.

II.3PO. Fie mulțimile: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B_1 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $B_2 = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B_3 = \{3, 5, 7, 9, 11\}$, $B_4 = \{1, 4, 9, 16, 25\}$, $B_5 = \{-1, 1\}$, $B_6 = \left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}\right\}$.

Descrieți cu ajutorul unei formule cîte o funcție $f_i : A \to B_i$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

R. Formulele căutate sînt:

$$f_1(x) = x + 1,\quad f_2(x) = 2x,\quad f_3(x) = 2x + 1,\quad f_4(x) = x^2,\quad f_5(x) = (-1),\quad f_6(x) = \frac{(-1)^x}{x}.$$

II.4. Întocmiți tabelele funcțiilor:

$f_1 : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = 2^x$.

$f_2 : \{0, 1, 8, 16, 27\} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = \sqrt{x}$.

$f_3 : \left\{-2, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \sqrt{2}\right\} \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.

$f_4 : \{1 - \sqrt{2}, -1, 0, 7\} \to \mathbb{R}$, $f_4(x) = |x|$.

$f_5 : \left\{-\frac{8}{3}, -\sqrt{2}, 0, \frac{3}{2}, 5\right\} \to \mathbb{R}$, $f_5(x) = [x]$.

R. Rezultă următoarele tabele:

x	-2	-1	0	1	2
$f_1(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

x	0	1	8	16	27
$f_2(x)$	0	1	$2\sqrt{2}$	4	$3\sqrt{3}$

x	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$
$f_3(x)$	3	-3	-1	$-\frac{1}{3}$	$3-2\sqrt{2}$

x	$1-\sqrt{2}$	-1	0	7
$f_4(x)$	$\sqrt{2}-1$	1	0	7

x	$-\frac{8}{3}$	$-\sqrt{2}$	0	$\frac{3}{2}$	5
$f_5(x)$	-3	-2	0	1	5

II.5. Reprezentați grafic funcțiile:

$f_1 : \{-1, -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2 - 2$.

$f_2 : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

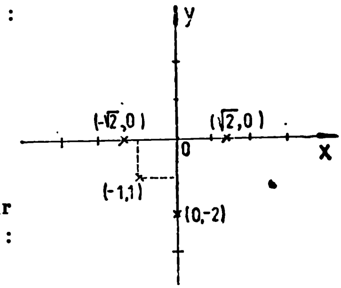
$$f_3 : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}, \quad f_3(x) = |x|.$$

$$f_4 : \left\{-1, \ -\frac{1}{2}, \ 0, \ \frac{3}{2}, \ 2\right\} \to \mathbb{R}, \quad f_4(x) = 2.$$

$$f_5 : \left\{-1, \ -\frac{1}{2}, \ 0, \ \frac{3}{2}, \ 2\right\} \to \mathbb{R}, \quad f_5(x) = x - 1.$$

R. Obținem următorul tabel cu valorile funcției f_1:

x	-1	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$
$f_1(x)$	-1	0	-2	0



Reprezentînd într-un sistem de axe rectangular punctele $(-1,-1), (-\sqrt{2}, 0), (0,-2), (\sqrt{2}, 0)$ obținem graficul:

Analog, obținem graficele celorlalte funcții în figurile 2, 3, 4, respectiv 5.

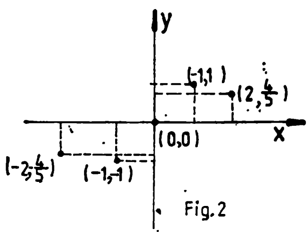


Fig. 2

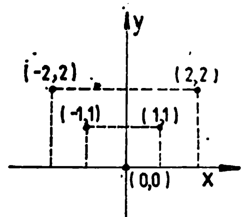


Fig. 3

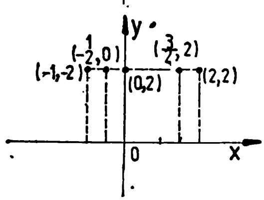


Fig. 4

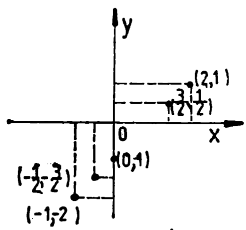


Fig. 5

II.6. Reprezentați grafic funcțiile:

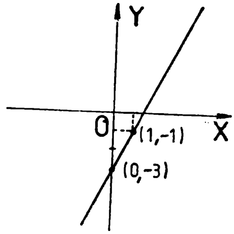
$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = 2x - 3.$

$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = 3 - x.$

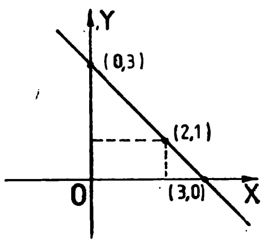
$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_3(x) = 3.$

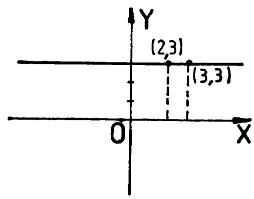
R. Ținînd cont că graficul unei funcții liniare este o dreaptă, dînd două valori arbitrare reale lui x obținem două funcții care determină dreptele respective.

Pentru funcţia f_1, punctele $(0, -3)$ şi $(+1, -1)$ determină dreapta :



Pentru funcţiile f_2 şi f_3 punctele $(2, 1)$, $(3, 0)$, respectiv punctele $(2, 3)$, $(3, 3)$, determină graficele :





II.7. Reprezentaţi grafic, în acelaşi sistem de axe ortogonal, funcţiile :

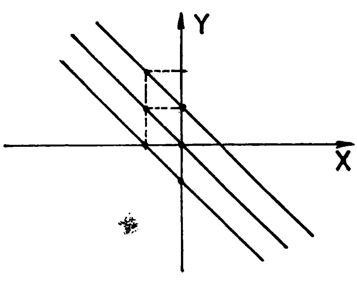
$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = -x.$$

$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = -x + 1.$$

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_3(x) = -x - 1.$$

Ce observaţi?

R. Dînd, de exemplu lui x valorile -1 şi 0, obţinem punctele $(-1, 1)$, $(0, 0)$; $(-1, 2)$, $(0, 1)$ respectiv $(-1, 0)$, $(0, -1)$ şi graficele :

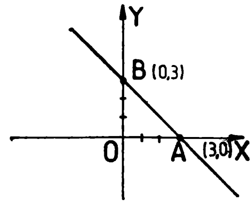


Obţinem deci trei drepte paralele.

II.8PO**.** Aflaţi aria triunghiului determinat de axele de coordonate şi de graficul funcţiei liniare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 3$.

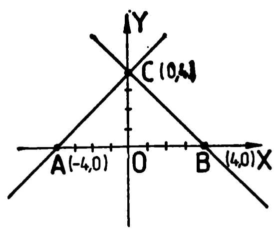
R. Reprezentînd grafic funcţia f, obţinem triunghiul AOB.

dreptunghic în O, cu catetele $OA = 3$ şi $OB = 3$. Aria triunghiului AOB este deci $\frac{9}{2}$.



II.9[PO]. Aflaţi aria triunghiului determinat de axa Ox şi dreptele $y = -x + 4$ şi $y = x + 4$.

R. Reprezentînd, într-un sistem de axe ortogonal $x0y$, dreptele $y = -x + 4$ şi $y = x + 4$, obţinem triunghiul ABC isoscel. Considerînd baza AB şi înălţimea OC, obţinem aria $S = \frac{AB \cdot OC}{2} = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16$.



II.10. Reprezentaţi grafic funcţiile :

a). $f : \{-3, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \in \{-3, 0\}. \\ 2, & x \in \{1, 2\}. \end{cases}$

b). $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad g(x) = \begin{cases} -x + 1, & x \in (-\infty, 1]. \\ x - 1, & x \in (1, +\infty). \end{cases}$

R. a). Obţinem tabelele de valori ale funcţiilor f, respectiv g :

x	-3	0	1	2
$f(x)$	-1	2	2	2

x	-2	-1	1	2	3
$g(x)$	3	2	0	1	2

şi graficele din fig. 1, respectiv fig. 2.

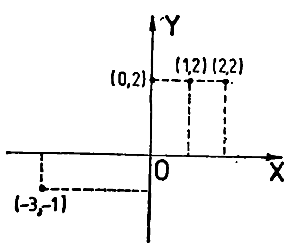


fig. 1

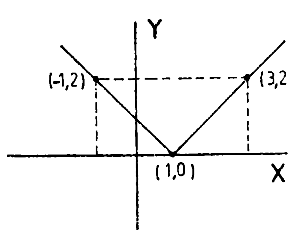


fig. 2

II.11. Rezolvaţi inecuaţiile :

a). $2x - 5 > 0$ b). $-x + 5 \leqslant 0$

c). $\sqrt{3}x - \sqrt{5} < 0$ d). $\sqrt{2}x \leqslant 2$

e). $2x - 8 < 2x - 5$ f). $2x + 8 + 3x < 4 + 5x$.

R. a). Obţinem, succesiv, inecuaţiile echivalente:

$2x > 5$, $x > \frac{5}{2}$, $x \in \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$. b). $-x \leqslant -5 \Leftrightarrow x \geqslant 5 \Leftrightarrow x \in [5, +\infty)$. c). $\sqrt{3}x - \sqrt{5} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x < \sqrt{5} \Leftrightarrow x < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x < \frac{\sqrt{15}}{3}$, $x \in \left(-\infty, \frac{\sqrt{15}}{3}\right)$. d). $x \leqslant \frac{2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \leqslant \sqrt{2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \in (-\infty, \sqrt{2}]$. e). Obţinem $-8 < -5$, deci inecuaţia este satisfăcută pentru orice $x \in \mathbb{R}$ f). Obţinem $8 < 4$ unde rezultă că inecuaţia nu are soluţii.

II.12. Stabiliţi semnul funcţiilor liniare :

a). $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 5$.

b). $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -5x + 6$, $a \in \mathbb{R}$.

c). $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = (m - 1)x - 3$, $m \in \mathbb{R}$.

R. a). Avem $2x - 5 = 0$, $x = \frac{5}{2}$ şi tabelul cu semnul funcţiei f:

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +\ +$	

b). Analog, obţinem :

x	$-\infty$		$\frac{6}{5}$		$+\infty$
$g(x)$		$+\ +\ +$	0	$-\ -\ -\ -$	

c). Se impun trei cazuri : I. $m - 1 > 0$ şi II. $m - 1 < 0$ şi III. $m = 1$.

I. $m - 1 > 0$

x	$-\infty$		$\frac{3}{m-1}$		$+\infty$
$g(x)$		$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +\ +\ +$	

II. $m - 1 < 0$

x	$-\infty$		$\frac{3}{m-1}$		$+\infty$
$h(x)$		$+\ +\ +$	0	$-\ -\ -\ -\ -$	

III. Pt. $m = 1$ funcţia devine constantă, $h(x) = -3$, negativă, deci, pentru orice x real.

CAPITOLUL III

CALCULUL ALGEBRIC

III.1. Fie polinomul: $P(X) = X^4 + 2X^3 - 5X^2 - X + 5$.

Determinați valorile polinomului în punctele $-\sqrt{2}$, $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$,

R. Avem $P(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^4 + 2(-\sqrt{2})^3 - 5(-\sqrt{2})^2 - (-\sqrt{2}) + 5 = 4 - 4\sqrt{2} + 10 + \sqrt{2} + 5 = 19 - 3\sqrt{2}$.

Analog obținem:

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{65}{16},\ P(0) = 5,\ P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{57}{16} \text{ și } P(\sqrt{2}) = 3\sqrt{2} - 1.$$

III.2. Fie polinomul: $P(X) = 4X^4 + 3X^2 - 27$.

a). Determinați: $P(-\sqrt{3})$, $P(\sqrt{3})$, $P\left(-\frac{3}{2}\right)$, $P\left(\frac{3}{2}\right)$, $P(-1)$, $P(1)$.

b). Arătați că $P(-x) = P(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

R. a). Obținem:

$$P(-\sqrt{3}) = P(\sqrt{3}) = 18,\ P\left(-\frac{3}{2}\right) = P\left(\frac{3}{2}\right) = 0,\ P(-1) = P(1) = -20.$$

b). Într-adevăr:

$$P(-x) = 4(-x)^4 + 3(-x)^2 - 27 = 4x^4 + 3x^2 - 27 = P(x).$$

III.3. Fie polinomul: $P(X) = X^3 - 5X$.

a). Determinați: $P(-2)$, $P(2)$, $P(-\sqrt{5})$, $P(\sqrt{5})$, $P(-3)$, $P(3)$.

b). Arătați că: $P(-x) = -P(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

R. a). $P(-2) = 2$, $P(2) = -2$, $P(-\sqrt{5}) = P(\sqrt{5}) = 0$, $P(-3) = -12$, $P(3) = 12$.

b). $P(-x) = (-x)^3 - 5(-x) = -x^3 + 5x = -(x^3 - 5x) = -P(x)$.

III.4. Fie polinoamele:

$$P(X) = X^3 - 5X^2 + X - 3$$

$$Q(X) = X^3 + mX^2 + nX + p, \; m, \; n, \; p \in \mathbb{R}.$$

a). Determinați m, n, p astfel încît polinoamele P și Q să fie identice.

b). Aceeași cerință în cazul polinoamelor:

$$P(X) = pX^3 - 4X + 3 \text{ și } Q(X) = 3X^3 + mX^2 + nX + p$$

R. a). Identificînd coeficienții nedeterminatelor de același grad obținem: $m = -5$, $n = 1$, $p = -3$.

b). Analog, obținem: $p = 3$, $m = 0$, $n = -4$.

III.5. Fie polinoamele: $P(X) = X^2 - aX + b$ și $Q(X) = aX^2 - 2X + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Sînt aceste polinoame identice?

Dar polinoamele: $P'(X) = aX^3 - 5X + 6$ și $Q'(X) = X^2 + bX + 6$?

R. Polinoamele nu sînt identice deoarece identificînd coeficienții nedeterminatelor de același grad, obținem simultan: $a = 1$ și $a = 2$.

Nici P' și Q' nu sînt identice deoarece identificînd coeficienții lui X^2, obținem $1 = 0$, care este propoziție falsă.

III.6[PO]. Fie polinoamele: $P(X) = mX^5 + (1 - n)X^4 + (p - 3)X + m$ și $Q(X) = (1 - m + n)X^2 + (n - p)X + 2m + p$, $m, n, p \in \mathbb{R}$.
Determinați m, n și p astfel încît P și Q să fie identic nule.

R. Punînd condiția ca toți coeficienții polinomului P să fie nuli, obținem: $m = 0$, $n = 1$, $p = 3$.

Polinomul Q este identic nul pentru valorile lui m, n, p pentru care sistemul format din ecuațiile: $1 - m + n = 0$, $n - p = 0$, $2m + p = 0$ este satisfăcut, adică pentru: $m = \frac{1}{3}$, $n = -\frac{2}{3}$, $p = -\frac{2}{3}$.

III.7. Calculați $P + Q$ dacă:

a). $P(X) = 5X^5 - 4X^4 + 3X^3 - 2X^2 + X - 1$ și

$Q(X) = -X^4 + 2X^3 - 3X^2 + 4X - 4$

b). $P(X, Y) = 3X^3Y - 2X^2Y^2 + XY^3 - 5$ și

$Q(X, Y) = X^4 - 3X^3Y + 2X^2Y^2 - XY^3 - 1$

c). $P(X) = -X^4 + X^3 + (1 - \sqrt{2})X + \sqrt{2}$ și

$Q(X) = -X^4 + 2X^3 + X^2 + \sqrt{2}X + \sqrt{2}$

R. Aplicînd definiția adunării polinoamelor, obținem:

a). $P(X) + Q(X) = 5X^5 + (-4 - 1)X^4 + (3 + 2)X^3 + (-2 - 3)X^2 + (1 + 4)X + (-1 - 4) = 5X^5 - 5X^4 + 5X^3 - 5X^2 + 5X - 5$.

b). $P(X, Y) + Q(X, Y) = X^4 - 6$.

c). $P(X) + Q(X) = -2X^4 + X^2 + X + 2\sqrt{2}$.

III.8. Efectuați următoarele produse de polinoame:

a). $(X^4 - 2X^3 + X - 5)(X + 1)$.

b). $(2X^2 - \sqrt{2}X + 1)(\sqrt{2}X + 1)$.

c). $(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$

d). $(X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$.

e). $(X - 3)(X + 3)(X - 1)$.

R. Aplicînd regula de înmulțire a polinoamelor, obținem:

a). $X^5 - X^4 - 2X^3 + X^2 - 4X - 5$, b). $2\sqrt{2}X^3 + 1$, c). $X^4 + X^2 + 1$, d). $X^4 + 1$, e). $X^3 - X^2 - 9X + 9$.

III.9. Calculați:

a). $(X - 1)^2$, b). $(2X - 3)^2$, c). $(\sqrt{3}X - 2)^2$.

d). $(X + 2)^2 + (X + 5)(X - 1)$, e). $5X(X + 2) - (X + 2)^2$,

f). $(X - 2)^2 - (X + 2)^2$ g). $[(X - 1)^2 - 4(X - 1) + 4] - (X + 3)^2$.

R. a). Aplicînd formula de calcul $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, obținem: $X^2 - 2X + 1$ b). Analog obținem $4X^2 - 12X + 9$, c). $3X^2 - 4\sqrt{3}X + 4$, d). $2X^2 + 8X - 1$, e). $4X^2 + 6X - 4$. f). $-8X$. g). Notăm $X - 1$ cu A și avem în paranteza dreaptă $A^2 - 4A + 4 = (A - 2)^2$. Avem deci: $(X - 1 - 2)^2 - (X + 3)^2 = (X - 3)^2 - (X + 3)^2 = -12X$. Se poate calcula și direct folosind corect ordinea operațiilor.

III.10. Ce termen lipsește pentru a avea pătratul unui binom:

a). $X^2 + 4X$, b). $9X^2 + 1$, c). $2X^2 + 1$, d). $X^2 - 2\sqrt{2}X$,

e). $-2XY + 1$, f). $2XY + Y^2$, g). $2\sqrt{6}X + 2$.

R. a). Polinomul conține un pătrat: X^2 și termenul $4X = 2 \cdot 2X$, ceea ce conduce la pătratul $X^2 + 2 \cdot 2X + 2^2 = (X + 2)^2$, deci lipsește 4.

b). Lipsește termenul „de la mijloc" $2 \cdot 3X = 6X$, c). $2X^2 = (\sqrt{2}X)^2$, deci $2X^2 + 1 = (\sqrt{2}X)^2 + 1^2$ și lipsește $2\sqrt{2}X$. d). $(\sqrt{2})^2 = 2$, e). $(XY)^2$, f). X^2, g). $2 = (\sqrt{2})^2$ și $2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}X = 2\sqrt{6}X$, deci lipsește $(\sqrt{3})^2 = 3$.

III.11. Calculați:

a). $(5 - X)(5 + X)$, b). $(\sqrt{2} - X)(\sqrt{2} + X)$, c). $(\sqrt{3}X - 1)(\sqrt{3}X + 1)$,

d). $(7 - X)(X + 7)$, e). $(X + Y)(X - Y)(X^2 + Y^2)$,

f). $(5X + 7Y)(25X^2 + 49Y^2)(5X - 7Y)$, g). $(1 + Y)(1 - Y)(1 + Y^2)$.

R. a) Aplicînd formula : $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, obținem : $5 - X^2$; b) $(\sqrt{2})^2 - X^2 = 2 - X^2$; c) $3X^2 - 1$, d) $-(X - 7)(X + 7) = -(X^2 - 49) = -X^2 + 49$; e) Obținem $(X^2 - Y^2)(X^2 + Y^2) = X^4 - Y^4$, f). Aplicînd proprietatea de asociativitate a produsului polinoamelor, obținem : $(5X + 7Y)(5X - 7Y) \cdot (25X^2 + 49Y^2) = (25X^2 - 49Y^2) \times (25X^2 + 49Y^2) = 625X^4 - 2401Y^4$. g). $(1 - Y^2)(1 + Y^2) = 1 - Y^4$.

III.12. Efectuați calculul, grupînd în mod convenabil termenii din fiecare paranteză :

a). $(1 + X + Y)(1 + X - Y)$, b). $(X^2 - X + Y)(X^2 + X + Y)$,

c). $(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$, d). $(X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$.

R. a) Avem : $[(1 + X) + Y][(1 + X) - Y] = (1 + X)^2 - Y^2 = 1 + 2X + X^2 - Y^2$ b). $[(X^2 + Y) - X][(X^2 + Y) + X] = (X^2 + Y)^2 - X^2 = X^4 + 2X^2Y + Y^2 - X^2$. c). $[(X^2 + 1) - X][(X^2 + 1) + X] = (X^2 + 1)^2 - X^2 = X^4 + 2X^2 + 1 - X^2 = X^4 + X^2 + 1$. d) $[(X^2 + 1) - \sqrt{2}X]. [(X^2 + 1) + \sqrt{2}X] = (X^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}X)^2 = X^4 + 1$.

III.13. Calculați mintal (folosind formulele de calcul prescurtat)

a). $19 \cdot 21$, b). $101 \cdot 99$, c). 42^2.

R. a) $19 \cdot 21 = (20 - 1)(20 + 1) = 20^2 - 1^2 = 399$ b) $(100 + 1)(100 - 1) = 100^2 - 1 = 9999$. c) $42^2 = (40 + 2)^2 = 40^2 + 2 \cdot 2 \cdot 40 + 2^2 = 1600 + 160 + 4 = 1764$.

III.14. Scoateți factorul comun :

a). $X^2Y - XY^2$, b). $\sqrt{2}XY^3 - 2X^2Y$,

c). $5(X-1)^2 - 2X(X-1)$, d). $(3X + 1)(2X+7) + (3X + 1)(2X-7)$.

e). $XY(X+Y)^2 + XY^3(X + Y)(2X - Y)$.

R. a) Obținem : $XY(X - Y)$; b) $\sqrt{2}XY(Y^2 - \sqrt{2}X)$; c) $(X - 1)[5(X - 1) - 2X]$; d) $(3X + 1)(2X + 7 + 2X - 7) = (3X + 1)4X$; e) $XY(X + Y)[X + Y + Y^2(2X - Y)]$.

III.15. Restrîngeți

a). $25X^2 + 10XY + Y^2$, b). $X^6 + 6X^3Y + 9Y^2$,

c). $2X^2 - 2\sqrt{2}X + 1$, d). $X^4 - 6X^2Y + 9Y^2$,

e). $3X^2 + 2\sqrt{6}X + 2$.

R. a) Avem : $(5X)^2 + 2(5X) \cdot Y + (Y)^2 = (5X + Y)^2$, b) $(X^3 + 3Y)^2$, c) $(\sqrt{2}X - 1)^2$, d) $(X^2 - 3Y)^2$, e) $(\sqrt{3}X + \sqrt{2})^2$.

III.16. Descompuneți în factori ireductibili :

a). $X^2 - 4Y^2$; b). $2X^2 - 3$; c). $(X - 2)^2 - (X + 2)^2$.

R. Aplicăm formula : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

a) $X^2 - 4Y^2 = X^2 - (2Y)^2 = (X - 2Y)(X + 2Y)$; b) $(\sqrt{2}X - \sqrt{3})(\sqrt{2}X + \sqrt{3})$; c) $(X - 2 - X - 2)(X - 2 + X + 2) = -4(2X) = -8X$.

III.17. Descompuneți în factori ireductibili, polinoamele:

a). $X^2Y + XY^2 - 2XY$

b). $(4X - 5)(X - 7) - (X - 7)^2$

c). $(X - 3)^2 + (3 - X)(X + 1)$

d). $XY(X + Y)^3 - Y^2(X + Y)^2(2X - Y)$

e). $(Y - 1)^2 - (Y - 2)(Y - 1) - (1 - Y)Y$

R a) Avem: $XY(X + Y - 2)$; b) $(X - 7)(4X - 5 - X + 7) = (X - 7)(3X + 2)$; c) $(X - 3)[(X - 3) - (X + 1) = -4(X - 3)$; d) $Y(X + Y)^2(X^2 + Y^2 - XY)$ e) $(Y - 1)\cdot$ $\cdot[(Y - 1) - (Y - 2) + Y] = (Y - 1)(Y + 1)$.

III.18. Descompuneți în factori ireductibili, polinoamele:

a). $4X^2 - Y^2 - 4X + 1$, b). $X^2 - 4X + 3$, c). $X^2 - 9Y^2 - - 2X + 6Y$.

R. a) Grupînd convenabil termenii obținem: $(4X^2 - 4X + 1) - Y^2 = (2X - 1)^2 - - Y^2 = (2X - 1 - Y)(2X - 1 + Y)$; b) $X^2 - 4X + 3 = X^2 - 3X - X + 3 = (X^2 - 3X) - -(X - 3) = X(X - 3) - (X - 3) = (X - 3)(X - 1)$; c) $(X^2 - 2X) - (9Y^2 - 6Y) = = (X^2 - 2X + 1) - (9Y^2 - 6Y + 1) = (X - 1)^2 - (3Y - 1)^2 = (X - 3Y)(X + 3Y - 2)$.

III.19. Calculați valoarea numerică a fracțiilor algebrice:

$$F_1(X) = \frac{X + 1}{X^2 + 1}, \quad F_2(X) = \frac{2X}{X^2 + 2}$$

pentru valorile $-\sqrt{2}$, -1, 0, 2, date lui X.

R. Obținem: $F_1(-\sqrt{2}) = \dfrac{-\sqrt{2} + 1}{(-\sqrt{2})^2 + 1} = \dfrac{-\sqrt{2} + 1}{2 + 1} = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{3}$.

$F_1(-1) = 0$, $F_1(0) = 1$, $F_1(2) = \dfrac{3}{5}$, $F_2(-\sqrt{2}) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $F_2(-1) = \dfrac{-2}{3}$, $F_2(0) = 0$,

$F_2(2) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

III.20. Amplificați fracția: $F(X) = \dfrac{2X}{X - 2}$ cu polinoamele:

a). X, b). $X + 2$, c). $X + 1$.

R. a) Avem $F(X) = \dfrac{2X \cdot X}{(X - 2)X} = \dfrac{2X^2}{X^2 - 2X}$ b) $F(X) = \dfrac{2X^2 + 4X}{X^2 - 4}$,

c) $F(X) = \dfrac{2X^2 + 2X}{X^2 - X - 2}$.

III.21. Simplificați fracțiile algebrice raționale:

a). $\dfrac{6a^2b}{3a}$; b). $\dfrac{5xyz^2}{15xyz^3}$; c). $\dfrac{16a^3b^3c}{80abc^2d}$; d). $\dfrac{6a}{24b}$; e). $\dfrac{x^2y}{xy^2}$;

f). $\dfrac{-3xy^2}{-6abxz}$; g). $\dfrac{x^{n+1}y^n}{3x^n y}$, $n \in \mathbb{N}^*$; h). $\dfrac{a^3b}{3a^2x}$; i). $\dfrac{3au}{2az}$.

R. Avem: a) $2ab$; b) $\dfrac{1}{3z}$; c) $\dfrac{a^2b^2}{5cd}$; d) $\dfrac{a}{4b}$; e) $\dfrac{x}{y}$; f) $\dfrac{y^2}{2abz}$; g) $\dfrac{xy^{n-1}}{3}$;

h) $\dfrac{ab}{3x}$; i) $\dfrac{3u}{2z}$.

III.22. Amplificați fracțiile algebrice raționale:

a). $\dfrac{6ab}{5xy^2}$; b). $\dfrac{7xy}{3abz}$; c). $\dfrac{3x^2y^2z}{6abz^2u}$; d). $\dfrac{a+b}{c}$; e). $\dfrac{a+b}{a+d}$;

f). $\dfrac{ab+ac+bc}{a+b+c}$;

pe rînd cu: 2; a; uz; $3a^2bk$; $a+b$.

R. Avem:

a) $\dfrac{6ab}{5xy^2} = \dfrac{12ab}{10xy^2} = \dfrac{6a^2b}{5axy^2} = \dfrac{6abuz}{uxy^2z} = \dfrac{18a^3b^2k}{15a^2bkxy^2} = \dfrac{6ab(a+b)}{5xy^2(a+b)}$;

b) $\dfrac{7xy}{3abz} = \dfrac{14xy}{6abz} = \dfrac{7axy}{3a^2bz} = \dfrac{7uxyz}{3abuz^2} = \dfrac{21a^2bkxy}{9a^3b^2kz} = \dfrac{7xy(a+b)}{3abz(a+b)}$;

c) $\dfrac{3x^2y^2z}{6abz^2u} = \dfrac{6x^2y^2z}{12abz^2u} = \dfrac{3ax^2y^2z}{6a^2bz^2u} = \dfrac{3ux^2y^2z^2}{6abz^3u^2} = \dfrac{9a^2bkx^2y^2z}{18a^3b^2kz^2u} = \dfrac{3x^2y^2z(a+b)}{6abz^2u(a+b)}$;

d) $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{2(a+b)}{2c} = \dfrac{a(a+b)}{ac} = \dfrac{uz(a+b)}{cuz} = \dfrac{3a^2bk(a+b)}{3a^2bck} = \dfrac{(a+b)^2}{c(a+b)}$;

e) $\dfrac{a+b}{a+d} = \dfrac{2(a+b)}{2(a+d)} = \dfrac{a(a+b)}{a(a+d)} = \dfrac{uz(a+b)}{uz(a+d)} = \dfrac{3a^2bk(a+b)}{3a^2bk(a+d)} = \dfrac{(a+b)^2}{(a+b)(a+d)}$;

f) $\dfrac{ab+ac+bc}{a+b+c} = \dfrac{2(ab+ac+bc)}{2(a+b+c)} = \dfrac{a(ab+ac+bc)}{a(a+b+c)} = \dfrac{uz(ab+ac+bc)}{uz(a+b+c)} =$

$= \dfrac{3a^2bk(ab+ac+bc)}{3a^2bk(a+b+c)} = \dfrac{(a+b)(ab+ac+bc)}{(a+b)(a+b+c)}$;

III.23. Simplificați :

a). $\dfrac{x+1}{3(x+1)}$; b). $\dfrac{x+2}{3x+6}$; c). $\dfrac{x+y}{ax+ay}$; d). $\dfrac{a}{a^2+ab}$;

e). $\dfrac{a^2+ab}{ab+bz}$; f). $\dfrac{x^2-3x}{x^3-3x^2}$; g). $\dfrac{x+y}{ax+ay+bx+by}$.

R. Avem :

$$\text{a)}\ \frac{x+1}{3(x+1)}=\frac{1}{3};\quad \text{b)}\ \frac{x+2}{3x+6}=\frac{x+2}{3(x+2)}=\frac{1}{3};$$

$$\text{c)}\ \frac{x+y}{ax+ay}=\frac{x+y}{a(x+y)}=\frac{1}{a};\quad \text{d)}\ \frac{a}{a^2+ab}=\frac{a}{a(a+b)}=\frac{1}{a+b};$$

$$\text{c)}\ \frac{a^2+ab}{ab+b^2}=\frac{a(a+b)}{b(a+b)}=\frac{a}{b};\quad f)\ \frac{x^2-3x}{x^3-3x^2}=\frac{x(x-3)}{x^2(x-3)}=\frac{1}{x};$$

$$\text{g)}\ \frac{x+y}{ax+ay+bx+by}=\frac{x+y}{a(x+y)+b(x+y)}=\frac{x+y}{(a+b)(x+y)}=\frac{1}{a+b}.$$

III.24. Simplificați fracțiile :

a). $\dfrac{X^3-X}{5X^2+5X}$, b). $\dfrac{YX\sqrt{2}+Y^2\sqrt{6}}{YX\sqrt{2}+YX\sqrt{3}}$, c). $\dfrac{2X^2-3}{2X+\sqrt{6}}$,

d). $\dfrac{2X^3+3X^2-8X-12}{4-X^2,}$, e). $\dfrac{3X^2-27}{3X^2-18X+27}$.

R. a) Avem : $\dfrac{X(X^2-1)}{5X(X+1)}=\dfrac{X(X-1)(X+1)}{5X(X+1)}=\dfrac{X-1}{5}$,

$$\text{b)}\ \frac{Y\sqrt{2}(X+\sqrt{3}Y)}{XY(\sqrt{2}+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}(X+\sqrt{3}Y)}{X(\sqrt{2}+\sqrt{3})},\quad \text{c)}\ \frac{(\sqrt{2}X-\sqrt{3})(\sqrt{2}X+\sqrt{3})}{\sqrt{2}(\sqrt{2}X+\sqrt{3})}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}X-\sqrt{3}}{\sqrt{2}},\quad \text{d)}\ \frac{2X(X^2-4)+3(X^2-4)}{(2-X)(2+X)}=\frac{(X^2-4)(2X+3)}{(X+2)(2-X)}=-2X-3,$$

$$\text{e)}\ \frac{3(X^2-9)}{3(X^2-6X+9)}=\frac{3(X-3)(X+3)}{3(X-3)^2}=\frac{X+3}{X-3}.$$

III.25. Fie a, b numere reale. Demonstrați identitățile:

1). $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$;

2). $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$;

3). $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$;

4). $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$.

Scrieţi, în mod analog,o identitate pentru $a^n - b^n$ cu n număr natural oarecare.

R. După efectuarea produsului $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ şi reducerea termenilor asemenea, obţinem $a^3 - b^3$. În mod analog, obţinem celelalte identităţi. În caz general, pentru n număr natural oarecare, avem identitatea:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

III.26. Fie a, b numere reale. Demonstraţi identităţile:

1). $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

2). $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$

Scrieţi, în mod analog, o identitate pentru $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ cu n număr natural oarecare.

R. După efectuarea produsului $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ şi reducerea termenilor asemenea, obţinem $a^3 + b^3$. În mod analog se obţine identitatea de la 2). Într-un caz general, pentru n natural, avem:

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \dots - ab^{2n-1} + b^{2n}).$$

III.27^{PO}. a_1, a_2, a_3 şi b_1, b_2, b_3 fiind numere reale oarecare, demonstraţi identităţile (Lagrange):

1). $(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2$.

2). $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 =$

$= (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2$.

Scrieţi identitatea pentru $2n$ numere reale oarecare $a_1, a_2, \dots, a_n$ şi $b_1, b_2, \dots, b_n$.

R. 1) Efectuînd calculele în membrul stîng, obţinem succesiv:

$$a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 - (a_1^2b_1^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_2^2) = a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 -$$

$$- 2a_1a_2b_1b_2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2.$$

Identitatea 2) se obţine analog.
Pentru n numere reale oarecare, identitatea se scrie:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 =$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_ib_j - a_jb_i)^2, \text{ în această sumă fiind } \frac{n(n-1)}{2} \text{ termeni.}$$

III.28^{PO}. Demonstraţi că:

1). dacă $a + b = ab + 1$, atunci $a = 1$ sau $b = 1$.

2). dacă $(a^2 + 1)(b^2 + 1) + 4ab = 2(a + b)(ab + 1)$, atunci $a = 1$ sau $b = 1$, unde a, b sînt numere reale oarecare.

R. 1) $a+b=ab+1$ este echivalentă succesiv cu $a+b-ab-1=0$, $a(1-b)+$ $+b-1=0$, $(b-1)(1-a)=0$, de unde rezultă $b-1=0$ sau $1-a=0$, adică $a=1$ sau $b=1$.

2) Efectuînd calcule analoage, obţinem $(a-1)^2\cdot(b-1)^2=0$, de unde rezultă $a=1$ sau $b=1$.

III.29PO. Fie a, b numere reale diferite. Demonstraţi că:

$$b(a^2+1)=a(b^2+1) \text{ implică } ab=1.$$

R. $b(a^2+1)=a(b^2+1)$ devine $ba^2+b-ab^2-a=0$ sau $(ba^2-ab^2)+(b-a)=0$ sau $ab(a-b)+(b-a)=0$ sau $(a-b)(ab-1)=0$. Cum $a\neq b$ rezultă $ab-1=0$, deci $ab=1$.

III.30PO. Determinaţi x, $y\in\mathbb{R}$, pentru care:

$$x^2+y^2+2a(-x-y+a)\leqslant 0,\ a\in\mathbb{R}.$$

R. Efectuînd calculele şi grupînd termenii se obţine inegalitatea echivalentă $(x-a)^2+$ $+(y-a)^2\leqslant 0$, (1). Cum $(x-a)^2+(y-a)^2\geqslant 0$, (2), ca sumă de pătrate, rezultă din (1) şi (2) că $(x-a)^2+(y-a)^2=0$ ceea ce implică $x-a=0$ şi $y-a=0$. Aşadar $x=y=a$ sînt numerele căutate.

III.31. Arătaţi că oricare ar fi a, b numere reale strict pozitive:

$$1).\ \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2,\qquad 2).\ a+\frac{1}{a}\geqslant 2.$$

R. 1) Aducînd la acelaşi numitor se obţine:
$\dfrac{a^2+b^2-2ab}{ab}\geqslant 0$ sau $\dfrac{(a-b)^2}{ab}\geqslant 0$ ceea ce este evident, ţinînd cont de ipoteză.
2) Rezultă din 1) luînd $b=1$ sau efectuînd calculele ca la punctul 1).

III.32PO. Arătaţi că oricare ar fi a, b, c numere reale strict pozitive:

$$1).\ a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 6.$$

$$2).\ \frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\geqslant 6.$$

R. 1) $a+b+c+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)+\left(b+\dfrac{1}{b}\right)+\left(c+\dfrac{1}{c}\right)\geqslant$ $\geqslant 2+2+2=6$, unde am folosit rezultatul de la exerciţiul III.31; 2) $\dfrac{a+b}{c}+$ $+\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{b}=\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)+\left(\dfrac{b}{c}+\right.$ $\left.+\dfrac{c}{b}\right)+\left(\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}\right)\geqslant 2+2+2=6.$

III.33PO. Arătaţi că oricare ar fi a, b, c, d numere reale:

1). $a^2 + b^2 \geqslant ab$.

2). $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc$.

3) $\frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geqslant ab + ac + ad + bc + bd + cd$.

R. 1) Înmulţim cu 2 inegalitatea şi obţinem

$$2a^2 + 2b^2 - 2ab = a^2 + b^2 + (a^2 - 2ab + b^2) = a^2 + b^2 + (a - b)^2 \geqslant 0.$$

Semnul egal are loc cînd $a = b = 0$.

2) Analog, înmulţind cu 2 şi efectuînd calculele obţinem $(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 \geqslant 0$ cu egalitate cînd $a = b = c$.

3) Inegalitatea este echivalentă cu inegalitatea evidentă $(a - b)^2 + (a - c)^2 + (a - d)^2 + (b - c)^2 + (b - d)^2 + (c - d)^2 \geqslant 0$.

III.34PO. Arătaţi că pentru numere reale oarecare a, b, c:

1). $a^2 + b^2 \geqslant \frac{(a + b)^2}{2}$.

2). $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \frac{(a + b + c)^2}{2}$.

R. 1) Efectuînd calculele, obţinem inegalitatea evidentă $(a - b)^2 \geqslant 0$.

2) Obţinem $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 \geqslant 0$, cu egalitate cînd $a = b = c$.

III.35PO. Oricare ar fi numerele reale strict pozitive x, y considerăm numerele:

$\frac{x + y}{2} = m_a$ numit media aritmetică a numerelor x, y;

$\sqrt{xy} = m_g$ numit media geometrică sau proporţională a numerelor x şi y;

$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = m_h$ numit media armonică a numerelor x şi y;

$\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} = m_p$ numit media pătratică a numerelor x şi y.

Demonstraţi că există inegalităţile:

$$\min(x, y) \leqslant m_h \leqslant m_g \leqslant m_a \leqslant m_p \leqslant \max(x, y).$$

R. Fie $x = \min(x, y)$; $x \leqslant \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$ echivalent cu $x(x + y) \leqslant 2xy$ echivalent cu $x + y \leqslant 2y$, adică $x \leqslant y$; $\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leqslant \sqrt{xy}$ echivalent cu $2xy \leqslant (x + y)\sqrt{xy}$ echivalent cu

$2\sqrt{xy} \leqslant x + y$ sau $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geqslant 0$; $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$ este echivalent cu $2\sqrt{xy} \leqslant x+y$, adică $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geqslant 0$; $\frac{x+y}{2} \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$ este echivalent (după ridicare la pătrat) cu $(x+y)^2 \leqslant 2(x^2+y^2)$ echivalent cu $(x-y)^2 \geqslant 0$; $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \leqslant y$ echivalent cu $x^2+y^2 \leqslant 2y^2$ sau $x^2 \leqslant y^2$, adică $x \leqslant y$. Observație: În toate calculele am ținut cont că x și y sînt pozitive.

III.36[PO]**.** Demonstrați că oricare ar fi numerele reale strict pozitive x, y:

1). $x + y = 2$ implică $xy \leqslant 1$;

2). $xy = 1$ implică $x + y \geqslant 2$;

3). $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$ implică $xy \geqslant 1$.

R. 1) Aplicăm inegalitatea $m_g \leqslant m_a$ și obținem $\sqrt{xy} \leqslant \frac{2}{2}$, adică $xy \leqslant 1$. Altfel: $y = 2 - x$ conduce la $x(2-x) \leqslant 1$ și mai departe $(x-1)^2 \geqslant 0$; 2) Inegalitatea $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$ conduce la $\frac{x+y}{2} \geqslant 1$, adică $x + y \geqslant 2$. Altfel: din ipoteză $y = \frac{1}{x}$ și inegalitatea devine $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$; 3) Aplicăm inegalitatea $m_h \leqslant m_g$ și obținem $\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leqslant \sqrt{xy}$, adică $\frac{2}{2} \leqslant \sqrt{xy}$ și deci $xy \geqslant 1$.

CAPITOLUL IV

ECUAŢII ŞI SISTEME DE ECUAŢII

IV.1. Care dintre numerele : $-\sqrt{2}$; 0 ; $\frac{1}{3}$; 1 ; $\sqrt{2}$ este soluţie a ecuaţiei :

$$3(x-1)+3=2x+\sqrt{2}?$$

R. Înlocuind în membrul stîng al ecuaţiei x cu $-\sqrt{2}$, obţinem : $3(-\sqrt{2}-1)+3= -3\sqrt{2}-3+3=-3\sqrt{2}$. Procedînd la fel în celălalt membru, obţinem : $-2\sqrt{2}+\sqrt{2}=-\sqrt{2}$. Rezultă că $-\sqrt{2}$ nu este soluţie a ecuaţiei. În mod analog deducem că 0, $\frac{1}{3}$, 1 nu sînt soluţii ale ecuaţiei. Pentru $x=\sqrt{2}$, obţinem $3(\sqrt{2}-1)+3=2\sqrt{2}+\sqrt{2}$ sau $3\sqrt{2}=3\sqrt{2}$, deci $\sqrt{2}$ este soluţie a ecuaţiei.

IV.2. Care dintre numerele : $-0,3$; $2,(4)$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{20}-1$; $\sqrt{0,00(1)}$ este soluţie a ecuaţiei :

$$\frac{x+1}{2}-3=\frac{x-3}{2}-1?$$

R. Aplicînd proprietăţile relaţiei de egalitate dintre numere reale, obţinem succesiv ecuaţiile echivalente : $x+1-6=x-3-2$ sau $-5=-5$, de unde rezultă că orice x este soluţie a ecuaţiei. Rezultă în particular, că numerele propuse în exerciţiu, sînt soluţii.

IV.3. Rezolvaţi ecuaţiile :

a). $3x-7=5x-3$,

b). $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=x-\frac{1}{2}$,

în mulţimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

R. a) Ecuaţia este echivalentă cu ecuaţiile : $3x-5x=-3+7$ sau $-2x=4$ sau $x=-2$. Deci ecuaţia nu are soluţii în $\mathbb{N}$ şi are soluţii în $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ pe $x=-2$.

IV.4. a). Determinați a real astfel încît ecuația în x:

$$\frac{2x+a}{3}+\frac{5a-x}{4}=2a+x \qquad (1)$$

să aibă soluția $-3{,}5$.

b). Determinați x real astfel încît ecuația (1) în a să aibă soluția 2.

R. a) Pentru $x=-3{,}5$, ecuația în a este: $\dfrac{-7+a}{3}-\dfrac{5a+3{,}5}{4}=2a-3{,}5$, care este echivalentă succesiv cu ecuațiile: $-28+4a-15a-10{,}5=24a-42 \Leftrightarrow 35a=3{,}5$ și rezultă $a=0{,}1$. b) Pentru $a=2$ ecuația în x este: $\dfrac{2x+2}{3}-\dfrac{10-x}{4}=4+x$ care este echivalentă succesiv cu ecuațiile: $8x+8-30+3x=48+12x \Leftrightarrow -x=70$. Deci $x=-70$.

IV.5PO. Rezolvați în mulțimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ecuația:

$$ax+b=0,\ a,b\in\mathbb{Z}.$$

R. I. Dacă $a=b=0$ egalitatea există pentru orice x real. Dacă $a=0$ și $b\neq 0$ nu există x astfel încît să avem egalitate.

II. $a\neq 0$ implică $x=-\dfrac{b}{a}$. Rezultă:

1) pentru $a=1$ și b întreg negativ, soluția $x=-b$ este din mulțimea $\mathbb{N}$;
pentru $a=-1$ și b natural, soluția $x=+b$, din mulțimea $\mathbb{N}$.
2) pentru $a=1$ sau $a=-1$, soluția $x=-b$, respectiv $x=b$ din mulțimea $\mathbb{Z}$.
3) Pentru b multiplu de a soluția este din $\mathbb{Z}$.
4) $x=-\dfrac{b}{a}$ este în mulțimea $\mathbb{Q}$ dacă b nu este multiplu de a.

IV.6. Rezolvați ecuațiile:

a). $4(2x-3)+5=7x-12$;
b). $(x-1)(x+1)=(x-1)^2$;
c). $0{,}25x^2-0{,}01=\left(\dfrac{x}{2}-1\right)^2$;
d). $\sqrt{3}x(\sqrt{6}x-1)=3\sqrt{2}\,x(x+2)$;
e). $(-5x+1)(25x^2+5x+1)=5x(1-25x^2)$;
f). $(3-5x)^2=25x^2-30x+10$;
g). $x^3=x(x+3)^2-3x(2x+3)$;
h). $\dfrac{3+2x}{3-2x}-\dfrac{5-3x}{2x-3}=0$.

R. a) Avem: $8x-12+5=7x-12$, de unde rezultă $x=-5$; b) $x^2-1=x^2-2x+1$ implică $2x=2$, adică $x=1$; c) $0{,}25x^2-0{,}01=\dfrac{x^2}{4}-x+1$ echivalent cu $\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{100}=\dfrac{1}{4}x^2-x+1$, de unde $x=1+\dfrac{1}{100}$. Deci $x=\dfrac{101}{100}$, $x=1{,}01$;
d) $\sqrt{18}x^2-\sqrt{3}x=3\sqrt{2}x^2+6\sqrt{2}x$ sau $3\sqrt{2}x^2-\sqrt{3}x=3\sqrt{2}x^2+6\sqrt{2}x$ echivalent cu $(6\sqrt{2}+\sqrt{3})x=0$, de unde $x=0$; e) În membrul stîng se aplică $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

pentru $a = -5x$ şi $b = 1$, sau se calculează direct produsul. Obţinem: $-125x^3+1=5x-$ $-125x^3$, de unde $5x = 1$, adică $x = \frac{1}{5}$; f) Avem $9 - 30x + 25x^2 = 25x^2 - 30x + 10$, echivalent cu: $9 = 10$ Deci ecuaţia nu are nici o soluţie reală; g) $x^3 = x(x^2 + 6x + 9) -$ $- 6x^2 - 9x$ sau $x^3 = x^3 + 6x^2 + 9x - 6x^2 - 9x$, de unde: $0 = 0$, deci orice x real este soluţie; h) Avem: $\frac{3+2x}{3-2x} - \frac{5-3x}{2x-3} = \frac{3+2x}{3-2x} + \frac{5-3x}{3-2x} = \frac{8-x}{3-2x}$. Deci ecuaţia este echivalentă cu $\frac{8-x}{3-2x} = 0$, de unde rezultă $8 - x = 0$, deci $x = 8$, observînd că pentru această valoare a lui x, numitorul $3 - 2x$ nu se anulează.

IV.7. Rezolvaţi ecuaţiile următoare, discutînd după valorile lui a şi m numere reale:

a). $mx = 3 - 2x$; b). $2mx = x + 4m - 2$;

c). $m(x - 2) - 4x = mx - 2(m - 2)$; d). $mx + x = m^2 - 1$;

R. a) Ecuaţia este echivalentă cu ecuaţia: $(m + 2)x = 3$. Apar două situaţii: I. Pentru $m + 2 \neq 0$ adică $m \neq -2$. ecuaţia are soluţia unică $x = \frac{3}{m+2}$. II. Pentru $m = -2$ ecuaţia nu are soluţii; b) Ecuaţia se scrie echivalent $(2m - 1)x = 4m - 2$. Sînt două cazuri: I. Pentru $2m - 1 \neq 0$, $m \neq \frac{1}{2}$ ecuaţia are soluţia unică $x = \frac{4m-2}{2m-1} = \frac{2(2m-1)}{2m-1} = 2$. II. Pentru $2m - 1 = 0$, obţinem $0 \cdot x = 0$, propoziţie adevărată pentru orice x real. Deci, în acest caz ecuaţia are o infinitate de soluţii. c) Ecuaţia devine: $mx - 2m - 4x = mx - 2m +$ $+ 4$, de unde rezultă $x = -1$, soluţie unică oricare ar fi m real; d) Ecuaţia se mai scrie $x(m + 1) = m^2 - 1$. I. Pentru $m \neq -1$, ecuaţia are soluţia unică $x = \frac{m^2-1}{m+1} =$ $= \frac{(m-1)(m+1)}{m+1} = m - 1$; II. Pentru $m = -1$, obţinem $x \cdot 0 = 0$ de unde rezultă că orice număr real x este soluţie a ecuaţiei.

IV.8. Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} \sqrt{2}x + 3y = 1 \\ 3\sqrt{2}x + 7y = 1. \end{cases}$$

Verificaţi dacă perechile de numere (x, y): $(-\sqrt{2}, 1)$, $(0, a)$, $a \in \mathbb{R}$, $(1, \sqrt{2})$ sînt soluţii ale sistemului.

R. Înlocuind $x = -\sqrt{2}$ şi $y = 1$ ecuaţiile sistemului sînt verificate: $-2 + 3 = 1$, respectiv $-6 + 7 = 1$. Pentru $x = 0$ şi $y = a$, obţinem $3a = 1$ şi $7a = 1$, de unde rezultă că perechile $(0, a)$, $a \in \mathbb{R}$ nu pot fi soluţii ale sistemului.

Pentru $x = 1$ şi $y = \sqrt{2}$ prima ecuaţie nu este verificată: $\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \neq 1$. Deci $(1, \sqrt{2})$ nu este soluţie.

IV.9. Determinaţi soluţiile sistemelor:

a). $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - 0,25y = 1 \\ 0,5x + \frac{1}{4}y = 1 \end{cases}$

c). $\begin{cases} 1,5x + 0,(3)y = 1,8 \\ 3x + 0,(6)y = 1,6. \end{cases}$

R. a) Folosind, de exemplu, metoda „reducerii" înmulţim a doua ecuaţie a sistemului cu 3 şi adunăm ecuaţiile. Obţinem: $11x = 11$, de unde $x = 1$. Din prima ecuaţie, pentru $x = 1$, obţinem: $2 - 3y = 5$, de unde $y = -1$. Deci $(1, -1)$ este soluţia sistemului.

b) Sistemul este echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y = 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 1. \end{cases}$$

Adunînd ecuaţiile, obţinem: $x = 2$. Rezultă apoi $y = 0$.

c) Sistemul este echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} \frac{15}{10}x + \frac{3}{9}y = \frac{18}{10} \\ 3x + \frac{6}{9}y = \frac{16}{10} \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} \frac{3}{2}x + \frac{1}{3}y = \frac{9}{5} \\ 3x + \frac{2}{3}y = \frac{8}{5} \end{cases} \text{ sau}$$

$\begin{cases} 45x + 10y = 54. \\ 45x + 10y = 24, \end{cases}$ de unde rezultă că sistemul nu are soluţie.

IV.10. Determinaţi toate numerele de trei cifre cu cifrele numere impare consecutive pentru care suma cifrelor lor se divid la 21.

R. Fie a, $a + 2$, $a + 4$ cifrele unuia din numerele căutate. Aşadar, suma $a + (a + 2) + (a + 4) = 3a + 6$ se divide la 21. Cum $3a + 6 = 3(a + 2)$ şi $21 = 3 \cdot 7$ rezultă $a + 2$ se divide la 7. Cum a este cifră rezultă $a + 2 \leqslant 11$, deci $a + 2 = 7$ şi atunci $a = 5$.

IV.11. Perimetrul unui pătrat este egal cu 16 cm. Aflaţi aria sa.

R. Fie x lungimea laturii pătratului. Perimetrul său este $x + x + x + x = 4x$, deci $4x = 16$ de unde $x = 4$ cm. Aria sa este $x^2 = 16$ cm^2.

IV.12. Aflaţi un număr pe care dacă-l înmulţim cu $\frac{4}{7}$ obţinem acelaşi rezultat cînd scădem 21 din el.

R. Fie x numărul căutat. El satisface ecuaţia $\frac{4}{7}x = x - 21$ adică $4x = 7x - 147$ care rezolvată conduce la $x = \frac{-147}{-3}$, $x = 49$.

IV.13. Aflaţi un număr pe care dacă-l înmulţim cu $\frac{7}{5}$ obţinem acelaşi rezultat dacă îl adunăm cu 14.

R. Fie x numărul căutat. Obţinem ecuaţia $\frac{7}{5}\,x = x + 14$ sau $7x = 5x + 70$, de unde $x = 35$.

IV.14[PO]. Şapte jucători s-au învoit ca cel care va pierde partida să plătească celorlalţi o sumă de bani echivalentă cu cea pe care o posedă persoana respectivă, cu alte cuvinte să dubleze banii fiecărui partener.

S-au jucat şapte partide. Fiecare a pierdut cîte una. După terminarea jocului, au socotit cîţi bani au fiecare. S-a constatat că toţi aveau aceeaşi sumă: 12 lei şi 80 de bani.

Cîţi bani poseda fiecare jucător la începutul jocului?

R. În timpul jocului, suma totală de bani a rămas invariabilă; banii nu au făcut decît să treacă din buzunarul unuia în buzunarul altuia. Deci, la începutul jocului suma totală a fost aceeaşi ca şi la terminarea lui, adică egală cu $7 \cdot 12{,}8$ lei $= 89{,}6$ lei.

Să urmărim cum a variat în procesul jocului suma de bani a jucătorului care a pierdut primul.

La începutul jocului, el poseda x lei. Pierzînd prima partidă, el a plătit celorlalţi 6 parteneri suma pe care o posedau aceştia, deci $89{,}6 - x$. După prima partidă i-a rămas suma:

$$x - (89{,}6 - x) = 2x - 89{,}6.$$

După a doua partidă banii lui s-au dublat, deci a avut suma:

$$2(2x - 89{,}6).$$

După a treia partidă, banii s-au dublat din nou, avînd suma:

$$2^2(2x - 89{,}6)$$

şi aşa mai departe pînă cînd, după a şaptea partidă avea suma $2^6(2x - 89{,}6)$, adică 12,80 lei. Rezultă, deci, ecuaţia:

$$2^6(2\,x - 89{,}6) = 12{,}80$$

de unde $x = 44{,}90$ lei.

Aşadar, primul jucător poseda la începutul jocului 44 de lei şi 90 de bani.

În mod analog procedăm şi pentru a determina cîţi bani au avut la începutul jocului ceilalţi jucători. De exemplu, să ne situăm în cazul celui de-a cincilea jucător. După prima partidă el şi-a dublat banii deci avea $2y$, dacă prin y am notat cîţi bani avea la începutul jocului. După al doilea joc va avea 2^2y, după al treilea, 2^3y, iar după al patrulea, 2^4y. Pe al cincilea pierzîndu-l, plăteşte $89{,}6 - 2^4y$ şi îi rămîn $2^4y - (89{,}6 - 2^4y) = 2^5y - 89{,}6$. După al şaselea joc are $2(2^5y - 89{,}6)$, iar după al şaptelea, $2^2(2^5y - 89{,}6)$. Rezultă ecuaţia:

$$2^2(2^5y - 89{,}6) = 12{,}80$$

adică $y = 2{,}90$ lei.

Cu ceilalţi procedăm analog.

IV.15. Suma a două numere naturale scrise în baza 10 este egală cu 979. Unul din ele se termină în 0. Dacă se taie acest zero se obţine al doilea număr.

Aflaţi numerele.

R. Numărul care se termină în 0 nu poate fi de două cifre căci, în acest caz, maximum sumei celor două numere ar fi $90 + 9 = 99$. De asemenea, acest număr nu poate fi de patru sau mai multe cifre căci suma celor două numere ar fi minimum $1000 + 100 = 1100$. Aşadar, primul număr are trei cifre şi este de 10 ori mai mare decît al doilea, să-l notăm cu x. Rezultă atunci ecuaţia:

$$10x + x = 979$$

de unde $x = 89$. Numerele căutate sînt deci 890 şi 89.

IV.16PO. **Determinaţi baza de numeraţie x în care are loc egalitatea:**

$$3_x \cdot 15_x = 46_x.$$

R. Avem $x > 6$ şi:

$$3(x + 5) = 4x + 6$$

de unde $x = 9$, care verifică.

IV.17. Tatăl are astăzi 28 ani şi fiul 8. Să se răspundă la următoarele întrebări:

a). Peste cîţi ani vîrsta tatălui va fi de trei ori mai mare decît vîrsta fiului?

b). Este posibil ca, pe viitor, vîrsta tatălui să fie de 3,5 ori mai mare decît vîrsta fiului? Dacă este posibil, arătaţi după cîţi ani vîrsta tatălui va fi de 3,5 ori mai mare decît vîrsta fiului.

c). Este posibil ca, în viitor, vîrsta tatălui să fie de patru ori mai mare decît vîrsta fiului? Dacă este posibil, arătaţi după cîţi ani vîrsta tatălui va fi de patru ori mai mare decît vîrsta fiului.

d). A fost posibil ca, în trecut, vîrsta tatălui să fi fost de patru ori mai mare decît vîrsta fiului? Dacă acest lucru a fost posibil, arătaţi cu cîţi ani în urmă s-a realizat acest lucru.

R. a) Fie x numărul de ani după care vîrsta tatălui va fi de trei ori mai mare decît vîrsta fiului. Tatăl va avea atunci $(28 + x)$ ani, iar fiul, $(8 + x)$ ani deci vom avea:

$$28 + x = 3(8 + x)$$

de unde $x = 2$. Deci, peste 2 ani, vîrsta tatălui va fi de două ori mai mare decît vîrsta fiului.

b) Fie x numărul de ani după care vîrsta tatălui va fi de 3,5 ori mai mare decît a fiului. Vom avea ecuaţia:

$$28 + x = 3{,}5(8 + x)$$

de unde $x = 0$. Rezultă că exact în momentul de faţă vîrsta tatălui este de 3,5 ori mai mare decît vîrsta fiului.

c) Raţionînd în mod analog ca la punctele precedente găsim ecuaţia:

$$28 + x = 4(8 + x)$$

de unde $x = -4/3$. Rezultă că răspunsul la întrebare este negativ deoarece trebuie ca $x > 0$.

IV.18. La o serată au fost invitate fete şi băieţi: 20 de persoane. Ana a dansat cu 7 tineri, Irina cu 8, Veronica cu 9 şi aşa mai departe pînă cînd ultima fată, Ioana, a dansat cu toţi tinerii.

Cîţi tineri (băieţi) au participat la serată?

R. Să notăm cu x numărul fetelor. Atunci prima, Ana, a dansat cu $(6 + 1)$ tineri, Irina cu $(6 + 2)$ tineri, Veronica, a treia, cu $(6 + 3)$ tineri, ..., a x — a, Ioana, cu $(6 + x)$ tineri. Deci

$$x + (6 + x) = 20$$

de unde $x = 7$. Rezultă că numărul băieţilor a fost $20 - 7 = 13$.

IV.19. Într-un depozit erau 185 t de cărbuni, iar într-altul, 237 t. Din primul depozit s-au luat cîte 15 t de cărbuni pe zi, din al doilea cîte 18 t pe zi. După cîte zile a rămas în depozitul al doilea de $1\frac{1}{2}$ ori mai mult cărbune decît în primul depozit?

R. Fie x numărul de zile după care în depozitul al doilea va rămîne de $1\frac{1}{2}$ ori mai mult cărbune decît în primul. Cantitatea de cărbune rămasă după x zile în primul depozit este $(185 - 15x)$, iar în al doilea $(237 - 18x)$. Aşadar, ecuaţia problemei este:

$$237 - 18x = 1\frac{1}{2}(185 - 15x)$$

cu soluţia $x = 9$.

IV.20. Diferenţa a două numere este 35. Împărţind numărul cel mare la numărul cel mic, obţinem cîtul 4 şi restul 2. Găsiţi cele două numere.

R. Fie x al doilea număr. Potrivit teoremei împărţirii numerelor întregi, primul număr este egal cu $4x + 2$ şi diferenţa lor va fi $(4x + 2) - x = 3x + 2$. Aşadar, $3x + 2 = 35$, de unde $x = 11$. Primul număr va fi egal cu $4 \cdot 11 + 2 = 46$.

IV.21. Aflaţi două numere cunoscînd suma lor 70 şi diferenţa lor 40.

R. Fie x al doilea număr. Atunci primul este cu 40 mai mare ca x, deci este egal cu $40 + x$. Suma lor este $(40 + x) + x = 40 + 2x$, deci $40 + 2x = 70$ de unde $x = 15$. Primul este, aşadar, egal cu $40 + 15 = 55$.

IV.22. Avem două rezervoare, dintre care unul conţine de două ori mai multă apă decît celălalt. Dacă turnăm din primul rezervor în al doilea 16 hl, ambele rezervoare conţin aceeaşi cantitate de apă. Cîtă apă a fost în fiecare rezervor?

R. Fie x cantitatea de apă din al doilea rezervor. În primul se va afla o cantitate egală cu $2x$. Aşadar:

$$2x - 16 = x + 16$$

de unde $x = 32$(hl). În primul rezervor vor fi $2 \cdot 32$ hl $= 64$ hl.

IV.23. Diferenţa dintre mărimea lungimii şi mărimea lăţimii unui dreptunghi este 9 cm, iar perimetrul său este 46 cm.
Aflaţi aria dreptunghiului.

R. Deoarece diferenţa dintre mărimea lungimii şi mărimea lăţimii este 9, rezultă că mărimea lungimii este cu 9 mai mare decît mărimea lăţimii, fie aceasta x. Perimetrul dreptunghiului va fi, atunci $2[x + (x + 9)] = 2(2x + 9) = 4x + 18$. Deci $4x + 18 = 46$ de unde $4x = 46 - 18 = 28$, deci $x = 7$ cm. Atunci mărimea lungimii va fi 7 cm + 9 cm = 16 cm, deci aria dreptunghiului va fi 7 cm × 16 cm = 112 cm².

CAPITOLUL V

EXERCIŢII ŞI PROBLEME RECAPITULATIVE

V.1. Arătaţi că pătratul unui număr natural n are una din formele $4k$ sau $8k+1$, $k \in \mathbb{N}$.

R. Un număr natural n are una din formele $2t$ sau $2t+1$, $t \in \mathbb{N}$. Dacă $n=2t$ rezultă $n^2=4t^2$, deci notînd $t^2=k$ avem $n^2=4k$. Dacă $n=2t+1$ atunci $n^2=(2t+1)^2=4t^2+$ $+4t+1=4t(t+1)+1$. În acest din urmă caz, deoarece t şi $t+1$ sînt numere naturale consecutive, unul dintre ele este par, deci produsul $t(t+1)$ este par, deci există q aşa că $t(t+1)=2k$, adică $n^2=8k+1$.

Deci, pătratul unui număr natural are una din formele $4k$, $8k+1$, $k \in \mathbb{N}$.

V.2. Arătaţi că, fiind date trei numere naturale consecutive, unul şi numai unul este divizibil cu 3.

R. Fie a, $a+1$, $a+2$ cele trei numere. Orice număr natural are una din formele $3k$, $3k+1$, $3k+2$, $k \in \mathbb{N}$. Dacă $a=3k$, problema este rezolvată. Dacă $a=3k+1$ atunci $a+2=3k+3=3(k+1)$ este evident, divizibil cu 3. Dacă $a=3k+2$ atunci $a+1=$ $=3k+3=3(k+1)$ este divizibil cu 3.

În fiecare caz, se constată imediat, numai unul din cele trei numere este divizibil cu 3.

V.3. Arătaţi că pătratul unui număr întreg n este de una din formele $3k$, $3k+1$.

R. Un număr întreg n are una din formele $3m$, $3m+1$, $3m+2$, $m \in \mathbb{N}$. Dacă $n=3m$ atunci $n^2=9m^2=3\cdot 3m^2$ şi putem considera $k=3m^2$. Dacă $n=3m+1$ atunci $n^2=(3m+1)^2$ $=9m^2+6m+1=3(3m^2+2m)+1$ şi luînd $k=3m^2+2m$ obţinem $n^2=3k+1$.

Dacă $n=3m+2$ atunci $n^2=9m^2+12m+4=3(3m^2+4m+1)+1$ şi luînd $k=3m^2+4m+1$ obţinem $n=3k+1$.

Aşadar, pătratul unui număr natural are una din formele $3k$ sau $3k+1$, $k \in \mathbb{N}$.

V.4. Arătaţi că dacă un număr par este suma a două pătrate perfecte atunci şi jumătatea numărului este suma a două pătrate perfecte.

R. Fie $n=a^2+b^2$, $a, b \in \mathbb{N}$. Dacă a este par şi b impar atunci a^2 este par şi b^2 este impar, deci suma a^2+b^2 este un număr impar, contrar ipotezei că n este par. Deci sau a şi b sînt simultan pare sau sînt simultan impare.

Rezultă atunci că $a+b$ şi $a-b$ sînt, în ambele cazuri, pare, deci $\frac{a+b}{2}$ şi $\frac{a-b}{2}$ sînt numere întregi. Din $n = a^2 + b^2$ rezultă imediat:

$$\frac{n}{2} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

cum se poate constata făcînd calculele.

V.5. **Arătaţi că puterea a treia a oricărui număr întreg este diferenţa a două pătrate de numere întregi dintre care unul este multiplu de 9.**

R. Folosim identitatea:

$$a^3 = \left[\frac{a(a+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{a(a-1)}{2}\right]^2$$

şi faptul că unul din numerele $a-1$, a, $a+1$ este divizibil cu 3 (problema V. 2) şi rezultă enunţul.

V.6^PO. **Demonstraţi că suma pătratelor a trei sau a patru numere naturale consecutive nu poate fi pătrat perfect.**

R. Fie $a-1$, a, $a+1$ ($a \geq 1$) trei numere consecutive. Suma pătratelor lor este

$$(a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 = 3a^2 + 2 = \mathcal{M}3 + 2.$$

Dar, potrivit rezultatelor problemei II.4.3, nici un pătrat perfect nu poate fi de forma $\mathcal{M}3 + 2$, deci suma $(a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2$ nu poate fi pătrat perfect pentru nici un $a \in \mathbb{N}^*$.
În continuare, pentru patru numere naturale consecutive $a-1$, a, $a+1$, $a+2$ avem:

$$(a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 = (2a+1)^2 + 5.$$

Dacă există $b \in \mathbb{N}$ astfel ca $(2a+1)^2 + 5 = b^2$ rezultă $b^2 - (2a+1)^2 = 5$ sau $(b-2a-1)(b+2a+1) = 5$.

Cum $5 = 1 \cdot 5$ rezultă $b - 2a - 1 = 1$, $b + 2a + 1 = 5$, de unde, adunînd cele două relaţii, rezultă $b = 3$ dar a nu rezultă natural.

Deci nici suma pătratelor a patru numere naturale consecutive nu poate fi pătrat perfect.

V.7^PO. **Demonstraţi că:**

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n = 2^{n+1} - 1, \ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*.$$

R. Evident, $1 = 1_2$, $2 = 10_2$, $2^2 = 100_2, \ldots, 2^n = 1\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ ori}}{}_2$, deci:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n = 1_2 + 10_2 + 100_2 + \ldots + 1\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ ori}}{}_2 =$$

$$= \underbrace{11\ldots11}_{n+1 \text{ ori}}{}_2 = \underbrace{10\ldots0}_{n+1 \text{ ori}}{}_2 - 1 = 2^{n+1} - 1.$$

V.8^M. **Arătaţi că din 3 numere naturale oarecare se pot găsi două a căror sumă să se dividă cu 2.**

R. Fie a, b, c cele trei numere. Dacă toate sînt impare sau numai două sînt impare, evident că putem alege două dintre acestea aşa ca suma lor să fie un număr par.

Dacă numai unul este impar, celelalte două fiind pare suma acestora este un număr par. Cu aceasta, enunţul este dovedit.

V.9. Dacă n este număr natural diferit de 1, atunci $n^2 - 1$ nu poate fi pătrat perfect.

R. Demonstraţia este asemănătoare celei din problema v. 6. Presupunem că $n^2 - 1$ este pătrat perfect, adică există $m \in \mathbb{N}$ aşa că $n^2 - 1 = m^2$ sau $n^2 - m^2 = 1$ sau încă $(n - m)(n + m) = 1$. Dar $1 = 1 \cdot 1 = (-1)(-1)$ şi cum $n + m$ este natural rezultă $n + m = 1$, $n - m = 1$ de unde $n = 1$, $m = 0$, contrar ipotezei.

V.10[PO]. Fie p şi q două numere prime consecutive, diferite de 2. Dacă $2a = p + q$, arătaţi că a este număr compus.

R. Din relaţia din enunţ deducem $a = \frac{p+q}{2}$. Cum $p < \frac{p+q}{2} < q$ rezultă că a este cuprins între două numere prime consecutive, deci este un număr compus.

V.11. Rezolvaţi în $\mathbb{N}$ ecuaţia:

$$3xy + 7z = 21.$$

(*Artur Bălăucă, G.M., E: 7923*)

R. Observăm că $z \leqslant 3$ căci altfel primul membru al ecuaţiei ar fi strict mai mare decît al doilea. Dacă $z = 3$ atunci ecuaţia devine $3xy + 21 = 21$ de unde $xy = 0$, deci $x = y = 0$.

Dacă $z = 2$ ecuaţia conduce la $3xy = 7$, absurd, căci primul membru se divide cu 3 iar al doilea, nu.

Dacă $z = 1$ ecuaţia devine $3xy = 14$, imposibilă în numere naturale din motive asemănătoare celor expuse mai sus. În sfîrşit, dacă $z = 0$ atunci $3xy = 21$ sau $xy = 7$ care conduce la $x = 1$, $y = 7$ sau $x = 7$, $y = 1$.

V.12[PO]. Demonstraţi că dacă numerele întregi x, y, z verifică relaţia

$$xy = z^2 + 2 + z(x - y)$$

atunci $|x + y| = 3$.

(*Liliana Niculescu, G.M., E: 7930*)

R. Relaţia se mai poate scrie:

$$xy = z^2 + 2 + zx - zy.$$

sau:

$$xy + zy - (z^2 + zx) = 2$$

sau încă:

$$y(x + z) - z(x + z) = 2$$

de unde:

$$(y - z)(x + z) = 2.$$

Cum $2 = 1 \cdot 2 = (-1) \cdot (-2)$, avem posibilităţile:

$$(1)\begin{cases} y - z = 1 \\ x + z = 2 \end{cases} \quad (2)\begin{cases} y - z = -1 \\ x + z = -2 \end{cases} \quad (3)\begin{cases} y - z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases} \quad (4)\begin{cases} y - z = -2 \\ x + z = -1 \end{cases}$$

Adunînd cele două relaţii în fiecare grupă obţinem sau $x + y = 3$ (pentru (1) şi (3)) sau $x + y = -3$ (pentru (2) şi (4)) deci, în toate cazurile $|x + y| = 3$.

V.13^PO^. Arătaţi că numerele de forma $5^{n+3}\cdot 2^n - 125$, unde $n \in \mathbb{N}$, sînt divizibile cu 45.

(*Constantin Coandă, G.M., E: 8055*)

R. Numărul din enunţ se scrie, succesiv:

$$5^{n+3}\cdot 2^n - 125 = 5^n\cdot 2^n\cdot 5^3 - 5^3 = 5^3(10^n - 1).$$

Cum:

$$10^n - 1 = \underbrace{10\ldots0}_{n+1 \text{ cifre}} - 1 = \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ cifre}} = 9\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ cifre}}$$

rezultă că numărul dat este divizibil cu $5^3\cdot 9$ şi, cu atît mai mult, cu 45.

V.14. Fie numărul: $N = 5^{n+4}\cdot 3^n\cdot 2^n + 5^n\cdot 3^{n+2}\cdot 2^{n+2}$ unde $n \in \mathbb{N}$. Determinaţi valorile lui n pentru care 1983 divide pe N

(*Artur Bălăucă, G.M., E: 8362*)

R. Numărul N mai poate fi scris:

$$N = 5^n\cdot 5^4\cdot 3^n\cdot 2^n + 5^n\cdot 3^n\cdot 3^2\cdot 2^n\cdot 2^2 = (5\cdot 3\cdot 2)^n\cdot 625 + (5\cdot 3\cdot 2)^n\cdot 36 =$$

$$= 30^n(625 + 36) = 30^n\cdot 661.$$

Deoarece $1983 = 3\cdot 661$ rezultă că 30 trebuie să se dividă cu 3, lucru posibil pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

V.15^PO^. Arătaţi că $43^{43} - 17^{17}$ se divide cu 10.

Olimpiadă, U.R.S.S.

R. Pentru a dovedi afirmaţia din enunţ este suficient să arătăm că ultima cifră a numerelor 43^{43} şi 17^{17} este aceeaşi. Dar ultima cifră a numărului 43^{43} este aceeaşi cu ultima cifră a numărului 3^{43} şi, de asemenea, ultima cifră a numărului 17^{17} este aceeaşi cu ultima cifră a numărului 7^{17}. Dar, potrivit tabelului care dă ultima cifră:

Putere / Număr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
3	3	9	7	1	3	9	7	1	3	9	...
7	7	9	3	1	7	9	3	1	7	9	...

rezultă că ultima cifră a puterilor lui 3^{4k} se repetă din 4 în 4, aume 3^{4k} se termină în 1, 3^{4k+1} se termină în 3, 3^{4k+2}, în 9, 3^{4k+3}, în 7 şi, analog, 7^{4k} se termină în 1, 7^{4k+1}, în 7, 7^{4k+3}, în 9, 7^{4k+3} în 3, unde $k \in \mathbb{N}$. Cum $43 = 4\cdot 10 + 3$ iar $17 = 4\cdot 4 + 1$, rezultă că 43^{43} se termină în 7, iar 17^{17}, tot în 7, deci ultima cifră a numărului $43^{43} - 17^{17}$ este $7 - 7 = 0$, adică el se divide cu 10.

V.16. Găsiţi toate numerele de 4 cifre care adăugate la dreapta numărului 400 dau ca rezultat un pătrat perfect.

Olimpiadă, U.R.S.S.

R. Pătratele căutate au cel mult valoarea 4009 999 şi cel puţin 4 000 000, deci rădăcina pătrată este cel mult $\sqrt{4\,009\,999} \approx 2\,002$ sau cel puţin $\sqrt{4\,000\,000} = 2\,000$.

Rezultă că numerele cerute pot fi doar pătratele numerelor 2000; 2001; 2002, ale căror pătrate sînt respectiv:

$$4\,000\,000;\quad 4\,004\,001;\quad 4\,008\,004.$$

V.17[PO]**.** Arătaţi că restul împărţirii prin 16 a unui pătrat perfect este tot un pătrat perfect.

(Olimpiadă, Suedia)

R. Un număr natural n are una din formele $16k \pm r$, $k \in \mathbb{N}$, unde $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Cum:

$$(16k \pm r)^2 = (16k \pm r)(16k \pm r) = 16k \cdot 16k \pm r \cdot 16k \pm r \cdot 16k + (\pm r)^2 = \mathcal{M}16 + r^2$$

iar:

$$r^2 = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64\} =$$

$$= \{0, 1, 4, 9, 16 + 0, 16 + 9, 2 \cdot 16 + 4, 16 \cdot 3 + 1, 16 \cdot 4 + 0\}$$

rezultă că restul împărţirii lui n^2 la 16 este unul din numerele 0, 1, 4, 9, deci pătrat perfect.

V.18[M]**.** Arătaţi că numerele de forma $1 + (a + 1)(1 - a)$, $a \in \mathbb{N}^*$, sînt pătrate perfecte.

R. Deoarece $(a + 1)(a - 1) = a^2 - 1$ avem $1 + (a + 1)(a - 1) = 1 + (a^2 - 1) = a^2$, ceea ce dovedeşte enunţul.

V.19[M]**.** Găsiţi valorile de adevăr ale următoarelor propoziţii:

a). Oricare ar fi numerele raţionale a, b, c, $a > 0$, $c > 0$, $b \in \mathbb{N}$, dacă $a^b = c^b$ atunci $a = c$.

b). Oricare ar fi numerele raţionale a, b, c, dacă $a \neq b$ şi $b \neq c$, atunci $a \neq c$.

c). Oricare ar fi numerele raţionale a, b, dacă $a^2 = b^2$ atunci $a = b$.

R. Valoarea de adevăr ale tuturor propoziţiilor este 0 (adică sînt false) căci dacă $b = 0$ atunci $3^0 = 4^0 = 1$ şi $3 \neq 4$ (în cazul a), $2 \neq 3$, $3 \neq 2$ şi $2 = 2$ (în cazul b) şi $(-2)^2 = 2^2$ şi $-2 \neq 2$ (în cazul c).

V.20. Dacă dintr-un număr n de trei cifre scădem 7, el se împarte la 7; dacă scădem 8, el se împarte la 8, iar dacă scădem 9, el se împarte cu 9. Care este acel număr?

(Olimpiadă, U.R.S.S.)

R. Avem $n = \mathcal{M}7$, căci $n = \mathcal{M}7 + 7 = \mathcal{M}7$ şi, analog, $n = \mathcal{M}8$, $n = \mathcal{M}9$, deci $n = \mathcal{M}7 \cdot 8 \cdot 9 = \mathcal{M}504$.

Cum singurul număr de trei cifre multiplu de 504 este 504, rezultă $n = 504$.

V.21[PO]**.** Arătaţi că există o infinitate de numere prime.

R. Vom reproduce, aici, demonstraţia lui Euclid. Să presupunem că numărul numerelor prime este finit, fie ele $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Să considerăm numărul $A = p_1 p_2 \ldots p_k + 1$. Evident A este sau prim sau compus. Dacă el este prim, evident, $A > p_k$, contrar ipotezei că p_k este cel mai mare număr prim. Dacă el este compus, atunci el are un divizor prim, fie acesta p_n. Deci $A = \mathcal{M}p_n$ sau:

$$p_1 p_2 \ldots p_k + 1 = tp_n, \; t \in \mathbb{N}^*.$$

Rezultă de aici:

$$tp_n - p_1 p_2 \ldots p_k = 1.$$

Dar p_n se găseşte printre numerele $p_1, p_2, \ldots, p_k$ şi atunci relaţia (1) se scrie, dînd factor comun pe p_n:

$$p_n(t - p_1p_2 \ldots p_{n-1}p_{n+1} \ldots p_k) = 1$$

deci $p_n = 1$, absurd.

Deci numărul numerelor prime este infinit.

V.22. Fie n un număr natural strict mai mare ca 1 astfel încît $n^2 + n + 1$ să fie număr prim. Arătaţi că restul împărţirii lui n^2+n+1 prin 6 este egal cu 1.

R. Orice număr natural are una din formele $6k$, $6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$ $6k + 5$, $k \in \mathbb{N}$. Un număr prim are una din formele $6k+1$ sau $6k + 5$ (căci $6k \vdots 6$, $6k+ 2 \vdots 2$, $6k + 3 \vdots 3$, $6k + 4 \vdots 2$, $(\forall)\ k \in \mathbb{N}^*$). Este clar că $n^2 + n + 1 > 3$.

Dacă $n^2 + n + 1$ are forma $6k + 1$, evident că restul împărţirii lui la 6 este 1. Să cercetăm dacă numărul $n^2 + n + 1$ poate avea forma $6k + 5$, $k \in \mathbb{N}$. Cum $n \geqslant 2$, avem $n^2 + n + 1 \geqslant 7$, deci $n^2 + n + 1$ nu poate fi egal cu 5, deci $k \in \mathbb{N}^*$.

Dacă $n = 6t$, $t \in \mathbb{N}^*$, atunci:

$$n^2 + n + 1 = (6t)^2 + 6t + 1 = 36t^2 + 6t + 1 = 6(6t^2 + t) + 1 = \mathcal{M}6 + 1$$

deci, în acest, caz restul împărţirii lui $n^2 + n + 1$ la 6 este 1.

Dacă $n = 6t + 1$, $t \in \mathbb{N}^*$ atunci:

$$n^2 + n + 1 = (6t + 1)^2 + (6t + 1) + 1 = \mathcal{M}6 + 3$$

care nu este prim, căci se divide la 3.

Dacă $n = 6t + 2$, $t \in \mathbb{N}^*$ atunci:

$$n^2 + n + 1 = (6t + 2)^2 + (6t + 2) + 1 = \mathcal{M}6 + 1$$

şi enunţul se verifică.

Celelalte cazuri se tratează analog.

V.23. Fie trei numere întregi astfel încît fiecare din ele reprezintă media aritmetică a celorlalte două numere. Arătaţi că cele trei numere sînt egale.

(I. Safta, G. M., E: 8122)

R. Fie x, y, z cele trei numere. Potrivit enunţului avem:

$$x = \frac{y + z}{2}\ ;\ y = \frac{x + z}{2}\ ;\ z = \frac{x + y}{2}$$

sau:

$$2x = y + z;\ 2y = x + z;\ 2z = x + y. \qquad (1)$$

Scăzînd primele două relaţii din (1) între ele obţinem $2x - 2y = y - x$ sau $2x - 2y - y + x = 0$ adică $3x - 3y = 0$ deci $3(x - y) = 0$ de unde $x - y = 0$, adică $x = y$.

Din $z = \dfrac{x + y}{2}$ rezultă atunci $z = \dfrac{x + x}{2} = \dfrac{2x}{2} = x$, deci $x = y = z$.

V.24. Găsiţi toate numerele naturale de două cifre din care scăzînd răsturnatele lor să se obţină pătrate perfecte.

(Gh. Ivaşcu, G.M., E: 8669)

R. Fie $\overline{ab}$ un număr de tipul cerut, $a \neq 0$. Aşadar $\overline{ab} - \overline{ba}$ este pătrat perfect. Dar $\overline{ab} = 10a + b$, $\overline{ba} = 10b + a$, deci $\overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - (10b + a) = 9a - 9b = 9(a - b)$.

Pentru ca $9(a-b)$ să fie pătrat perfect trebuie ca $a-b \geq 0$. Dacă $a-b=0$, deci $a=b$, rezultă $\overline{ab}-\overline{ba}=0$ care este pătrat perfect. Aşadar, numerele 11, 22, 33, ..., 88, 99 verifică enunţul. Numărul $a-b$ este cel mult egal cu 9 (căci a şi b sînt cifre) deci $9(a-b)$ trebuie căutat printre pătratele perfecte cel mult egale cu $9 \cdot 9 = 81$ şi divizibile cu 9. Acestea sînt 9, 36, 81. În primul caz rezultă $a-b=1$ deci $\overline{ab} \in \{10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98\}$ în al doilea caz rezultă $a-b=4$, deci $\overline{ab} \in \{40, 51, 62, 73, 84, 95\}$. În al treilea caz rezultă $a-b=9$ deci $\overline{ab} \in \{90\}$. (Am admis şi cazurile în care $b=0$.)

Aşadar, numerele căutate sînt:

11, 22, 33, ..., 88, 99; 10, 21, 32, 43, ..., 87, 98; 40, 51, 67, 73, 84, 95; 90.

V.25. Rezolvaţi în numere naturale ecuaţia:

$$xy - 4x - 3y + 11 = 0.$$

R. Ecuaţia se mai poate scrie:

$$x(y-4) - 3(y-4) - 1 = 0$$

sau:

$$(x-3)(y-4) = 1.$$

Cum $x-3$ şi $y-4$ sînt numere întregi al căror produs este 1 avem situaţiile posibile:

$$\text{a)} \begin{cases} x-3=1 \\ y-4=1 \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} x-3=-1 \\ y-4=-1 \end{cases}$$

Rezultă $x=4$, $y=5$ sau $x=2$, $y=3$.

V.26. Determinaţi numerele prime a, b, c pentru care:

$$2a + 3b + 4c = 30.$$

(*Simion Prodan, G.M., E: 8395*)

R. Deoarece al doilea membru al egalităţii din enunţ este divizibil cu 2 este necesar ca şi primul membru să aibă această proprietate. Cum $2a$ şi $4c$ se divid cu 2, trebuie ca şi $3b$ să se dividă cu 2, deci ca b să fie par. Cum b este prim (şi par), cu necesitate $b=2$. Egalitatea devine:

$$2a + 2 \cdot 3 + 4c = 30$$

sau $2a + 4c = 30 - 6 = 24$ sau $2(a + 2c) = 24$ de unde $a + 2c = 24 : 2 = 12$. De aici rezultă $a = 12 - 2c = 2(6-c)$, deci a este par şi fiind şi prim rezultă $a=2$. Atunci $6-c=1$, deci $c=5$.

În concluzie, $a=b=2$, $c=5$.

V.27. Într-un port erau ancorate patru vapoare. În ziua de 2 ianuarie 1975, la amiază, toate patru au părăsit în acelaşi timp portul.

Se ştie că primul vapor revine în portul respectiv din 4 în 4 săptămîni, al doilea din 8 în 8 săptămîni, al treilea la fiecare 12 săptămîni, iar al patrulea la 16 săpătmîni.

La ce dată s-au întîlnit din nou toate cele patru vapoare?

R. Cel mai mic multiplu comun al numerelor 4, 8, 12 şi 16 este 48. Prin urmare, vapoarele s-au întîlnit din nou peste 48 de săptămîni, adică la 4 decembrie 1975.

V.28PO. Rezolvați ecuația:

$$(x+y)(xy+1)=4xy,$$

unde $x, y \in \mathbb{N}$.

(*Ion A. Popa, G.M., E: 8051*)

R. Ecuația se mai poate scrie:

$$(x+y)xy+(x+y)=4xy.$$

sau:

$$x+y=4xy-(x+y)xy=xy(4-x-y). \qquad (1)$$

Deoarece $x, y \in \mathbb{N}$ rezultă $xy \in \mathbb{N}$ și $x+y \in \mathbb{N}$. Cum primul membru al egalității (1) este număr natural trebuie ca și al doilea să aibă această proprietate, deci $4-x-y \in \mathbb{N}$. Acest lucru este posibil dacă $x+y=0$ sau $x+y=1$ sau $x+y=2$ sau $x+y=3$ sau $x+y=4$.

Dacă $x+y=0$, cum $x, y \in \mathbb{N}$, rezultă $x=y=0$ care verifică ecuația.

Dacă $x+y=1$ atunci sau $x=0$, $y=1$ sau $x=1$, $y=0$ dar, în aceste cazuri, ecuația din enunț nu este verificată.

Dacă $x+y=2$ atunci sau $x=2$, $y=0$ (respectiv $x=0$, $y=2$) sau $x=y=1$. Convine numai $x=y=1$.

Dacă $x+y=3$ ecuația devine $3(xy+1)=4xy$ sau $3xy+3=4xy$ de unde $3=4xy-3xy=xy$. Egalitatea $xy=3$ este verificată pentru $x=3$, $y=1$ sau $x=1$, $y=3$ dar nici una din aceste situații nu verifică relația $x+y=3$.

În fine, dacă $x+y=4$ ecuația din enunț devine $4(xy+1)=4xy$ sau $4xy+4=4xy$, deci $4=4xy-4xy=0$, absurd.

Rămîn, așadar soluțiile $x=y=0$, respectiv $x=y=1$.

V.29. Determinați cu ce cifră se poate termina numărul $7n^4-16$ unde $n \in \mathbb{N}-\{0, 1\}$.

(*Constantin Coandă, G.M., E: 8056*)

R. Întocmim tabelul, avînd în vedere că ultima cifră a numărului n^4 este aceeași cu ultima cifră a puterii a 4-a ultimei cifre a lui n:

ultima cifră a lui n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ultima cifră a lui n^4	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1
ultima cifră a lui $7n^4$	0	7	2	7	2	5	2	7	2	7
ultima cifră a lui $7n^4-16$	4	1	6	1	6	9	6	1	6	1

V.30. Găsiți un număr de cinci cifre $\overline{abcde}$, cub și pătrat perfect, știind că $b=c$.

(*Nicolae Teodorescu, revista „Vlăstarul", 1925*)

R. Întocmim următorul tabel:

ultima cifră a lui n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ultima cifră a lui n^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
ultima cifră a lui n^3	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9

Analizînd tabelul rezultă în mod necesar că e trebuie să fie un element comun liniilor a doua și a treia, adică $e \in \{0, 1, 4, 5, 6\ 9\}$.

Dacă $e = 0$ din $n^3 = \overline{abcde}$ rezultă că n se divide cu 10 deci n^3 se divide cu 1000 deci $c = d = e = 0$ şi cum $b = c$ rezultă că numărul devine $\overline{a0000} = a \cdot 10^4$. Rezultă că 10^4a trebuie să fie cub perfect, deci a trebuie să fie divizibil cu 10^2, absurd.

Deci $e \neq 0$.

Dacă $e = 1$ punînd $n^3 = \overline{abcde}$, respectiv $k^2 = \overline{abcde}$ rezultă că n se termină în 1, iar k se poate termina în 1 sau 9. Rezultă $n \in \{11, 21, 31, 41\}$. Atunci $n^2 \in \{1331, 9261, 29791, 68721\}$. Dar nici unul din aceste numere nu verifică $b = c$ (1331, 9261 sînt de 4 cifre).

Deci $e \neq 1$.

Fie $e = 4$. Din $n^3 = \overline{abcde}$ rezultă că n se termină în 4, iar din $k^2 = \overline{abcde}$ rezultă că ultima cifră a lui k este 2 sau 8. Atunci $n \in \{14, 24, 34, 44\}$ deci $n^3 \in \{2744, 13824, 39304, 85184\}$ dar nici în acest caz nu avem soluție.

Fie $e = 6$. Atunci, cu aceleaşi notații,

$n \in \{16, 26, 36, 46\}$. Verifică numai $n = 36$, caz în care $n^3 = 46656$ şi $k = 216$.

Cazurile $e = 5$, respectiv $e = 9$ nu conduc la soluție.

V.31PO**. Fie polinoamele:**

$$P(X) = X^7 - 7X^6 + 7X^5 - 7X^4 + 7X^3 - 7X^2 + 7X - 7$$

şi

$$Q(X) = X^7 - 7X^6 - 7X^5 - 7X^4 - 7X^3 - 7X^2 - 7X - 7$$

Determinați $P(6) + Q(8)$.

R. Calculul direct necesită timp, de aceea vom face nişte observații:

$$P(X) = X^7 - 7(X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1) = X^7 - 7\,\frac{X^7 + 1}{X + 1},$$

unde am folosit identitatea

$$X^7 + 1 = (X + 1)(X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1).$$

Analog $Q(X) = X^7 - 7\,\dfrac{X^7 - 1}{X - 1}$.

Obţinem din $P(6) + Q(8) = 6^7 - 7\,\dfrac{6^7 + 1}{7} + 8^7 - 7\,\dfrac{8^7 - 1}{7} = -1 + 1 = 0$.

V.32. Fie polinomul: $P(X) = aX^2 + bX + c$

1. Determinați a, b, c reali astfel încît:

$$a\,P(X) + b\,[P(X + 1) - P(X - 1)] = 9X^2 + 30X + 5$$

2. Cu a, b, c determinați, rezolvați ecuația $P(x) = 0$.

R. 1. Ținînd cont că $P(X + 1) = a(X + 1)^2 + b(X + 1) + c$ şi analog $P(X - 1) = a(X - 1)^2 + b(X - 1) + c$, identitatea din enunț devine:

$a^2X^2 + 5abX + 2b^2 + ac = 9X^2 + 30X + 5$, de unde prin identificarea coeficienților, obținem sistemul în a, b, c format din ecuațiile:

$$\begin{cases} a^2 = 9 \\ 5ab = 30 \\ 2b^2 + ac = 5 \end{cases}$$

cu soluțiile $a = 3$, $b = 2$, $c = -1$ sau $a = -3$, $b = -2$, $c = 1$.

2) Obținem ecuațiile echivalente

$$3X^2 + 2X - 1 = 0 \text{ şi } -3X^2 - 2X + 1 = 0$$

cu soluțiile -1 şi $\frac{1}{3}$.

V.33. Fie polinomul:

$P(X) = aX^2 + bX + c$, a, b, c numere reale oarecare.

1. Demonstrați că numerele $P(x+1) + P(x-1)$ sînt divizibile cu 2, oricare ar fi x număr real.

2. Determinați a, b, c astfel încît:

$$P(x+1) + P(x-1) = (x-1)^2.$$

R. 1. Obținem $P(x+1) + P(x-1) = 2(ax^2 + bx + a + c)$ şi $P(x+1) - P(x-1) = 2(2ax + b)$, adică numere divizibile cu 2.

2. Identificînd coeficienții polinoamelor $2aX^2 + 2bX + 2a + 2c$ şi $(X-1)^2$, obținem $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$, $c = 0$.

V.34. Fie polinomul $P(X) = X^2 + mX + m$, m, $n \in \mathbb{R}$. Determinați m şi n astfel încît polinomul

$$Q(X) = P[-P(X)] - P[P(-X)]$$

să fie divizibil cu polinomul $R(X) = 2X^3 - X^2 + 4X - 2$.

R. Avem $P[-P(X)] = [-P(X)]^2 + m[-P(X)] + n$ şi

$$P(P(-X)] = [P(-X)]^2 + mP(-X) + n.$$

Obținem $Q(X) = 2m(2X^3 - X^2 + 2mX - n)$.

Rezultă că R divide Q pentru orice m real şi pentru $n = 2$.

V.35. Fie polinomul: $P(X, Y) = X^4 + 4Y^4$.

a). Descompuneți polinomul P în factori ireductibili cu coeficienți reali.

b). Arătați că P se poate scrie ca o sumă de patru pătrate.

R. a) Avem $X^4 + 4Y^4 = (X^2)^2 + (2Y^2)^2 = [X^2 + 2Y^2]^2 - (2XY)^2 =$
$= (X^2 - 2XY + 2Y^2)(X^2 + 2XY + 2Y^2)$

b) Putem scrie:

$$X^2 - 2XY + 2Y^2 = (X - Y)^2 + Y^2 \text{ şi}$$

$$X^2 + 2YX + 2Y^2 = (X + Y)^2 + Y^2 \text{ şi deci:}$$

$$P(X, Y) = [(X - Y)^2 + Y^2][X + Y)^2 + Y^2) =$$

$$= (X^2 - Y^2)^2 + (XY - Y^2)^2 + (XY + Y^2)^2 + Y^4.$$

V.36. Calculați valoarea polinomului:

$$P(X) = X^3 + (a+1)X^2 + (a+b)X + b + 1, \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

pentru valorile lui X pentru care $X^2 + aX + b = 0$.

R. $P(X) = X(X^2 + aX + b) + (X^2 + aX + b) + 1$, deci, obținem valoarea 1.

V.37^{PO}. Fie polinomul: $P(X) = X^4 - 2X^3 + mX^2 - 2X + 1$. Demonstrați că pentru $m \geq 2$, $P(x) > 0$ oricare ar fi x real.

R. $m \geq 2$ implică faptul că există $k \geq 0$ astfel încît $m = 2 + k$ și P devine $P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 + kx^2 - 2x + 1 = (x^2 - x)^2 + (x - 1)^2 + kx^2$ adică o sumă de pătrate.

V.38^{PO}. Simplificați fracția:

$$F(X) = \frac{2X^5 + 7X^4 + 13X^3 + 15X^2 + 9X + 2}{2X^3 + 5X^2 + 4X + 1}$$

și deduceți că $F(x)$ este un număr par pentru orice valoare $x \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ dată lui X.

R. $2X^3 + 5X^2 + 4X + 1 = (2X^3 + X^2) + (4X^2 + 4X + 1) = X^2(2X + 1) +$

$$+ (2X + 1)^2 = (2X + 1)(X^2 + 2X + 1) = (2X + 1)(X + 1)^2.$$

Rezultă că numitorul poate forma în descompunere printre factori pe $X + 1$ sau $2X + 1$. Efectuînd împărțirea numărătorului prin aceste polinoame obținem:

$$2X^5 + 7X^4 + 13X^3 + 15X^2 + 9X + 2 = 2(X + 1)^2(2X + 1)(X^2 + X + 2).$$

După simplificare obținem

$F(X) = 2(X^2 + X + 2)$ și deci, într-adevăr, pentru x întreg diferit de -1 (am simplificat cu $X + 1$) numărul $F(x)$ este multiplu de 2.

V.39. Fie polinomul $P(X, Y) = X^4 - 4X^2Y - Y^4 + 2Y^2 - 1$

a). Descompuneți polinomul în factori ireductibili cu coeficienți în $\mathbb{R}$.

b). Calculați valoarea polinomului pentru valorile x, y ale lui X, respectiv Y pentru care $x - y = 1$.

R. Completăm polinomul $X^4 - 4X^2Y$ pînă obținem pătratul unui binom. Obținem:

$$P(X, Y) = (X^4 - 4X^2Y + 4Y^2) - (Y^4 + 2Y^2 + 1) =$$

$$= (X^2 - 2Y)^2 - (Y^2 + 1)^2 = [X^2 - (Y^2 + 2Y + 1)] \cdot$$

$$\cdot (X^2 + Y^2 - 2Y + 1) = (X - Y - 1)(X + Y + 1)(X^2 + Y^2 - 2Y + 1).$$

Petrnu $x - y = 1$ obținem $P(x, y) = 0$.

V.40^{PO}. Fie fracția algebrică rațională:

$$F(X) = \frac{X^4 + mX^3 + 2X^2 - 2X + n}{X^4 + X^2 - 2}, \qquad m, n \in \mathbb{R}.$$

1. Determinați m și n astfel încît fracția dată să se simplifice cu un polinom de gradul al doilea, iar fracția obținută după simplificare să fie definită pe $\mathbb{R}$.

2. Dacă $F_1(X)$ este fracția obținută după simplificare, stabiliți valoarea de adevăr a propoziției

$$„F_1(x) > 0, \ (\forall) x \in \mathbb{R}".$$

R. 1) Numitorul se descompune în $(X-1)(X+1)(X^2+2)$.

Rezultă că polinomul prin care trebuie să se simplifice este X^2-1, X^2+2 fiind nenul pentru orice x real. Dacă $M(X)$ este polinomul de la numărător trebuie, deci, ca $M(1) = M(-1) = 0$, de unde rezultă sistemul în m şi n format din ecuaţiile:

$$m+n+1=0 \text{ şi } -m+n+5=0$$

cu soluţiile: $m=2$ şi $n=-3$.

2) $F_1(X) = \dfrac{X^2+2X+3}{X^2+2}$.

Propoziţia „$F(x) \geqslant 0$" este adevărată deoarece $x^2+2>0$ şi $x^2+2x+3 = (x^2+2x+1)+2 = (x+1)^2+2>0$ deci $F_1(x)>0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

V.41. Arătaţi că:

$$\frac{X^2-2(\sqrt{2}-1)X+3-2\sqrt{2}}{X-\sqrt{2}+1} - \frac{X^2-2(\sqrt{2}+1)X+3+2\sqrt{2}}{X-\sqrt{2}-1} = 2.$$

R. Ţinem cont de faptul că

$$3 \pm 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} \pm 1)^2 \text{ şi obţinem:}$$

$$\frac{(X-\sqrt{2}+1)^2}{X-\sqrt{2}+1} - \frac{(X-\sqrt{2}-1)^2}{X-\sqrt{2}-1} = X-\sqrt{2}+1-X+\sqrt{2}+1=2.$$

V.42$^{\text{PO}}$. Fie a_1, a_2, b_1, b_2 numere reale. Demonstraţi inegalitatea (Cauchy—Buniakovski):

$$(a_1b_1+a_2b_2)^2 \leqslant (a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2).$$

Verificaţi că egalitatea are loc dacă şi numai dacă numerele a_1, a_2 sînt proporţionale cu numerele b_1, b_2.

Scrieţi inegalitatea pentru numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ şi $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

R. Efectuînd calculele obţinem inegalitatea echivalentă $2a_1a_2b_1b_2 \leqslant a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2$ care, este echivalentă cu $(a_1b_2-a_2b_1)^2 \geqslant 0$. Fie $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = k$. Rezultă $a_1 = b_1k$ şi $a_2 = b_2k$ şi înlocuind în inegalitate rezultă $(b_1^2k+b_2^2k)^2 \leqslant (b_1^2k^2+b_2^2k^2)(b_1^2+b_2^2)$ sau $k^2(b_1^2+b_2^2)^2 \leqslant k^2(b_1^2+b_2^2)^2$, adică egalitate. Reciproc, dacă are loc egalitatea, avem $(a_1b_2-a_2b_1)^2=0$, adică $a_1b_2-a_2b_1=0$ ceea ce conduce la $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2}$. În cazul general inegalitatea se scrie:

$$(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+\ldots+b_n^2).$$

V.43. Fie a_1, a_2, b_1, b_2 numere reale pozitive. Demonstraţi inegalitatea (Hölder):

$$a_1b_1+a_2b_2 \leqslant \sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}.$$

Verificaţi că egalitatea are loc dacă şi numai dacă numerele a_1, a_2 sînt proporţionale cu b_1, b_2.

R. Ridicînd la pătrat ambii membri ai inegalității și efectuînd calculele obținem $(a_1b_2 - a_2b_1)^2 \geqslant 0$. Pentru verificarea cerută se raționează ca la exercițiul V.42. Altfel: în inegalitatea Cauchy-Buniakovski aplicăm radicalul în ambii membri.

V.44PO**.** Fie a_1, a_2 numere reale pozitive. Aplicînd inegalitatea Cauchy—Buniakovski numerelor $\sqrt{a_1}$, $\sqrt{a_2}$ și $\frac{1}{\sqrt{a_1}}$, $\frac{1}{\sqrt{a_2}}$, demonstrați că:

$$(a_1 + a_2)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) \geqslant 2^2.$$

În ce caz are loc egalitatea?
Scrieți inegalitatea pentru n numere.

R. Avem:

$$\left(\sqrt{a_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \sqrt{a_2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_2}}\right)^2 \leqslant [(\sqrt{a_1})^2 + (\sqrt{a_2})^2]\cdot\left[\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{a_2}}\right)^2\right],$$

și efectuînd calculele obținem inegalitatea de demonstrat. Egalitatea rezultă că are loc cînd aceste perechi de numere sînt proporționale $\frac{\sqrt{a_1}}{\frac{1}{\sqrt{a_1}}} = \frac{\sqrt{a_2}}{\frac{1}{\sqrt{a_2}}}$ ceea ce conduce la $a_1 = a_2$.

Pentru n numere inegalitatea se scrie:

$$(a_1 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$

V.45. Fie a_1, a_2, b_1, b_2 numere reale pozitive. Demonstrați că:

$$\sqrt{a_1b_1} + \sqrt{a_2b_2} \leqslant \sqrt{a_1 + a_2}\cdot\sqrt{b_1 + b_2}.$$

În ce caz are loc egalitatea?

R. Ridicînd la pătrat ambii membri și efectuînd calculele se obține un pătrat perfect. Altfel: se aplică inegalitatea Hölder pentru $\sqrt{a_1}$, $\sqrt{a_2}$ și $\sqrt{b_1}$, $\sqrt{b_2}$. Rezultă că egalitatea are loc dacă numerele a_1, a_2 sînt proporționale cu numerele b_1, b_2.

V.46. Fie a_1, a_2, b_1, b_2 numere reale pozitive. Demonstrați inegalitatea (Minkovski):

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2} \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}.$$

În ce caz are loc egalitatea?

R. Ridicînd la pătrat ambii membri rezultă inegalitatea Cauchy-Buniakovski. Egalitatea are loc, deci, atunci cînd numerele a_1, a_2 sînt proporționale cu numerele b_1, b_2.

V.47. Fie a, b numere reale pozitive. Demonstrați inegalitatea (Huyghens):

$$\sqrt{(1 + a)(1 + b)} \geqslant 1 + \sqrt{ab}.$$

R. Ridicînd la pătrat ambii membri și efectuînd calculele obținem $a + b \geqslant 2\cdot\sqrt{ab}$, adică $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0$.

V.48. Fie a, b, c numere reale strict pozitive. Demonstrați că:

1). dacă $a + b = 1$, atunci $ab \leqslant \frac{1}{2}$.

2). dacă $a + b + c = 1$, atunci $ab + bc + ca < \frac{1}{2}$.

R. 1) Deoarece $a + b = 1$ rezultă $(a + b)^2 = 1$ sau $a^2 + b^2 + 2ab = 1$, deci $2ab = 1 - (a^2 + b^2) < 1$, adică inegalitatea cerută.

2) În mod analog $a + b + c = 1$ implică $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 1$, deci $ab + bc + ca = \frac{1}{2} - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} < \frac{1}{2}$.

V.49. Fie a, b, c numere reale strict pozitive. Demonstrați că:

1). dacă $a^2 + b^2 = 1$, atunci $-\frac{1}{2} \leqslant ab \leqslant \frac{1}{2}$.

2). dacă $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, atunci $ab + bc + ca \geqslant -\frac{1}{2}$.

R. 1) $(a + b)^2 \geqslant 0$ implică $a^2 + b^2 + 2ab \geqslant 0$ și ținînd cont de ipoteză $1 + 2ab \geqslant 0$, adică $ab \geqslant -\frac{1}{2}$. Pentru cealaltă inegalitate aplicăm inegalitatea $m_g \leqslant m_p$: $\sqrt{ab} \leqslant \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ adică $ab \leqslant \frac{1}{2}$.

2) Analog $(a + b + c)^2 \geqslant 0$ implică $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \geqslant 0$, adică $ab + bc + ca \geqslant -\frac{1}{2}$.

V.50[P.O.]. Fie a, b, $c \in (0, 1)$. Folosind inegalitatea $a(1 - a) \leqslant \frac{1}{4}$, demonstrați că numerele $(1 - a)b$, $(1 - b)c$, $(1 - c)a$ nu pot fi simultan mai mari decît $\frac{1}{4}$.

R. Înmulțind inegalitățile $a(1 - a) \leqslant \frac{1}{4}$, $b(1 - b) \leqslant \frac{1}{4}$, $c(1 - c) \leqslant \frac{1}{4}$ membru cu membru, rezultă

$$a(1 - a)b(1 - b)c(1 - c) \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^3. \tag{1}$$

Presupunînd $(1 - a)b > \frac{1}{4}$, $(1 - b)c > \frac{1}{4}$, $(1 - c)a > \frac{1}{4}$ rezultă $(1 - a)b(1 - b) \cdot c(1 - c)a > \left(\frac{1}{4}\right)^3$ în contradicție cu (1).

CLASA A VII-a

GEOMETRIE

CAPITOLUL I

Cercul

§1. Definiție. Construcție. Coarde și tangente

I.1.1[PP]. Ce linie „descrie" : a) un punct oarecare de pe limba unui ceas? b) un punct oarecare de pe coperta unei cărți cînd deschidem cartea?

R. a), b). În ambele cazuri linia „descrisă" este un arc de cerc, sau un cerc, dacă punctul trece prin poziția inițială, efectuînd o rotație completă.

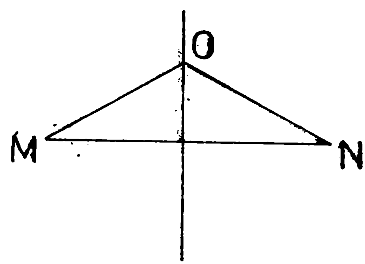
I.1.2. Fie $ABCD$ un dreptunghi și O punctul de intersecție al diagonalelor sale. Se construiește cercul cu centrul în O și cu raza $[OA]$. Ce poziție au punctele B, C și D față de cerc?

R. Deoarece segmentele $[OA]$, $[OB]$, $[OC]$ și $[OD]$ sînt congruente, punctele B, C și D aparțin cercului.

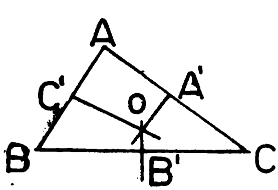
I.1.3[PP]. Să se arate că prin două puncte „trec" o infinitate de cercuri.

R. Fie M și N cele două puncte și să considerăm mediatoarea segmentului $[MN]$ (prin mediatoarea unui segment se înțelege dreapta perpendiculară pe segment și care trece prin mijlocul acestuia). Fie O un punct pe mediatoare, arbitrar ales.

Atunci $[OM] \equiv [ON]$ și cercul de centru O și rază $[OM]$, „trece" prin punctele M și N. Cum punctul O a fost ales arbitrar, rezultă că există o infinitate de cercuri ce „trec" prin M și N, avînd centrele pe mediatoarea segmentului $[MN]$.



I.1.4[PP]. Punctul de intersecție a două din mediatoarele laturilor unui triunghi se află și pe mediatoarea laturii a treia.



R. Fie ABC triunghiul considerat și fie dr. $B'O$ și dr. $C'O$ mediatoarele laturilor $]BC]$ și $[AB]$. Atunci, din definiția mediatoarei, $[OB] \equiv [OC]$, $[OB] \equiv [OA]$ și deci $[OC] \equiv [OA]$, adică punctul O aparține mediatoarei laturii $[AC]$.

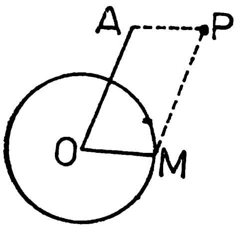
I.1.5[M,PP]. Centrul cercului ce trece prin cele trei vîrfuri ale unui triunghi dreptunghic se află pe mijlocul ipotenuzei.

R. Fie ABC un triunghi dreptunghic ($m(\hat{A}) = 90°$) și punctul O o mijlocul ipotenuzei $[BC]$. Atunci :

$$[OA] \equiv [OB] \equiv [OC]$$

pentru că lungimea mediatoarei $[OA]$ este egală cu $\frac{BC}{2} = OB = OC$, **deci, distanța de la O la vîrfurile triunghiului este aceeași, adică punctul O este centrul cercului ce trece prin A, B și C.**

I.1.6. Fie O centrul unui cerc, A un punct dat, diferit de O și M un punct pe circumferința cercului.



Prin M se duce un segment de dreaptă $[MP]$ congruent și paralel cu $[OA]$ și „îndreptat în același sens". Ce linie „descrie" punctul P cînd M „descrie" cercul?

R. Deoarece $[AP] \equiv [OM]$, lungimea segmentului $[AP]$ rămîne neschimbată iar punctul A este „fix". Punctul P „descrie" cercul cu centrul în A, congruent cu cercul dat.

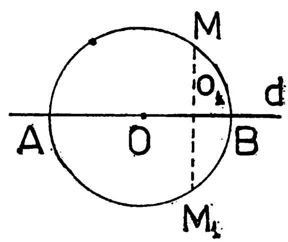
I.1.7. Se dau două puncte A, B și o dreaptă d. Să se construiască un cerc cu centrul pe d care să treacă prin A și B. Să se examineze cazul cînd $d \perp$ dr. AB.

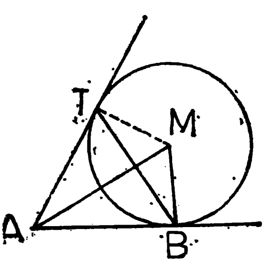
R. Centrul cercului va fi punctul O de intersecție al dreptei d cu mediatoarea segmentului $[AB]$ și de rază $[OA]$. În cazul cînd $d \perp$ dr.AB, problema nu are soluție pentru că mediatoarea lui $[AB]$ este paralelă cu d și nu există centrul unui cerc cu proprietatea dată.

I.1.8$^{M.PP}$. Arătați că orice dreaptă care conține centrul unui cerc este axă de simetrie a cercului.

R. Fie $\mathscr{C}(O, R)$ cercul de centru O și rază de lungime R, și fie d dreapta ce-l conține pe O. Atunci d intersectează cercul în două puncte A, B și $OA = OB = R$. Fie M un punct pe cerc și fie M_1 punctul de intersecție al perpendicularei prin M pe d cu cercul. Să notăm $\{O_1\} =$ dr.$MM_1 \cap$ dr. AB.

Atunci $[MO_1] \equiv [M_1O_1]$ (triunghiurile OMO_1 și OM_1O_1 sînt congruente), deci M_1 este simetricul lui M și cum M a fost arbitrar ales rezultă că dreapta d este axă de simetrie a cercului.





I.1.9^{A}. Fie A, B două puncte „fixe". Se consideră un cerc variabil de centru M, tangent dreptei AB în punctul B. Perpendiculara din B pe dr.AM taie din nou cercul în T. Să se afle locul geometric al punctului T.

R. Triunghiul MBT fiind isoscel ($[MB] \equiv [MT]$) și cum dr.$MA \perp$ dr.BT, rezultă $\widehat{TMA} \equiv \widehat{AMB}$. De aici se obține că triunghiurile ABM și AMT sînt congruente și deci $[AB] \equiv [AT]$; astfel că, locul geometric al punctului T este cercul cu centru în A și raza de lungime AB, mai puțin punctul B și simetricul lui B în raport cu A.

Observație. Această problemă pune în evidență o proprietate interesantă a tangentelor la cerc, și anume: „tangentele" duse dintr-un punct exterior la cerc sînt congruente.

I.1.10. Vîrfurile A, B ale triunghiului ABM sînt „fixe", iar M este un punct „variabil". Să se afle locul geometric al punctului M, știind că mediana $[AA']$ a triunghiului ABM are o lungime dată l.

R. Fie punctul Q pe $[BA$ astfel încît $[AQ] \equiv [AB]$. Atunci dr. $AA' \parallel$ dr. QM și $[AA']$ este linie mijlocie în triunghiul BQM, deci $MQ = 2l$. Rezultă că punctul M descrie un cerc cu centrul în punctul Q și raza de lungime $2l$.

I.1.11[PO]. Considerați în plan două puncte A și B situate la distanța de 6 cm. Căutați toate punctele din plan care se află, față de ambele puncte, la distanța de:

a) 2 cm; b) 3 cm; c) 4 cm. Efectuați construcția cu precizie. Cîte soluții ați găsit în fiecare din cazurile a), b), c)?

R. Nu există nici un punct în plan situat la distanța de 2 cm atît față de punctul A cît și de punctul B. Singurul punct situat la distanța de 3 cm de punctele A și B este mijlocul segmentului $[AB]$. Cele două puncte situate la distanța de 4 cm de punctele A și B se află pe mediatoarea segmentului AB și sînt punctele de intersecție a celor două cercuri cu centrele în A respectiv în B și cu raza de lungime 4 cm.

I.1.12[PO]. Construiți, cu compasul și rigla negradată, triunghiul ABC, dacă cunoașteți, OA, lungimea razei cercului circumscris triunghiului, mărimea unghiului la centru $\widehat{AOB}$ și lungimea laturii $[AC]$.

R. Considerăm triunghiul ABC înscris în cerc. Observăm că problema are soluție numai dacă latura $[AC]$ este mai mică decît dublul lui $[OA]$, pentru că o latură a triunghiului nu poate fi mai mare decît diametrul cercului. Construim cercul de rază $[OA]$; construim un unghi la centru egal cu cel dat; construim o coardă de lungime egală cu $[AC]$. Avînd cele trei vîrfuri ale triunghiului, pe cerc, trasăm laturile triunghiului.

I.1.13[PO]. Construiți, folosind numai compasul și rigla negradată, triunghiul ABC, cunoscînd OD lungimea razei cercului înscris în triunghi, unghiul AOD format de raza $[OD]$, perpendiculară pe dr.AC, ($D \in$ dr.AC) cu segmentul care unește centrul cercului înscris cu vîrful A, și unghiul C al triunghiului.

R. Considerăm triunghiul ABC. Observăm că triunghiul AOD este triunghi dreptunghic. Mai observăm că dacă unghiul C (dat) al triunghiului este de două ori mai mare decît unghiul AOD (dat), atunci problema nu are soluție, deoarece dreptele AB și CB ar fi paralele. Dacă unghiul C, dat, este mai mare decît dublul unghiului AOD, dat, atunci cercul de rază $[OD]$ va fi cerc exînscris triunghiului ABC. Problema are soluție în sensul textului de mai sus numai dacă unghiul C este mai mic decît dublul unghiului AOD.

Construcția o efectuăm astfel: construim $[OD]$, apoi în O un unghi congruent cu unghiul AOD, iar în D o perpendiculară pe dr. OD, (dreapta suport a laturii AC); construim simetricul lui $[AD]$ față de dr.AO, care va fi dreapta suport a laturii AB; considerăm pe $[AD$, arbitrar, un punct Q și construim un unghi congruent cu unghiul C avînd o latură dreapta AD și vîrful în Q (fie cealaltă latură a unghiului AQP); construim o perpendiculară din O pe dr.QP, care intersectează cercul de rază $[OD]$ în M; perpendiculara, construită pe OM în punctul M este dreapta suport a laturii $[BC]$.

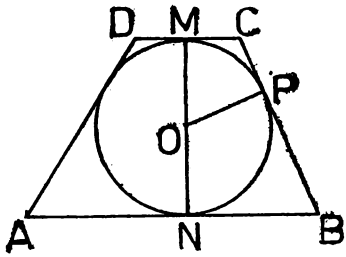
I.1.14[PO]. Construiți un trapez isoscel, dacă cunoașteți raza cercului circumscris trapezului și latura oblică a trapezului. a) Ce condiții trebuie să îndeplinească elementele date? b) Cîte soluții are problema?

R. a) Considerăm trapezul $ABCD$ înscris în cerc. Observăm că latura oblică nu poate fi mai mare decît diametrul cercului. Deci condiția cerută revine la a impune ca latura oblică să fie strict mai mică decît dublul razei.

b) Construim un cerc cu raza de lungime dată.

Construim în cerc o coardă congruentă cu latura oblică dată. Bazele trapezului vor fi coarde paralele. Dar din capetele laturii oblice (a coardei) putem construi o infinitate de perechi de coarde paralele. Problema nu are o soluție bine determinată. Un anume trapez isoscel nu se poate construi cunoscînd doar raza cercului circumscris și latura oblică. Cu ajutorul acestor două elemente se pot construi o infinitate de trapeze isoscele de aceeași latură oblică și înscrise în același cerc de rază dată.

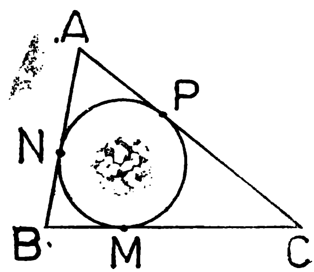
I.1.15[PO]. Construiți un trapez isoscel dacă se dă raza cercului înscris în trapez și unghiul ascuțit al trapezului.



R. Considerăm trapezul $ABCD$ circumscris cercului de centru O. Laturile trapezului sînt tangente la cerc. Razele $[OM]$, $[ON]$ și $[OP]$ sînt perpendiculare pe laturile trapezului. Construim un cerc cu diametrul dat (cunoaștem lungimea razei). Construim o perpendiculară pe $[ON]$ care va fi dreapta suport a bazei mari. Luăm pe această dreaptă un punct oarecare și construim, cu vîrful în acest punct unghiul ascuțit al trapezului. Din centrul cercului ducem o perpendiculară pe latura acestui unghi. Această perpendiculară intersectează cercul într-un punct, care va fi punctul de tangență a laturii oblice cu cercul înscris în trapezul isoscel.

Construim latura oblică a trapezului ducînd o paralelă la latura unghiului sau ducînd o perpendiculară pe rază în punctul de tangență. Cu aceeași metodă construim și dreapta suport a bazei mici. După aceasta, construim simetricul punctului B față de N, a punctului C față de M și am obținut cele patru vîrfuri ale trapezului.

I.1.16[M]. Perimetrul unui triunghi ABC este de 30 cm, iar latura BC de 13 cm. Latura $[AB]$ este tangentă cercului înscris în triunghi în punctul N. Să se calculeze lungimea lui $[AN]$.



R. Vîrfurile triunghiului ABC sînt puncte exterioare pentru cercul înscris în triunghi. Tangentele dintr-un punct exterior la cerc fiind congruente avem: $[BM] \equiv [BN]$, $[CM] \equiv [CP]$ și $[AN] \equiv [AP]$. Rezultă $NB + BM + MC + CP = 2 \cdot BC = 26$ cm, deci suma lungimilor $NA + AP$ este $NA + AP = 30$ cm $- 26$ cm$=4$ cm. Atunci rezultă $AN = 2$ cm.

§2. Arce. Unghi înscris și unghi la centru

I.2.1. Pe un cerc se iau punctele A, B, C și D care se succed în sens opus mișcării acelor unui ceas, $m(\overset{\frown}{AB}) = 110°$, $m(\overset{\frown}{BC}) = 50°$, $m(\overset{\frown}{CD}) = 140°$. Să se afle:

a) unghiurile patrulaterului $ABCD$;

b) unghiurile formate de diagonale cu laturi.

R. Ținînd cont că măsura unui unghi înscris în cerc este jumătate din măsura arcului subîntins rezultă:

a) Măsurile unghiurilor patrulaterului sînt $m(\hat{A}) = 95°$; $m(\hat{B}) = 100°$, $m(\hat{C}) = 85°$; $m(\hat{D}) = 80°$.

b) Unghiurile formate de diagonale cu laturi au respectiv măsurile: 25°; 70°; 30°; 55°.

I.2.2. Într-un cerc se duce o coardă oarecare AB. a) Să se aleagă pe arcul AB, mai mare decît un semicerc, un punct M astfel încît măsura unghiului AMB să fie cea mai mare.

b) Să se aleagă pe arcul AB, mai mic decît un semicerc, un punct N astfel încît măsura unghiului ANB să fie cea mai mică.

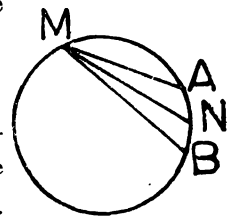
c) Cînd punctul N rămîne „fix” (dat) și punctul M „se mișcă” rămînînd de aceeași parte a dreptei AB, măsurile unghiurilor MAN și MBN variază sau rămîn aceleași (constante)? Dar suma lor?

R. a) Măsura unghiului AMB rămîne mereu aceeaşi (constantă) deci nu există o cea mai mai mare măsură, aşadar punctul M este orice punct.

b) La fel, măsura unghiului ANB rămîne aceeaşi, deci nu există o cea mai mică măsură, aşadar punctul N este orice punct ce aparţine arcului.

c) Măsurile unghiurilor variază $m(\widehat{MAN}) + m(\widehat{MBN}) = 180°$. Deci, măsurile celor două unghiuri se schimbă dar suma lor rămîne aceeaşi (constantă).

I.2.3^M. Bisectoarele tuturor unghiurilor înscrise în acelaşi arc de cerc sînt concurente.



R. Fie M un punct pe cerc şi fie $\overset{\frown}{AB}$ arcul considerat.

Să luăm unghiul $\widehat{AMB}$. Bisectoarea acestui unghi intersectează pe $\overset{\frown}{AB}$ în punctul N mijlocul arcului AB. Cînd M este orice punct pe cerc, bisectoarea lui $\widehat{AMB}$ va „trece" întotdeauna prin N.

I.2.4^M. Dacă două arce ale aceluiaşi cerc au un singur capăt comun şi n-au puncte interioare comune, atunci reuniunea lor împreună cu capătul comun este un arc a cărui măsură este egală cu suma măsurilor celor două arce.

R. Fie $\overset{\frown}{AB}$ şi $\overset{\frown}{AC}$ arcele considerate şi fie O centrul cercului astfel încît:

$$\text{int } \widehat{AOB} \cap \text{int } \widehat{AOC} = \varnothing.$$

Atunci, măsura arcului $\overset{\frown}{AB}$ este egală cu măsura unghiului AOB, iar a lui $\overset{\frown}{AC}$ este egală cu măsura unghiului AOC. Avem:

$$m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{BOA}) + m(\widehat{AOC}) \quad (\text{căci } [OA \subset \text{Int } \widehat{BOC})$$

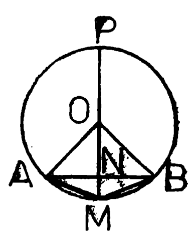
deci:

$$m(\widehat{BOC}) = m(\overset{\frown}{AC}) + m(\overset{\frown}{AB})$$

şi rezultă că măsura arcului CB este aceeaşi cu măsura unghiului BOC.

I.2.5^M. Să se demonstreze că dacă diametrul unui cerc conţine mijlocul unui arc $\overset{\frown}{AB}$ sau a coardei $[AB]$, atunci diametrul este perpendicular pe coarda $[AB]$.

R. Fie cercul $C(O, R)$, A, B puncte pe cerc, $[MP] \cap [AB] = \{N\}$, unde $M \in \overset{\frown}{AB}$ astfel încît $\overset{\frown}{AM} \equiv \overset{\frown}{MB}$, iar $[MP]$ diametru.



Triunghiurile AON şi BON sînt congruente deoarece $\widehat{AON} \equiv \widehat{NOB}$ (unghiuri ce subîntind arce congruente), $[AO] \equiv [OB]$ (ca raze în cerc), iar $[ON]$ este comună. Atunci rezultă că:

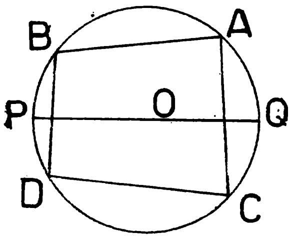
$$m(\widehat{ANO}) = m(\widehat{BNO}) = 90°$$

şi deci $[MP] \perp [AB]$. Asemănător, dacă plecăm de la N mijlocul coardei $[AB]$.

I.2.6^M. Dacă centrul unui cerc este situat la distanţe egale de două coarde ale cercului, atunci coardele sînt congruente.

R. Să considerăm un cerc cu centrul în punctul O şi două coarde $[AB]$ şi $[CD]$, astfel încît, notînd cu M, respectiv N, picioarele perpendicularelor din O pe dr. AB respectiv dr. CD, să avem $[OM] \equiv [ON]$. În plus, cum triunghiurile OAB şi OCD sînt isoscele, rezultă $[MB] \equiv [MA]$, $[NC] \equiv [ND]$, căci $[OM]$ şi respectiv $[ON]$ sînt înălţimi deci şi mediane.

Triunghiurile dreptunghice OMA şi OND sînt congruente deoarece $[OM] \equiv [ON]$ şi $[OA] \equiv [OD]$ ca raze şi deci $[AM] \equiv [ND]$, de unde se obţine $[AB] \equiv [CD]$.



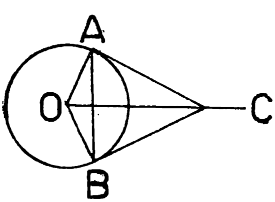
I.2.7.^{M}. Dacă coardele AB şi CD ale unui cerc sînt congruente, atunci $AC \| BD$ sau $AD \| BC$.

R. i) Studiem cazul cînd A şi B se află de aceeaşi parte a dreptei CD.

Dacă $[AD$ se află în interiorul unghiului BAC, ducînd diametrul $[PQ] \perp$ dr. AC se obţine că $\overset{\frown}{AQ} \equiv \overset{\frown}{QC}$ şi deci punctele B şi D sînt de o parte şi de alta faţă de dr. PQ. Se obţine că $\overset{\frown}{PB} \equiv \overset{\frown}{PD}$ şi rezultă dr. $PQ \perp$ dr. BD, deci dr. $AC \|$ dr. BD. Cînd AC se află în interiorul unghiului BAD se procedează analog.

ii) Dacă A şi B se află de o parte şi de alta a dreptei OD, înseamnă că dr. AB şi dr. CD se intersectează într-un punct O. Atunci $\overset{\frown}{BCA} \equiv \overset{\frown}{DBC}$ şi deci $\overset{\frown}{AC} \equiv \overset{\frown}{CD}$, şi ţinînd cont de i), rezultă dr. $BC \|$ dr. AD.

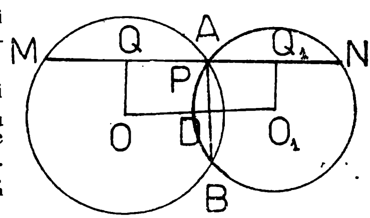
I.2.8^M. Fie A şi B două puncte ale cercului $\mathscr{C}$ (O, R), A şi B nefiind diametral opuse şi C punctul comun al tangentelor în A şi B la cercul $\mathscr{C}$ (O, R). Să se arate că dr. AB separă punctele O şi C.



R. Deoarece triunghiurile AOC şi BOC sînt congruente, triunghiul ABC este isoscel, $[AC] \equiv [BC]$ şi deci unghiurile $\widehat{CBA}$ şi $\widehat{CAB}$ au măsura mai mică de 90°, de unde rezultă că $[AB$ se află în interiorul unghiului OAC, iar $[BA$ se află în interiorul unghiului OBC, deci dr. $OC \cap$ dr. $AB \neq \emptyset$.

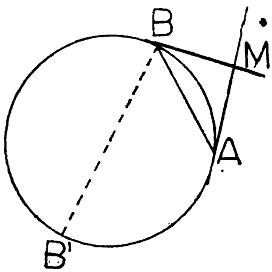
I.2.9^{PO}. Două cercuri se intersectează în A şi B. O secantă variabilă trecînd prin A taie cercurile a doua oară în M şi N. Să se afle ce „descrie" mijlocul segmentului $[MN]$.

R. Fie $\mathscr{C}(O, R)$, $\mathscr{C}(O_1, R_1)$ cele două cercuri şi $M \in \mathscr{C}(O, R)$, $N \in \mathscr{C}(O_1, R_1)$, dr. OQ şi dr. O_1Q_1 perpendiculare pe MN, cu Q, Q_1 pe dreapta MN.



Atunci mijlocul P al lui $[MN]$ coincide cu cel al lui $[QQ_1]$ şi considerînd punctul D pe linia centrelor OO_1 astfel încît $[OD] \equiv [O_1D]$ rezultă că $[DP]$ este linie mijlocie în trapezul OO_1Q_1Q şi deci dr. $DP \perp$ dr. AP. Dacă considerăm punctul S pe $[MN]$ cu proprietatea că $[QA] \equiv [SQ_1]$, atunci $[QQ_1]$ şi $[SA]$ au acelaşi mijloc şi anume punctul P. Deci $[DS] \equiv [DA]$ şi deci mijlocul segmentului $[MN]$ descrie cercul cu centrul în D şi rază de lungime DA.

I.2.10. Pe cercul $\mathscr{C}(O, R)$ se consideră coarda $[AB]$ şi unghiul $\widehat{ABM}$. Să se demonstreze că dacă $m(\widehat{ABM}) = \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{AB})$, arcul $\overset{\frown}{AB}$ fiind inclus



în interiorul unghiului ABM, rezultă că dr. BM este tangentă cercului $\mathscr{C}$ (O, R) în B.

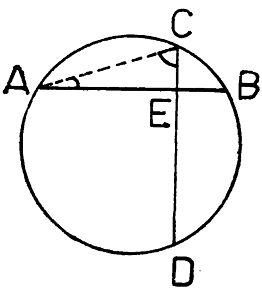
R. Dacă B' este punctul diametral opus lui B, atunci $[BA$ este situată în interiorul unghiului $B'BM$. Cum $m(\widehat{B'BA}) = \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{B'A})$ și $m(\widehat{ABM}) = \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{AB})$, rezultă:

$$m(\widehat{B'BM}) = \frac{m(\overset{\frown}{B'A}) + m(\overset{\frown}{AB})}{2} = 90°.$$

I.2.11. Fie $[AB]$ un diametru al unui cerc și C un punct oarecare al cercului. Se mai consideră un punct M al cercului. Unde trebuie să fie „situat" punctul M pentru ca unghiul ACM să fie: a) ascuțit; b) obtuz?

R. a) Punctul M trebuie să fie „situat" pe semicercul $\overset{\frown}{AB}$ care nu conține punctul C; b) Punctul M se află pe semicercul $\overset{\frown}{AB}$ care conține punctul C.

I.2.12. a) Într-un cerc se consideră două coarde perpendiculare. $[AB]$ și $[CD]$. Să se demonstreze că $m(\overset{\frown}{BC}) + m(\overset{\frown}{AD}) = 180°$. b) Reciproc, dacă $[AB]$ și $[CD]$ sînt două coarde ale unui cerc care se intersectează și $m(\overset{\frown}{BC}) + m(\overset{\frown}{AD}) = 180°$, coardele sînt perpendiculare.



R. a) Fie E punctul de intersecție al coardelor. Cum $m(\overset{\frown}{BC}) = 2m(\widehat{CAB})$ și $m(\overset{\frown}{AD}) = 2\, m(\widehat{ACD})$ rezultă $m(\overset{\frown}{BC}) + m(\overset{\frown}{AD}) = 2m(\widehat{CAB}) + m(\widehat{ACD})$. Coardele fiind perpendiculare unghiul E este drept.

Din triunghiul AEC rezultă că $m[\widehat{CAB} + \widehat{ACD}] = 90°$, deci $m(\overset{\frown}{BC}) + m(\overset{\frown}{AD}) = 180°$.

b) În relația $m(\overset{\frown}{BC}) + m(\overset{\frown}{AD}) = 180°$ se înlocuiește $m(\overset{\frown}{BC})$ prin $2m(\widehat{CAB})$ și $m(\overset{\frown}{AD})$ prin $2m(\widehat{ACD})$. Se obține:

$$m(\widehat{CAB}) + m(\widehat{ACD}) = \frac{180°}{2} = 90°.$$

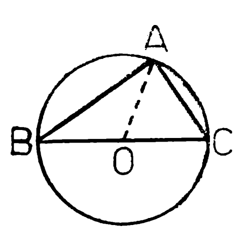
Triunghiul AEC are proprietatea că $m(\hat{E}) = 90°$.

I.2.13PO. Să se demonstreze, folosind teorema cu privire la unghiul înscris într-un semicerc, că:

a) Într-un triunghi dreptunghic, măsura medianei corespunzătoare ipotenuzei este egală cu jumătate din măsura ipotenuzei.

b) Dacă măsura medianei unui triunghi este egală cu jumătate din măsura laturii corespunzătoare, triunghiul este dreptunghic.

R. a) Fie ABC un triunghi dreptunghic ($m(\hat{A}) = 90°$). Considerăm cercul circumscris triunghiului. Unghiul A avînd măsură de 90°, arcul $\overparen{BMC}$ are măsură de $90° \cdot 2 = 180°$, deci $[BC]$ este diametru, iar centrul O al cercului este mijlocul ipotenuzei. Dar $[OA]$ este mediană şi totodată rază, deci $OA = BC/2$.



b) Fie ABC un triunghi, $[AO]$ o mediană şi $AO = \frac{BC}{2}$.

Atunci $[AO] \equiv [BO] \equiv [CO]$. Cercul cu centrul în punctul O şi cu raza de lungime OB „trece" prin punctele C şi A. Atunci unghiul A este înscris într-un semicerc, deci $m(\hat{A}) = 90°$.

§3. Patrulatere înscrise. Patrulatere inscriptibile

I.3.1^M. Un patrulater $ABCD$ cu vîrfurile pe un cerc determină arcele AB, BC şi CD care au respectiv măsurile $m(\overparen{AB}) = 50°$, $m(\overparen{BC}) = 70°$, $m(\overparen{CD}) = 100°$. Să se afle măsurile unghiurilor patrulaterului $ABCD$.

R. Deoarece :

$$m(\overparen{AB}) + m(\overparen{BC}) + m(\overparen{CD}) + m(\overparen{DA}) = 360°$$

rezultă $m(\overparen{DA}) = 140°$. Apoi :

$$m(\widehat{DAB}) = \frac{m(\overparen{BCD})}{2} = \frac{m(\overparen{BC}) + m(\overparen{CD})}{2} = \frac{70° + 100°}{2} = 85°;$$

$$m(\widehat{ABC}) = \frac{m(\overparen{DAB})}{2} = \frac{m(\overparen{DA}) + m(\overparen{CD})}{2} = \frac{140° + 100°}{2} = 120°;$$

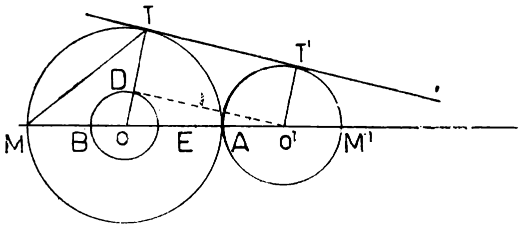
$$m(\widehat{ADC}) = \frac{m(\overparen{ABC})}{2} = \frac{m(\overparen{AB}) + m(\overparen{BC})}{2} = \frac{50° + 70°}{2} = 60°;$$

$$m(\widehat{BCD}) = \frac{m(\overparen{DAB})}{2} = \frac{m(\overparen{DA}) + m(\overparen{AB})}{2} = \frac{140° + 50°}{2} = 95°.$$

I.3.2. În triunghiul ABC se duce înălţimea $[AA']$ şi fie M şi N mijloacele laturilor $[AB]$ şi $[AC]$. Arătaţi că patrulaterul $AMA'N$ este inscriptibil dacă şi numai dacă $m(\hat{A}) = 90°$.

R. În triunghiul dreptunghic $AA'B$, $[A'M]$ este mediană; prin urmare triunghiul $A'MA$ este isoscel, deci $\sphericalangle AA'M \equiv \sphericalangle MAA'$. Analog, $\sphericalangle AA'M \equiv \sphericalangle A'AN$ şi obţinem în final $\sphericalangle MA'N \equiv \equiv MAN$(1). Patrulaterul $AMA'N$ este inscriptibil dacă şi numai dacă $m(\overparen{MA'N}) + m(\overparen{NAM}) = 180°$, sau, ţinînd cont de relaţia (1), dacă şi numai dacă $m(\hat{A}) = 90°$.

I.3.3^M. Două cercuri de centre O şi O' sînt tangente exterior în punctul A. Fie T, T' punctele în care o tangentă comună exterioară „atinge" respectiv cercurile. Linia centrelor $[OO']$ „taie" a doua oară cercurile în M şi M'. Demonstraţi că $TMM'T'$ este patrulater inscriptibil.



R. Razele OT și $O'T$, fiind perpendiculare pe aceeași tangentă TT', ele sînt paralele. Atunci, considerînd linia centrelor ca o secantă, unghiurile MOT și $MO'T$ sînt congruente, ca unghiuri corespondente. De aici rezultă că măsurile arcelor MT și AT' sînt egale. Suma măsurilor unghiurilor $MM'T'$ și MTT' este egală cu jumătate din suma măsurilor arcelor AT' și MAT. Dar măsurile arcelor AT' și MT fiind egale, rezultă că suma măsurilor arcelor AT' și MAT este $360°$. Atunci suma măsurilor unghiurilor $MM'T'$ și MTT' este egală cu $180°$, deci patrulaterul $MM'T'T$ este inscriptibil.

Observație. Problema prezintă interes și din punctul de vedere al construcției tangentei exterioare TT'. Se consideră cercul $\mathscr{C}(O, OB)$, concentric cu cercul „mai mare" și cu lungimea razei egale cu diferența lungimilor razelor celor două cercuri. Se consideră centrul cercului „mic" ca fiind punct exterior pentru cercul $\mathscr{C}(O, OB)$. Se construiește tangenta $O'D$ (punctul D fiind punctul de intersecție al cercurilor $\mathscr{C}(O, OB)$ și $\mathscr{C}\left(E, \frac{OO'}{2}\right)$). Se prelungește raza OD pînă intersectează cercul mare în T, iar prin punctul T se construiește paralela TT' la tangenta $O'D$.

Astfel se obține tangenta exterioară comună a două cercuri tangente exterior.

I.3.4PO**.** Pe înălțimea $[AD]$ a triunghiului ABC se consideră punctul H. Să se arate că proiecțiile lui D pe dreptele BA, BH, CA, CH determină un patrulater inscriptibil.

R. Fie M proiecția lui D pe dr. BA, N proiecția lui D pe dr. BH, P proiecția lui D pe dr. CA și R proiecția lui D pe dr. CH. Obținem patrulaterul $MNRP$ despre care trebuie să arătăm că este inscriptibil. Pentru aceasta este suficient să arătăm că:

$$m(\widehat{MNR}) + m(\widehat{MPR}) = 180°.$$

Dar:

$$m(\widehat{MNR}) = 180° - m(\widehat{BNM}) + m(\widehat{HNR}); \qquad (1)$$

$$m(\widehat{MPR}) = 90° - m(\widehat{MPA}) - m(\widehat{DPR}). \qquad (2)$$

Dar din patrulaterul inscriptibil $AMDP$ rezultă $\sphericalangle MPA \equiv \sphericalangle MDA$, iar $m(\widehat{MDA}) = 90° - m(\widehat{MDB})$. Din patrulaterul inscriptibil $MNDB$ rezultă $\sphericalangle HDB \equiv \sphericalangle BNM$, deci $m(\widehat{MPA}) = m(\widehat{MDA}) = 90° - m(\widehat{BNM})$. Din patrulaterul inscriptibil $HNDR$ rezultă $\sphericalangle RDH \equiv \sphericalangle HNR$, iar din triunghiul dreptunghic HDC cu înălțimea $[DR]$ rezultă $\sphericalangle RDH \equiv \sphericalangle DCH$. Pe de altă parte, din patrulaterul inscriptibil $DCPH$ rezultă $\sphericalangle DCH \equiv \sphericalangle DPR$. Deci $\sphericalangle DPR \equiv \sphericalangle HNR$. Se obține astfel:

$$m(\widehat{MPR}) = 90° - m(\widehat{MPA}) - m(\widehat{DPR}) = 90° - [90° - m(\widehat{BNM})] - m(\widehat{HNR}) =$$

$$= m(\widehat{BNM}) - m(\widehat{HNR}).$$

În concluzie:

$$m(\widehat{MNR}) + m(\widehat{MPR}) = 180° - m(\widehat{BNM}) + m(\widehat{HNR}) + m(\widehat{BNM}) - m(\widehat{HNR}) = 180°.$$

I.3.5M**.** Găsiți o condiție necesară și suficientă ca un paralelogram să fie inscriptibil.

R. Fie $ABCD$ paralelogramul considerat. Dacă $ABCD$ este inscriptibil, atunci $m(\hat{A}) + m(\hat{C}) = 180°$.

Dar $\hat{A} \equiv \hat{C}$, deci $m(\hat{A}) = 90°$. Arătăm că acestă condiție este și suficientă. Dacă $m(\hat{A}) = 90°$ și $\hat{A} \equiv \hat{C}$ ($ABCD$ paralelogram), atunci $m(\hat{A}) + m(\hat{C}) = 180°$ și deci $ABCD$ este inscriptibil.

I.3.6[M]**.** Găsiți o condiție necesară și suficientă ca un trapez să fie inscriptibil.

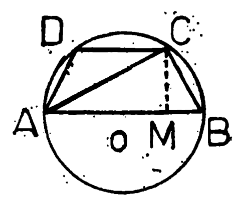
R. Vom arăta că astfel de condiție este ca trapezul să fie isoscel. Astfel, să presupunem că trapezul $ABCD$ este inscriptibil. Atunci dr. $AB \parallel$ dr. CD și $m(\hat{A}) + m(\hat{C}) = 180°$.

Dar $m(\hat{A}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{DCB})}{2}$ și $m(\hat{B}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{CDA})}{2}$ și cum $\overset{\frown}{DA} \equiv \overset{\frown}{BC}$, rezultă $\overset{\frown}{BCD} \equiv \overset{\frown}{CDA}$ sau $\hat{A} \equiv \hat{B}$, deci trapezul $ABCD$ este isoscel.

Să arătăm că dacă $ABCD$ este trapez isoscel atunci el este inscriptibil. Dacă $\hat{A} \equiv \hat{B}$, $\hat{C} \equiv \hat{D}$, atunci $2m(\hat{A}) + 2m(\hat{C}) = 360°$, deci $m(\hat{A}) + m(\hat{C}) = 180°$, ceea ce arată că $ABCD$ este inscriptibil.

I.3.7[M]**.** Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu baza mare AB de lungime 12 cm și baza mică CD de lungime 6 cm. Știind că $[AC]$ este bisectoarea unghiului $\widehat{DAB}$ și că $[AD] \equiv [BC]$ să se determine lungimea razei cercului circumscris trapezului $ABCD$.

R. Orice trapez isoscel fiind inscriptibil, din faptul că $[AC$ este bisectoarea unghiului $\widehat{DAB}$ rezultă că $\overset{\frown}{DC} \equiv \overset{\frown}{CB}$ și $[DC] \equiv [CB]$, deci și CB este de lungime 6 cm. Imediat se vede că triunghiul ABC este triunghi dreptunghic cu $m(\widehat{ACB}) = 90°$ și $m(\widehat{ABC}) = 60°$. Deci centrul cercului circumscris trapezului este mijlocul lui $[AB]$ iar raza cercului are lungimea de 6 cm.



I.3.8[M,PO]**.** Pe laturile triunghiului ABC se construiesc „în afară" trei triunghiuri echilaterale : $A'BC$, $B'AC$, $C'AB$. Demonstrați că : a) $[BB'] \equiv [CC'] \equiv [AA']$; b) Cercurile circumscrise celor trei triunghiuri echilaterale au un punct comun.

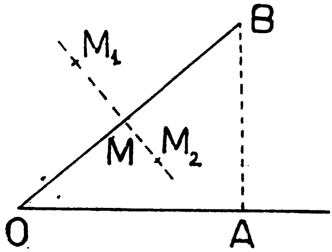
R. a) Considerăm triunghiurile ACA' și BCB'. Avem : $[BC] \equiv [CA']$, $[AC] \equiv [B'C]$ și $m(\widehat{ACA'}) = m(\widehat{BCB'}) = 60° + m(\widehat{ACB})$, deci cele două triunghiuri sînt congruente de unde $[BB'] \equiv [AA']$.

La fel se demonstrează congruența triunghiurilor CAC' și $B'AB$, de unde $[BB'] \equiv [CC']$. Atunci $[AA'] \equiv [BB'] \equiv [CC']$.

b) Două cercuri se intersectează într-un punct și vom arăta că acest punct aparține și celui de-al treilea cerc. Fie M și B punctele de intersecție ale cercurilor circumscrise triunghiurilor BCA și BAC iar punctele C și M ale cercurilor circumscrise triunghiurilor BCA' și CAB'. Patrulaterul $BMCA'$ este inscriptibil, deci $m(\widehat{BMC}) = 120°$; la fel patrulaterul $CMAB'$ este inscriptibil, deci și $m(\widehat{CMA}) = 120°$.

Atunci și unghiul AMB are măsura 120°, deci și patrulaterul $AMBC'$ este inscriptibil, adică punctul M aparține cercului circumscris triunghiului ABC'.

I.3.9[M]. Fie $[OA]$ şi $[OB]$ două segmente de lungime a şi respectiv $b (b > a)$. Să se determine „poziţia" lui A astfel încît lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABO să fie cît mai mică posibil. Cît este în acest caz lungimea razei cercului?

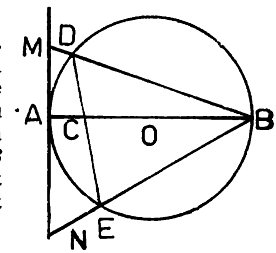


R. Oriunde s-ar afla punctul A, centrul cercului circumscris triunghiului ABO se află pe mediatoarea segmentului OB. Notăm centrul cercului cu M. Dintre toate punctele de pe mediatoare (M_1, M, M_2, ...) mijlocul segmentului este la cea mai mică distanţă de B sau O. Deci centrul cercului este mijlocul lui $[OB]$ şi raza are lungimea $R = \frac{b}{2}$. Aceasta înseamnă că triunghiul ABO este triunghi dreptunghic, deci „poziţia" punctului A se determină ducînd o perpendiculară din B pe OA.

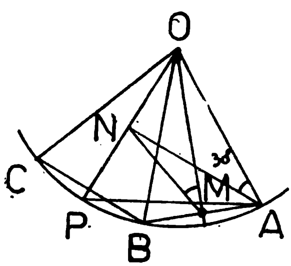
I.3.10[PO]. În cercul $\mathscr{C}(O, r)$ considerăm pe diametrul AB un punct oarecare C. Coarda „variabilă" care „trece" prin punctul C intersectează cercul în punctele D şi respectiv E. „Prelungirile" coardelor BD şi BE intersectează tangenta în A la cerc în punctele M şi respectiv N.

Arătaţi că patrulaterul $MNED$ este inscriptibil oricare ar fi punctul C pe diametrul AB, în interiorul acestuia.

R. Calculăm suma măsurilor unghiurilor opuse $\widehat{NMD}$ şi $\widehat{DEN}$. În triunghiul dreptunghic MAB unghiurile ascuţite AMB şi MBA sînt unghiuri complementare. Măsura unghiului MBA este jumătate din măsura arcului AD, iar măsura unghiului AMB este egală cu jumătate din măsura arcului DB. Tot jumătate din măsura arcului DB este şi măsura unghiului DEB. Deci unghiurile NMB şi DEB sînt congruente. Dar unghiurile DEB şi DEN sînt unghiuri suplementare. Atunci şi unghiurile NMD şi DEN sînt suplementare. Deci patrulaterul $NMED$ este inscriptibil.



I.3.11[PO]. Fie $[AB]$ şi $[BC]$ două laturi adiacente ale unui poligon regulat cu 9 laturi înscris în cercul cu centru în punctul O, M mijlocul laturii AB iar N mijlocul razei perpendiculare pe dr. BC. Demonstraţi că $m(\widehat{OMN}) = 30°$.



R. Avem: $m(\widehat{AOB}) = \frac{360°}{9} = 40°$. Deoarece dr. $OP \perp$ dr. BC rezultă $m(\widehat{BOP}) = 20°$, deci triunghiul AOP este echilateral, de unde deducem că dr. $AN \perp$ dr. OP şi $m(\widehat{OAN}) = 30°$.

Din triunghiul isoscel AOB deducem că dr. $OM \perp$ dr. AB deci patrulaterul $OAMN$ este inscriptibil. Rezultă în final:

$$m(\widehat{OMN}) = m(\widehat{OAN}) = 30°.$$

I.3.12[PO]. Fie $ABCD$ un patrulater şi $EFGH$ patrulaterul convex format de intersecţiile bisectoarelor sale. Să se demonstreze propoziţiile:
1) dacă $ABCD$ este dreptunghi, atunci $EFGH$ este pătrat;

2) dacă $ABCD$ este trapez isoscel, atunci $EFGH$ este patrulater ortodiagonal;

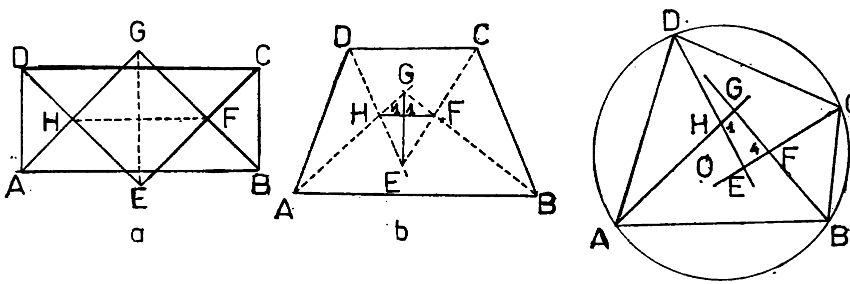
3) dacă $ABCD$ este un patrulater inscriptibil, atunci $EFGH$ este un patrulater inscriptibil.

R. 1) Avem dr. $AH \parallel$ dr. CE, dr. $DE \parallel$ dr. BG, deci $EFGH$ paralelogram, $m(\widehat{GHE}) = 90°$, deci $EFGH$ dreptunghi și dr. $HF \perp$ dr. GE, deci $EFGH$ este pătrat (fig. a).

2) Avem: $m(\widehat{DHA}) = m(\widehat{CFB}) = 90°$, adică $m(\widehat{GHE}) = m(\widehat{GFE}) = 90°$. Dar G și E fiind deopotrivă pe mediatoarea comună a segmentelor AB și CD avem că dr. $GE =$ dr. AB și $\hat{E}_1 \equiv \hat{F}_1$ iar $\hat{E}_2 \equiv \hat{H}_2$, dr. $HF \parallel$ dr. AB, deci dr. $GE \perp$ dr. HF (fig. b).

3) Avem: $m(\hat{H}_1) = 180° - \dfrac{m(\hat{A})}{2} - \dfrac{m(\hat{D})}{2}$, $m(\hat{F}_1) = 180° - \dfrac{m(\hat{B})}{2} - \dfrac{m(\hat{C})}{2}$,

$$m(\hat{H}_1) + m(\hat{F}_1) = 360° - \frac{m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) + m(\hat{D})}{2} = 360° - \frac{360}{2} = 180° \text{(fig. c)}.$$

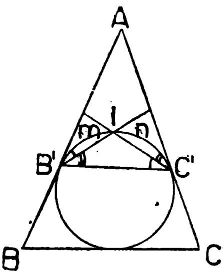


I.3.13. Fie $\mathscr{C}$ cercul înscris în triunghiul ABC și B', C' respectiv punctele de tangență ale acestui cerc cu laturile AB și AC. Să se arate că centrul cercului înscris în triunghiul $AB'C'$ se află pe $\mathscr{C}$.

R. Fie I punctul de intersecție al bisectoarei unghiului $\measuredangle AB'C'$ cu cercul C. Vom demonstra că I (ce aparține lui $\mathscr{C}$) este centrul cercului circumscris triunghiului $AB'C'$. Avem:

$$m(\widehat{AB'I}) = m(\widehat{IC'B'}) = \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{B'mI}) \qquad (1)$$

$$m(\widehat{IB'C'}) = m(\widehat{IC'A}) = \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{InC'}) \qquad (2)$$

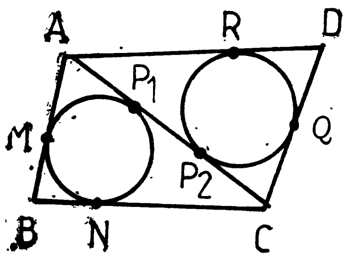


Cum $m(\widehat{AB'I}) = m(\widehat{IB'C})$, din (1) și (2) deducem că $m(\widehat{IC'B}) = m(\widehat{IC'A})$, deci $[C'I$ este bisectoarea unghiului $\widehat{AC'B'}$, adică I este centrul cercului circumscris triunghiului $AB'C'$.

I.3.14PO. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$. Să se arate că:

a) Cercurile înscrise în triunghiurile ABC și ACD sînt tangente dacă și numai dacă $AB + CD = AD + BC$.

b) Dacă cercurile înscrise în triunghiurile ABC și ACD sînt tangente, atunci și cercurile înscrise în triunghiurile ABD și BCD sînt tangente.



R. a) Presupunem că cercurile înscrise în triunghiurile ABC și ACD sînt tangente. Vom demonstra că este adevărată egalitatea $AB + CD = AD + BC$.

Notăm cu M, N, P_1, P_2, Q, R punctele de tangență ale cercurilor cu laturile patrulaterului. Din ipoteza făcută avem $P_1 \equiv P_2 \equiv P$. Ținînd seama că „tangentele" dintr-un punct exterior la cerc sînt congruente, avem $AB + CD = AM + MB + CQ + QD = AP + BN + CP + DR = AR + BN + CN + DR = BC + AD$.

Admitem acum ipoteza $AB + CD = AD + BC$, care se mai poate scrie în felul următor :

$$AM + MB + CQ + DQ = AR + RD + BN + CN, \quad AP_1 + CP_2 = AP_2 + CP_1. \tag{1}$$

Putem presupune, fără a restrînge generalitatea, că P_2 se află între P_1 și C. Din acest motiv $AP_2 = AP_1 + P_1P_2$ și $CP_1 = CP_2 + P_1P_2$. Ținînd seama de aceste relații, egalitatea (1) devine $P_1P_2 = 0$, adică $P_1 \equiv P_2$, ceea ce înseamnă că cercurile înscrise în triunghiurile ABC și ACD sînt tangente.

b) Ținînd cont de cele demonstrate la punctul a) putem spune că cercurile înscrise în triunghiurile ABC și ACD sînt tangente și rezultă că $AB + CD = AD + BC$, deci cercurile înscrise în triunghiurile ABD și BCD sînt tangente.

I.3.15[PO]**.** Să se arate că :

a) Dacă într-un hexagon convex inscriptibil două perechi de unghiuri opuse sînt congruente, atunci laturile opuse sînt paralele.

b) Dacă într-un hexagon convex inscriptibil două perechi de laturi opuse sînt paralele, atunci unghiurile opuse sînt congruente.

R. a) Fie $ABCDEF$ un hexagon convex inscriptibil în care două perechi de unghiuri opuse sînt congruente :

$$\sphericalangle BAF \equiv \sphericalangle CDE; \tag{1}$$
$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DEF. \tag{2}$$

Deoarece într-un patrulater convex inscriptibil unghiurile opuse sînt suplementare, în baza relațiilor (1) și (2) și folosind faptul că patrulaterele $ABCF$, $CDEF$ sînt inscriptibile, avem :

$$m(\widehat{BCF}) = 180° - m(\widehat{BAF}) = 180° - m(\widehat{CDE}) = m(\widehat{CFE}); \tag{3}$$

$$m(\widehat{FCD}) = 180° - m(\widehat{DEF}) = 180° - m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{AFC}). \tag{4}$$

Din (3) și (4) se obține :

$$m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{BCF}) + m(\widehat{FCD}) = m(\widehat{CFE}) + m(\widehat{AFC}) = m(\widehat{AFE}). \tag{5}$$

Deoarece dr. BC și dr. EF formează cu secanta CF unghiuri alterne interne congruente rezultă că ele sînt paralele.

Analog, rezultă că dr. CD este paralelă cu dr. AF și dr. AB este paralelă cu dr. DE.

b) Fie $ABCDEF$ un hexagon convex, inscriptibil în care două perechi de laturi opuse sînt paralele, de exemplu dr. AB paralelă cu dr. DE și dr. BC paralelă cu dr. EF.

Deoarece pe același cerc arcele cuprinse între coarde paralele sînt congruente, se obține :

$$\overset{\frown}{BD} \equiv \overset{\frown}{AE}; \quad \overset{\frown}{BF} \equiv \overset{\frown}{CE}.$$

De aici :

$$m(\overset{\frown}{AC}) = 360° - m(\overset{\frown}{AEC}) = 360° - m(\overset{\frown}{AE} + \overset{\frown}{EC}) = 360° - m(\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{BF}) = 360° - m(\overset{\frown}{FBD}) = m(\overset{\frown}{DF}).$$

Din faptul că $\overset{\frown}{AC} \equiv \overset{\frown}{DF}$ rezultă că dr. BC este paralelă cu dr. AF. Deoarece două unghiuri de același fel cu laturile respectiv paralele sînt congruente, rezultă :

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DEF; \ \sphericalangle BCD \equiv \sphericalangle EFA; \ \sphericalangle CDE \equiv \sphericalangle FAB.$$

CAPITOLUL II

Relații metrice

§.1. Teorema lui THALES. Teorema fundamentală a asemănării. Triunghiuri asemenea. Cazuri de asemănare.

II.1.1[M]. În interiorul unui segment AB de lungime 55 cm se consideră un punct C astfel ca $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{5}{6}$.

Să se determine lungimile segmentelor AC și BC.

R. Folosind proprietatea ; dacă $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, atunci $\dfrac{a}{a+b} = \dfrac{c}{c+d}$, unde a, b, c, d sînt numere reale nenule, putem scrie :

$$\frac{AC}{AC+BC} = \frac{5}{5+6} = \frac{5}{11},$$

de unde, cum $AC + BC = AB = 55$ cm, rezultă $AC = 25$ cm. De aici rezultă imediat măsura lui $[BC]$:

$$BC = AB - AC = 55 \text{ cm} - 25 \text{ cm} = 30 \text{ cm}.$$

II.1.2[M]. Aceeași problemă ca precedenta, cu singura deosebire că se presupune C situat pe dreapta AB, dar nu în interiorul segmentului AB. Unde va fi C : de aceeași parte a lui A ca și B sau de cealaltă parte?

R. Deoarece :
$$\frac{AC}{BC} = \frac{5}{6} < 1$$

rezultă $AC < BC$, adică punctul C se află situat pe dreapta AB pe semidreapta opusă lui $[AB$. Din : $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{5}{6}$, obținem $\dfrac{AC}{BC-AC} = \dfrac{5}{6-5}$ și rezultă $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{5}{1}$, de unde $AC = 55 \text{ cm} \cdot 5 = 275$ cm, iar $BC = AC + AB = 275 \text{ cm} + 55 \text{ cm} = 330$ cm.

II.1.3[M]. Se dau trei puncte coliniare A, B, C astfel încît C este situat între A și B. Să se exprime fiecare din rapoartele $x = \dfrac{CA}{CB}$,

$y = \dfrac{CA}{AB}$ și $z = \dfrac{CB}{AB}$ în funcție de celelalte două

R. Putem scrie succesiv:

$$x = \frac{CA}{CB} = \frac{\frac{CA}{AB} \cdot \frac{AB}{1}}{CB} = \frac{\frac{CA}{AB}}{\frac{CB}{AB}} = \frac{y}{z};$$

$$y = \frac{CA}{AB} = \frac{CA \cdot CB \cdot \frac{1}{CB}}{AB} = \frac{CA \cdot CB}{CB \cdot AB} = x \cdot z;$$

$$z = \frac{CB}{AB} = \frac{CB \cdot CA}{CA \cdot AB} = \frac{CB}{CA} \cdot \frac{CA}{AB} = \frac{1}{\frac{CA}{CB}} \cdot \frac{CA}{AB} = \frac{1}{x} \cdot y = \frac{y}{x}.$$

Observație: Odată găsit $x = \dfrac{y}{z}$, celelalte, y, z, se deduc imediat din acesta: $y = zx$ și $z = \dfrac{y}{x}$.

II.1.4^M. Dacă A, B, C, D sînt coliniare, dacă C și D sînt situate între A și B și dacă $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{DA}{DB}$, să se demonstreze că $C = D$.

R. Folosind o proporție derivată avem:

$$\frac{CB + CA}{CB} = \frac{DA + DB}{DB}$$

de unde $\dfrac{AB}{CB} = \dfrac{AB}{DB}$, deci $[CB] \equiv [DB]$; cum $C \in [BA$ și $D \in [BA$ se obține $C = D$.

II.1.5^M. Să se arate că trei drepte paralele determină pe două secante segmente proporționale.

R. Fie d_1, d_2, d_3 trei drepte paralele și α_1, α_2 două secante. Să notăm cu A, B, C punctele de intersecție dintre α_1 și d_1, d_2, d_3, respectiv cu A_1, B_1, C_1 punctele de intersecție dintre α_2 și cele trei drepte. Fie o paralelă $B'C'$ la secanta α_2 ce conține punctul A și intersectează pe d_2 în B' și pe d_3 în C'. Atunci $[AB'] \equiv [A_1B_1]$, $[B'C'] \equiv [B_1C_1]$. Deoarece dr. $BB' \parallel$ dr. CC', rezultă:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB'}{B'C'}$$

de unde $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A_1B_1}{B_1C_1}$, sau încă $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$.

II.1.6^M. Fie M și N puncte pe laturile $[AB]$, $[AC]$ ale unui triunghi astfel încît dr. $MN \parallel$ dr. BC. Dacă $AM/AB = 3/11$, să se calculeze AN/NC.

R. Din teorema lui THALES, ținînd cont că dr. $MN \parallel$ dr. BC, se obține:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

de unde :

$$\frac{3}{11}=\frac{AN}{AC}; \quad \frac{AN}{AC-AN}=\frac{3}{11-3}; \quad \frac{3}{8}=\frac{AN}{NC}.$$

II.1.7ᴹ. Fiind date trei segmente de măsură u, v, w, să se construiască un segment de lungime x astfel încît $x=\frac{uv}{w}$. Caz particular: $u=6$ cm, $v=10$ cm, $w=15$ cm.

R. Să considerăm un unghi XOY. Pe semidreapta $[OX$ „purtăm" segmentele de măsură $OX_1=w$, $X_1X_2=u$. Pe semidreapta $[OY$ „purtăm" segmentul de măsură $OY_1=v$. Din X_2 considerăm o paralelă la dr. X_1Y_1 şi notăm cu Y_2 punctul de intersecţie al paralelei cu dr. OY. Fie $Y_1Y_2=x$ şi, aplicînd teorema lui THALES:

$$\frac{OX_1}{X_1X_2}=\frac{OY_1}{Y_1Y_2}$$

de unde, înlocuind cu valorile atribuite mai sus segmentelor, rezultă:

$$\frac{w}{u}=\frac{v}{x}$$

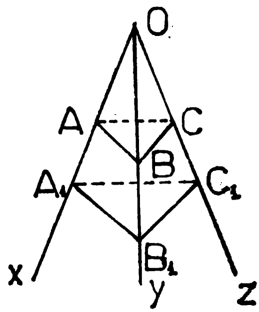
adică $x=\frac{uv}{w}$.

Pentru $u=6$ cm, $v=10$ cm şi $w=15$ cm, se obţine:

$$x=\frac{6\cdot 10}{15}=4 \text{ (cm)}.$$

II.1.8ᴹ. Se consideră trei drepte Ox, Oy, Oz, punctele A, A_1 pe dr. Ox şi punctele B pe dr. Oy şi C pe dr. Oz.

Paralela prin A_1 la dr. AB intersectează dr. Oy în B_1, iar paralela la dr. BC prin B_1 intersectează dr. Oz în C_1. Să se demonstreze că dr. $C_1A_1 \parallel$ dr. CA.



R. Vom aplica teorema lui THALES în triunghiurile OA_1B_1 şi OB_1C_1. Obţinem:

$$\frac{OA}{OA_1}=\frac{OB}{OB_1}$$

respectiv:

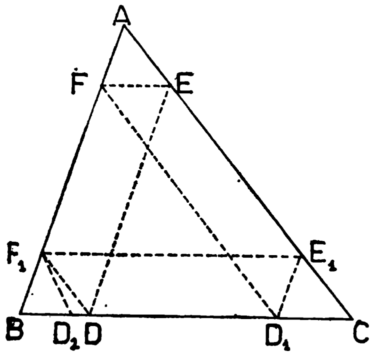
$$\frac{OB}{OB_1}=\frac{OC}{OC_1}.$$

Din cele două relaţii rezultă:

$$\frac{OA}{OA_1}=\frac{OC}{OC_1},$$

deci dr. $AC \parallel$ dr. A_1C_1.

II.1.9[M]. Se consideră un punct D pe latura $[BC]$ a triunghiului ABC. Paralela prin D la dr. AB „taie" dr. AC în E, paralela la dr. BC prin E „taie" dr. AB în F, etc. Să se arate că după un anumit număr de astfel de construcţii „ne întoarcem" în D. Care este acest număr?



R. Construim paralele: dr. $DE \parallel$ dr. BA, dr. $EF \parallel$ dr. CB, dr. $FD_1 \parallel$ dr. AC, dr. $D_1E_1 \parallel$ dr. BA, dr. $E_1F_1 \parallel$ dr. CB şi dr. $F_1D_2 \parallel$ dr. AC.

Demonstrăm că punctul D_2 coincide cu punctul D: din dr. $DE \parallel$ dr. BA rezultă pe baza teoremei lui THALES: $\frac{BD}{DC} = \frac{AE}{EC}$. Analog din dr. $EF \parallel$ dr. BC rezultă $\frac{AE}{EC} = \frac{AF}{FB}$, iar din dr. $FD_1 \parallel$ dr. AC rezultă $\frac{AF}{FB} = \frac{CD_1}{D_1B}$.

Din dr. $D_1E_1 \parallel$ dr. AB rezultă $\frac{CD_1}{D_1B} = \frac{CE_1}{E_1A}$, apoi din dr $E_1F_1 \parallel$ dr. CB se obţine $\frac{CE_1}{E_1A} = \frac{BF_1}{F_1A}$, şi, în final, din dr. $F_1D_2 \parallel$ dr. AC avem $\frac{BF_1}{F_1A} = \frac{BD_2}{D_2C}$.

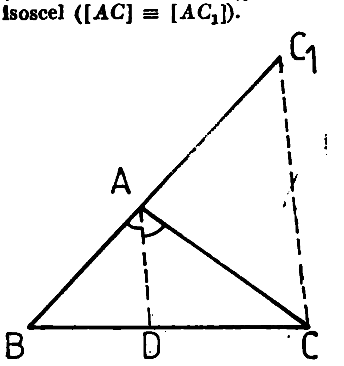
Am obţinut astfel, şirul de rapoarte egale:

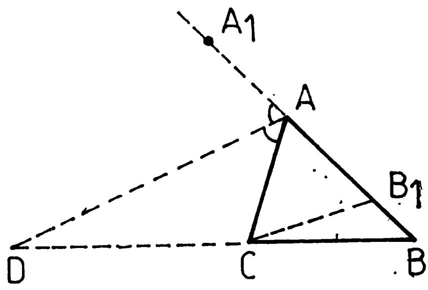
$$\frac{BD}{BC} = \frac{AE}{EC} = \frac{AF}{FB} = \frac{CD_1}{D_1B} = \frac{CE_1}{E_1A} = \frac{BF_1}{F_1A} = \frac{BD_2}{D_2C}$$

de unde rezultă $\frac{BD}{DC} = \frac{BD_2}{D_2C}$, ceea ce este posibil numai dacă $D_2 = D$. Deci, după 6 construcţii „ne întoarcem" în punctul D.

II.1.10[M]. (*Teorema bisectoarei*). Fie D punctul în care bisectoarea unghiului A al unui triunghi ABC intersectează latura opusă BC. Să se demonstreze că $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$. Aceeaşi problemă pentru „bisectoarea exterioară".

R. Vom demonstra enunţul ştiind că punctul D este situat în interiorul segmentului BC. Construim dr. $CC_1 \parallel$ dr. AD, unde C_1 este punctul de intersecţie al paralelei cu dr. AB. Arătăm că $[AC] \equiv [AC_1]$. Într-adevăr, cum dr. $AD \parallel$ dr. CC_1, rezultă $\widehat{BAD} \equiv \widehat{BC_1C}$ şi $\widehat{DAC} \equiv \widehat{ACC_1}$ şi cum $\widehat{BAD} \equiv \widehat{DAC}$ ($[AD$ bisectoare), obţinem $\widehat{BC_1C} \equiv \widehat{ACC_1}$, adică triunghiul AC_1C este isoscel ($[AC] \equiv [AC_1]$).





Din teorema lui THALES aplicată triunghiului BC_1C, rezultă:

$$\frac{BA}{AC_1}=\frac{BD}{DC}$$

de unde, înlocuind pe AC_1 cu AC, se obține:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}.$$

Dacă D este punctul în care bisectoarea exterioară a unghiului A intersectează dr.BC, atunci avem sau $AB < AC$ sau $AB > AC$ (triunghiul ABC nu poate fi isoscel pentru a avea loc teorema).

Fie $AB > AC$. Fie pe dr.AB un punct B_1 astfel încît $[AB_1] \equiv [AC]$. Atunci:

$$m(\widehat{A_1AC}) = m(\widehat{ACB_1}) + m(\widehat{AB_1C}) = 2m(\widehat{ACB_1}),$$

deoarece $\measuredangle A_1AC$ este unghi exterior triunghiului isoscel ACB_1.

De aici se obține $m(\widehat{ACB_1}) = \dfrac{m(\widehat{A_1AC})}{2} = m(\widehat{DAC})$, adică dr.$AD \parallel$ dr.CB_1. Din teorema lui THALES aplicată triunghiului BAD se obține:

$$\frac{BD}{CD}=\frac{BA}{B_1A}$$

sau, echivalent:

$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}.$$

Raționamentul este analog dacă $AC > AB$.

II.1.11. Pe dreapta Ox se consideră punctele A, B, C, iar pe dreapta Oy punctele A', B', C'. Dacă dr.$AB' \parallel$ dr.BA' și dr.$BC' \parallel$ dr. CB', să se demonstreze că dr.$AC' \parallel$ dr.CA'.

R. Deoarece dr. $AB' \parallel$ dr. $A'B$, rezultă:

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OB'}{OA'}.$$

iar din dr.$BC' \parallel$ dr.CB' se obține:

$$\frac{OB}{OC}=\frac{OC'}{OB'}.$$

Dacă înmulțim cele două egalități membru cu membru, se obține:

$$\frac{OA}{OB}\,\frac{OB}{OC}=\frac{OB'}{OA'}\cdot\frac{OC'}{OB'},$$

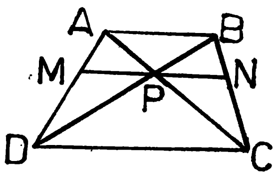
sau:

$$\frac{OA}{OC}=\frac{OC'}{OA'}$$

de unde, conform teoremei reciproce a lui THALES rezultă dr.$AC' \parallel$ dr.$A'C$.

II.1.12^M. Prin punctul P de intersecţie a diagonalelor unui trapez se consideră o paralelă la baze. Ea intersectează laturile neparalele în M şi N. Demonstraţi că P este mijlocul segmentului $[MN]$.

R. Deoarece dr.$MP \parallel$ dr.AB, triunghiurile ADB şi MDP sînt asemenea şi deci :



$$\frac{DM}{DA}=\frac{DP}{DB}=\frac{MP}{AB}. \quad (1)$$

Analog, din dr.$PN \parallel$ dr.AB, triunghiurile CAB şi CPN sînt asemenea şi :

$$\frac{CP}{CA}=\frac{CN}{CB}=\frac{PN}{AB}. \quad (2)$$

Aplicînd teorema lui THALES triunghiului DBC, în care dr.$PN \parallel$ dr.DC, se obţine :

$$\frac{CN}{CB}=\frac{DP}{DB}. \quad (3)$$

Ţinînd cont de relaţiile (1) şi (2), egalitatea (3) implică :

$$\frac{MP}{AB}=\frac{NP}{AB}$$

de unde $[MP] \equiv [NP]$ ceea ce arată că punctul P este mijlocul lui $[MN]$.

II.1.13^M. Să se demonstreze că dacă paralela MN la bazele AD şi BC ale unui trapez ($M \in (AB), N \in (DC)$) „taie" diagonalele BD în T şi AC în S, atunci $[MT] \equiv [SN]$.

R. Cum dr.$MT \parallel$ dr.AD, asemănarea triunghiurilor ABD şi MBT ne dă :

$$\frac{BM}{BA}=\frac{BT}{BD}=\frac{MT}{AD}. \quad (1)$$

Analog, deoarece dr.$SN \parallel$ dr.AD, triunghiurile CAD şi CSN sînt asemenea şi scriind raportul de asemănare avem :

$$\frac{CS}{CA}=\frac{CN}{CD}=\frac{SN}{AD}. \quad (2)$$

Din teorema lui THALES în triunghiul BDC, în raport cu paralela TN avem :

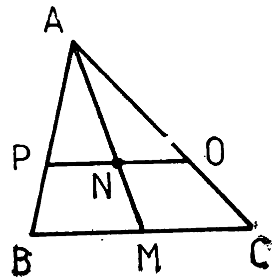
$$\frac{BT}{BD}=\frac{CN}{CD}.$$

Ţinînd cont de (1) şi (2), din ultima relaţie rezultă :

$$\frac{MT}{AD}=\frac{SN}{AD}$$

adică $[MT] \equiv [SN]$.

II.1.14[M]. Într-un triunghi ABC orice segment PO paralel cu dreapta BC($P \in$ dr. AB, $O \in$ dr. AC) este împărţit de mediana AM (M fiind mijlocul segmentului BC) în două segmente congruente.



R. Fie N punctul de intersecţie dintre dr.PO şi dr.AM. Deoarece dr.$PN \parallel$ dr.BM şi dr.$NO \parallel$ dr.MC, putem scrie:

$$\frac{AN}{AM} = \frac{AP}{AB} = \frac{PN}{BM} \tag{1}$$

şi:

$$\frac{AN}{AM} = \frac{AO}{AC} = \frac{NO}{MC} \tag{2}$$

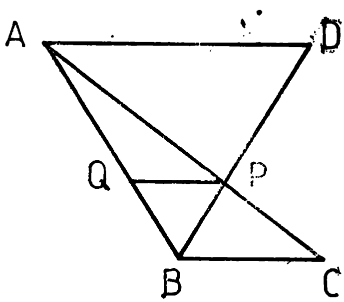
Din (1) şi (2) rezultă:

$$\frac{PN}{BM} = \frac{NO}{MC}$$

deci, cum $[BM] \equiv [MC]$, se obţine $[PN] \equiv [NO]$.

II.1.15[M]. În figura alăturată $AD = a$ şi $BC = b$, iar (AD) şi (BC) sînt două segmente paralele. DB şi AC se „taie" în P. Segmentul $[PQ]$, unde $Q \in [AB]$, este paralel cu $[AD]$.

Să se exprime $[PQ]$ în funcţie de a şi b.



R. Deoarece dr.$PQ \parallel$ dr.AD, din asemănarea triunghiurilor BAD şi BQP avem:

$$\frac{PQ}{a} = \frac{BQ}{AB} \tag{1}$$

Analog, cum dr.$PQ \parallel$ dr.BC, rezultă:

$$\frac{PQ}{b} = \frac{AQ}{AB}. \tag{2}$$

Dar $AQ = AB - BQ$, astfel că relaţia (2) devine:

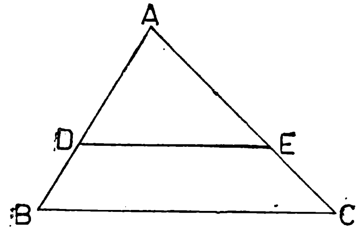
$$\frac{PQ}{b} = 1 - \frac{BQ}{AB} = 1 - \frac{PQ}{a}$$

sau, echivalent:

$$a \cdot PQ + b \cdot PQ = ab$$

de unde rezultă $PQ = \dfrac{ab}{a + b}$.

II.1.16[M]. Un triunghi ABC are măsurile laturilor $AB = 9$ cm, $BC = 15$ cm şi $AC = 18$ cm. Se ia pe latura $[AB]$ un punct D astfel ca $AD = 6$ cm; paralela prin D la dr.BC taie dr.AC în E. Să se calculeze lungimile laturilor triunghiului ADE.



R. În triunghiul ABC, dr.DE este paralelă cu dr.BC. Conform teoremei fundamentale a asemănării, avem :

$$\Delta\, ADE \sim \Delta\, ABC$$

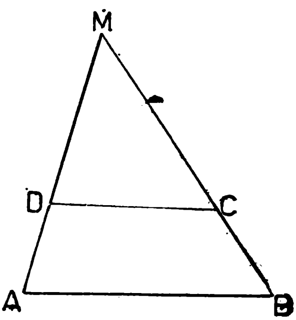
și deci:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{EA}{CA}.$$

Înlocuind datele din problemă obținem : $\frac{6}{9} = \frac{DE}{15} = \frac{AE}{18}$, de unde $DE = \frac{6 \cdot 15}{9}$, sau $DE = 10$ cm ; $AE = \frac{6 \cdot 18}{9}$, sau $AE = 12$ cm.

II.1.17^{M}. Laturile neparalele BC, AD ale unui trapez $ABCD$ se intersectează în M. Să se calculeze lungimile segmentelor $[MA]$, $[MB]$, $[MC]$, $[MD]$ în funcție de lungimile laturilor trapezului (se va presupune că baza mare este $[AB]$). Aplicații numerice : a) $AB = 20$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 15$ cm, $DA = 8$ cm ; b) $AB = 20$ cm, $BC = 3$ cm, $CD = 15$ cm, $DA = 9$ cm.

R. Prin ,,prelungirea'' laturilor neparalele s-a format triunghiul MAB; dr.DC fiind paralelă cu dr.AB, putem aplica teorema fundamentală a asemănării și avem :



$$\frac{MD}{MA} = \frac{DC}{AB} = \frac{CM}{BM}$$

de unde obținem : $\frac{MD}{MD + DA} = \frac{DC}{AB}$, sau:

$$MD \cdot AB = MD \cdot DC + DA \cdot DC,$$

de unde $MD = \frac{DA \cdot DC}{AB - DC}$.

Cum $MA = MD + DA$, se obține $MA = \frac{DA \cdot DC}{AB - DC} + DA$, sau încă $MA = \frac{AB \cdot DA}{AB - DC}$.

Din $\frac{DC}{AB} = \frac{CM}{BC + CM}$ se obține $AB \cdot CM = BC \cdot DC + DC \cdot CM$, de unde $CM = \frac{BC \cdot DC}{AB - DC}$.

Cum $MB = M\ \ + CB$, rezultă $MB = \frac{BC \cdot DC}{AB - DC} + CB$, sau încă $MB = \frac{AB \cdot CB}{AB - DC}$.

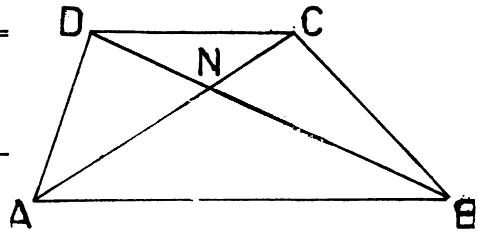
II.1.18^{M}. Diagonalele unui trapez $ABCD$ cu bazele $[AB]$, $[CD]$ se intersectează în N. Să se calculeze, în funcție de lungimile bazelor și diagonalelor trapezului, lungimile segmentelor $[NA]$, $[NB]$, $[NC]$, $[ND]$.

R. Considerăm triunghiul NAB care este asemenea cu triunghiul NCD. Din proporționalitatea laturilor obținem :

$$\frac{NA}{NC} = \frac{NB}{ND} = \frac{AB}{CD}.$$

Din proporţia $\frac{NA}{NC} = \frac{AB}{CD}$ rezultă : $\frac{NA}{NA + NC} =$ $= \frac{AB}{AB + CD}$, de unde $NA = \frac{AC \cdot AB}{AB + CD}$.

Avem $NC = AC - NA$, adică $NC = AC -$ $- \frac{AC \cdot AB}{AB + CD}$ de unde : $NC = \frac{AC \cdot CD}{AB + CD}$.



Din proporţia $\frac{NB}{ND} = \frac{AB}{CD}$ rezultă : $\frac{NB}{NB + ND} = \frac{AB}{AB + CD}$, de unde $NB = \frac{BD \cdot AB}{AB + CD}$.

Atunci $ND = BD - NB$, deci $ND = BD - \frac{BD \cdot AB}{AB + CD}$, de unde $ND = \frac{BD \cdot CD}{AB + CD}$.

II.1.19[M]. Se consideră o dreaptă d şi pe ea punctele $A_0, A_1, A_2, \ldots$ aşa încît $A_0A_1 = A_1A_2 = \ldots = 1$ cm. Se pun în evidenţă perpendicularele $a_0, a_1, a_2, \ldots$ pe d în punctele $A_0, A_1, A_2, \ldots$.

Se consideră punctele B_1 şi C_1 pe a_1 şi punctele B_2 şi C_2 pe a_2, toate în acelaşi semiplan determinat de d, astfel ca $A_1B_1 = 2$ cm, $A_1C_1 = 7$ cm, $A_2B_2 = 6$ cm, $A_2C_2 = 3$ cm. Să se precizeze poziţia punctului M de intersecţie al dreptelor B_1B_2, C_1C_2, calculînd A_0N şi NM, unde N este piciorul perpendicularei din M pe d.

R. Să calculăm măsura segmentelor $[B_1C_1]$ şi $[B_2C_2]$. Avem :

$$B_1C_1 = A_1C_1 - A_1B_1 = 5 \text{ cm};$$

$$B_2C_2 = A_2B_2 - A_2C_2 = 3 \text{ cm}.$$

Cum dr.$B_1C_1 \parallel$ dr.B_2C_2 rezultă :

$$\frac{MC_1}{MC_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{5}{3}. \quad (1)$$

Pe de altă parte :

$$\frac{MC_1}{MC_2} = \frac{NA_1}{NA_2} = \frac{5}{3}, \quad (2)$$

şi deci, cum $NA_2 = A_1A_2 - A_1N$, rezultă $NA_1 = \frac{5}{8}$ şi :

$$A_0N = A_0A_1 + A_1N = 1 + \frac{5}{8} = \frac{13}{8}.$$

Să notăm cu Q punctul de intersecţie al dreptelor A_1C_2 şi NM. Cum dr.$QM \parallel$ dr.A_1C_1 şi dr.$QN \parallel$ dr.A_2C_2 rezultă :

$$\frac{QM}{A_1C_1} = \frac{MC_2}{C_1C_2} = \frac{3}{8}$$

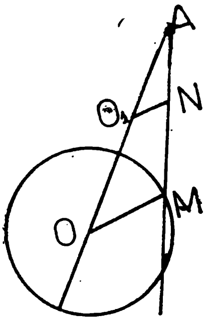
şi :

$$\frac{QN}{A_2C_2} = \frac{NA_1}{A_1A_2},$$

de unde se obține $QM = \frac{21}{8}$ și $QN = \frac{15}{8}$. Deci :

$$MN = MQ + QN = \frac{36}{8} = \frac{9}{2} = 4{,}5\,(\text{cm}).$$

II.1.20[M]. Se consideră un cerc „fix" de centru O și un punct „fix" A. Se ia un punct M pe acest cerc și se consideră un punct N pe $[AM$ astfel ca $\frac{AN}{AM} = k$. Care este mulțimea de puncte N cînd M „parcurge" cercul dat, k rămînînd și el „constant".



R. Fie dr.$NO_1 \parallel$ dr.MO cu $O_1 \in$ dr.AO. Atunci triunghiurile AO_1N și AOM sînt asemenea și rezultă :

$$\frac{O_1N}{OM} = \frac{AN}{AM} = k.$$

Deci, $O_1N = k \cdot OM =$ constant (M se „află" pe cerc, deci $[OM]$ este raza cercului). Atunci punctul O_1 este „fix" și, cînd M „descrie" cercul de centru O și rază $[OM]$, punctul N „descrie" cercul de centru O_1 și rază $k \cdot [OM]$.

II.1.21[M,PO]. Se consideră două cercuri neconcentrice, de raze neegale. a) Găsiți un punct A și un număr k astfel încît mulțimea de puncte din problema anterioară, relativ la unul din cercuri, la A și la k, să fie tocmai celălalt cerc.

b) Ce se întîmplă dacă razele cercurilor ar fi egale?

c) În cazurile în care cercurile ar fi exterioare, tangente exterioare, secante sau tangente interioare, precizați „poziția" punctului de la a).

R. a) Un astfel de punct A se găsește la intersecția tangentei exterioare comune cu linia centrelor celor două cercuri, iar $k = \frac{AO_1}{AO}$.

b) Dacă razele celor două cercuri sînt congruente, rezultă $O_1N = OM$ ($k = 1$). Dacă cercurile sînt tangente exterioare, A este mijlocul segmentului $[MN]$, dacă cercurile sînt secante problema este imposibilă, iar dacă cercurile sînt exterioare, A este mijlocul segmentelor $[OO_1]$ și $[MN]$.

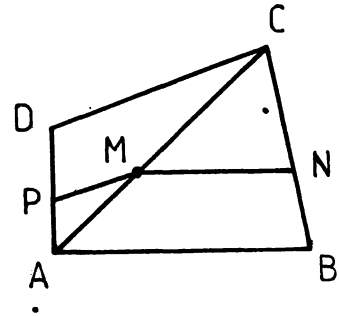
c) Dacă cercurile sînt exterioare, punctul A se află la intersecția liniei centrelor cu tangenta comună exterioară ; cînd cercurile sînt tangente exterioare punctul A se află la intersecția liniei centrelor cu tangenta comună exterioară; dacă cercurile sînt secante, punctul A se află la intersecția liniei centrelor cu tangenta comună exterioară, iar în cazul cercurilor tangente interior, punctul A este punctul de tangență.

II.1.22[M]. Se consideră un patrulater convex $ABCD$ și un punct M interior segmentului $[AC]$. Paralela prin M la dr.AB „taie" dr.BC în N, iar paralela prin M la dr.CD „taie" dr.AD în P. Să se demonstreze că $\frac{MN}{AB} + \frac{MP}{CD} = 1$.

R. În triunghiul ABC avem dr. $MN \parallel$ dr. AB. Conform teoremei fundamentale a asemănării avem :

$$\Delta CMN \sim \Delta CAB \text{ și deci: }$$

$$\frac{CM}{CA} = \frac{MN}{AB}.$$



La fel avem în triunghiul ACD: dr.$PM \parallel$ dr.DC; rezultă că triunghiul AMP este asemenea cu triunghiul ACD, de unde :

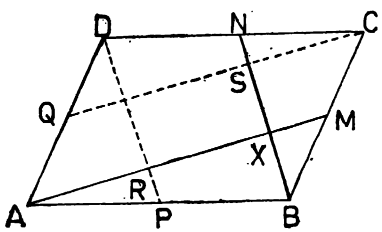
$$\frac{AM}{AC} = \frac{MP}{CD}.$$

Adunînd relațiile de mai sus, membru cu membru obținem :

$$\frac{CM}{CA} + \frac{AM}{AC} = \frac{MN}{AB} + \frac{MP}{CD}.$$

Deoarece $CM + MA = CA$, membrul stîng este egal cu 1, deci : $\frac{MN}{AB} + \frac{MP}{CD} = 1$.

II.1.23^M. În paralelogramul $ABCD$ unim punctul A cu mijlocul lui $[BC]$ și punctul B cu mijlocul lui $[CD]$; cele două drepte se „taie" în X. Care este valoarea raportului $\frac{XA}{XM}$, unde punctul M este mijlocul lui $[BC]$?



R. Notăm cu N, P și Q mijloacele laturilor $[DC]$, $[AB]$ și respectiv $[AD]$. Fie R punctul de intersecție a segmentelor $[AM]$ și $]DP]$ iar S punctul de intersecție a segmentelor $[BN]$ și $[CQ]$. Observăm că patrulaterul $PBND$ este paralelogram, avînd laturile opuse $[PB]$ și $[DN]$ paralele și congruente. De aici rezultă că și dr.BN este paralelă cu dr.PD.

La fel, din faptul că $AMCQ$ este paralelogram, rezultă că dr. $AM \parallel$ dr. CQ.

În triunghiul ABX avem: dr.$PR \parallel$ dr.BX, deci $\frac{AP}{AB} = \frac{AR}{AX} = \frac{PR}{BX} = \frac{1}{2}$, adică $AR = RX$.

Din congruența triunghiurilor BCS și DAR rezultă că $[AR]$ și $[CS]$ sînt congruente. În triunghiul BCS, dr.XM este paralelă cu dr.CS, deci $\frac{BM}{BC} = \frac{MX}{CS} = \frac{1}{2}$, de unde rezultă $XM = \frac{CS}{2}$. Dar am arătat că $CS = AR$, deci avem $XM = \frac{AR}{2}$. Atunci :

$$\frac{XA}{XM} = \frac{2AR}{\frac{AR}{2}} = 2AR \cdot \frac{2}{AR} = 4.$$

Deci, în final se obține $\frac{XA}{XM} = 4$.

II.1.24. Să se enunțe cîte un caz de asemănare :

a) pentru triunghiurile isoscele ; b) pentru triunghiurile dreptunghice ; c) pentru triunghiurile echilaterale ; d) pentru triunghiurile dreptunghice isoscele.

R. a) Este suficient ca triunghiurile să aibă un unghi congruent, acel unghi fiind în ambele triunghiuri un unghi de la bază sau unghiul de la vîrf;

b) Este suficient ca triunghiurile să aibă un unghi ascuţit congruent;

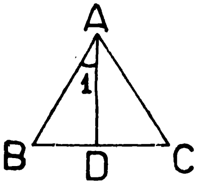
c), d) Toate triunghiurile de acest fel sînt asemenea.

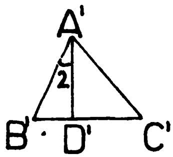
II.1.25[PP]. Fie ABC şi $A'B'C'$ două triunghiuri asemenea. Să se demonstreze că următoarele rapoarte sînt egale cu raportul lor de asemănare:

a) raportul a două înălţimi omoloage;

b) raportul a două bisectoare omoloage;

c) raportul a două mediane omoloage.





R. a) Fie $[AD]$ şi $[A'D']$ două înălţimi omoloage.
Triunghiurile ABD şi $A'B'D'$ vor fi asemenea deoarece $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $\hat{D} \equiv \hat{D}'$, şi deci:

$$\frac{AD}{A'D'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

b) Dacă $[AD$ şi $[A'D'$ sînt bisectoare, aceleaşi triunghiuri sînt asemenea căci $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ şi $\hat{1} \equiv \hat{2}$, deci:

$$\frac{AD}{A'D'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

c) Dacă $[AD]$ şi $[A'D']$ sînt mediane, atunci $BD = \frac{BC}{2}$ şi $B'D' = \frac{B'C'}{2}$, deci:

$$\frac{BD}{B'D'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

Triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ fiind asemenea, avem:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

Ţinînd seama de ultima proporţie se deduce că:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BD}{B'D'}.$$

Triunghiurile ABD şi $A'B'D'$ sînt asemenea căci au două laturi proporţionale şi unghiul format de ele congruent, deci:

$$\frac{AD}{A'D'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

II.1.26[PP]. a) Să se demonstreze că diagonalele unui trapez se împart în părţi proporţionale cu bazele trapezului. b) Este posibil ca diagonalele să se împartă în părţi congruente?

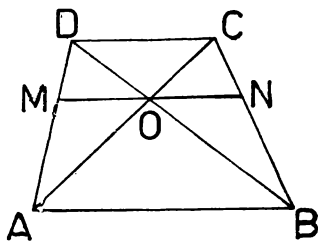
R. a) Fie $ABCD$ un trapez, în care dr. $AB \parallel$ dr.CD și O punctul de intersecție al diagonalelor $[AC]$ și $[BD]$. Deoarece triunghiurile OAB și OCD sînt asemenea, putem scrie :

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB}. \tag{1}$$

b) Dacă $[OC] \equiv [OA]$ și $[OB] \equiv [OD]$, primele două rapoarte sînt egale cu 1, dec $\frac{CD}{AB} = 1$, iar de aici $CD = AB$. Trapezul devine în acest caz paralelogram.

II.1.27[PO]**.** Prin intersecția diagonalelor unui trapez se duce o paralelă la baze; fie M și N intersecția ei cu laturile neparalele. Să se demonstreze că $MN = \dfrac{2ab}{a+b}$, a și b fiind lungimile bazelor trapezului.

R. Fie O punctul de intersecție al diagonalelor. Deoarece triunghiurile DOM și DAB sînt asemenea, avem :



$$\frac{MO}{AB} = \frac{DO}{DB}. \tag{1}$$

Analog, din asemănarea triunghiurilor DOC și BOA rezultă :

$$\frac{DO}{OB} = \frac{DC}{AB}$$

sau, echivalent :

$$\frac{DO}{DB} = \frac{DC}{DC + AB} = \frac{b}{a+b}. \tag{2}$$

Înlocuind în (1) raportul al doilea prin expresia sa dată de (2) și pe AB cu a, se obține :

$$\frac{MO}{a} = \frac{b}{a+b}$$

sau $MO = \dfrac{ab}{a+b}$.

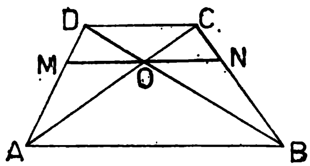
Observație. Dacă notăm MN cu x, putem scrie :

$$\frac{1}{x} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}.$$

Numărul x se numește media armonică a numerelor a și b. Relația stabilită aici ne dă un mijloc de a afla pe cale grafică media armonică a două numere a și b : se construiește un trapez cu bazele de lungime a și b, și prin intersecția diagonalelor sale se duce paralela la baze. Segmentul $[MN]$ al acestei paralele situat în interiorul trapezului are ca lungime numărul căutat. Avem și relațiile :

$$x > b; \; x < a.$$

II.1.28. a) Fie $ABCD$ un trapez în care dr.$AB \parallel$ dr.CD, A opus lui C. Prin intersecția O a diagonalelor sale se duce paralela la dr.AB; fie M și N intersecțiile ei cu laturile neparalele, $M \in$ dr.AD. Să se demonstreze că $[OM] \equiv [ON]$. b) Să se demonstreze că această proprietate este caracteristică pentru trapez.



R. a) Din triunghiurile asemenea DAB și DMO se obține:

$$\frac{MO}{AB}=\frac{DO}{DB} \qquad (1)$$

iar din triunghiurile asemenea CAB și CON avem:

$$\frac{ON}{AB}=\frac{CO}{CA}. \qquad (2)$$

Dacă $ABCD$ este trapez, triunghiurile DOC și AOB sînt asemenea, căci unghiurile lor sînt congruente două cîte două, deci:

$$\frac{DO}{OB}=\frac{CO}{OA}$$

sau, echivalent:

$$\frac{DO}{DB}=\frac{CO}{CA}.$$

Din această ultimă relație și (1), (2), rezultă:

$$\frac{MO}{AB}=\frac{ON}{AB},$$

deci $[MO] \equiv [ON]$.

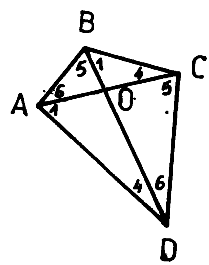
b) Presupunem că $[OM] \equiv [ON]$ și va trebui să arătăm că dr.$AB \parallel$ dr.CD. Primul raport din (1) este egal cu primul raport din (2), deci $\frac{DO}{DB}=\frac{CO}{CA}$, sau, echivalent, $\frac{DO}{OB}=\frac{CO}{OA}$. Această ultimă proporție arată că triunghiurile DOC și AOB au două laturi proporționale; unghiurile lor din O fiind congruente, triunghiurile sînt asemenea. Se obține deci $\widehat{DCA} \equiv \widehat{CAB}$, de unde dr.$DC \parallel$ dr.AB, ceea ce arată că $ABCD$ este trapez.

II.1.29^M. Dați o demonstrație folosind asemănarea, teoremei: „Dacă într-un patrulater convex diagonalele formează cu două laturi opuse unghiuri congruente, atunci unghiurile opuse ale patrulaterului sînt suplementare”.

R. Fie $ABCD$ patrulaterul convex și O punctul de intersecție al diagonalelor.

Triunghiurile AOD și BOC sînt asemenea deoarece $\hat{A}_1 \equiv \hat{B}_1$ și $\widehat{AOD} \equiv \widehat{BOC}$. Rezultă:

$$\frac{OD}{OC}=\frac{OA}{OB}$$



iar $\hat{D}_4 \equiv \hat{C}_4$. Conform celor arătate și faptului că $\widehat{AOB} \equiv \widehat{DOC}$, triunghiurile COD și AOB sînt asemenea, de unde $\hat{A}_6 \equiv \hat{D}_6$ și $\hat{B}_5 \equiv \hat{C}_5$. Se obține în final:

$$m(\hat{A}) + m(\hat{C}) = m(\hat{A}_1) + m(\hat{A}_6) + m(\hat{C}) = m(\hat{B}_1) + m(\hat{D}_6) + m(\hat{C}) = 180°.$$

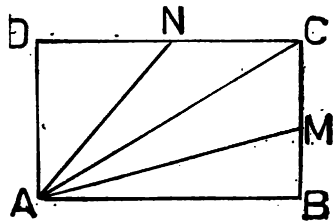
II.1.30. Fie ABC un triunghi în care $AB^2 = AC \cdot BC$ (de exemplu $AC = 4$, $AB = 6$, $BC=9$). Pe latura $[AB]$ se consideră un segment $[BM]$ congruent cu $[AC]$ și pe latura $[BC]$ un segment $[BN]$ congruent cu $[AB]$. a) Să se arate că triunghiurile MNB și ABC sînt asemenea; b) Cîte elemente (laturi și unghiuri) ale triunghiului BMN sînt congruente cu cîte un element al triunghiului ABC?

R. a) Relația dată se poate pune sub forma $\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{AB}$. Înlocuind aici AC prin BM și AB prin BN se obține o proporție care arată că triunghiurile au două laturi proporționale. Deoarece unghiul $\hat{B}$ este comun, a) rezultă imediat.

b) Două laturi și toate unghiurile, deci cinci elemente. Acesta este numărul maxim de elemente congruente pe care le pot avea două triunghiuri necongruente; dacă au șase elemente congruente, triunghiurile sînt congruente.

II.1.31. Bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BAC$ și $\sphericalangle CAD$ ale dreptunghiului $ABCD$ intersectează laturile $[BC]$ și $[CD]$ în M, respectiv N. Să se arate că:

$$\frac{MB}{MC} + \frac{ND}{NC} > 1.$$



R. În triunghiul ACD, $AD + DC > AC$, deci:

$$\frac{AD + DC}{AC} > 1. \qquad (1)$$

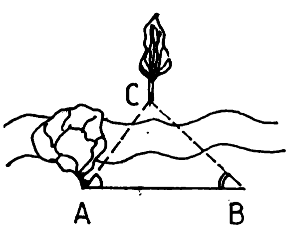
Aplicînd teorema bisectoarei în triunghiurile ABC și ADC obținem:

$$\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}; \quad \frac{ND}{NC} = \frac{AD}{AC},$$

de unde, prin însumare, rezultă:

$$\frac{MB}{MC} + \frac{ND}{NC} = \frac{AB + AD}{AC} > 1.$$

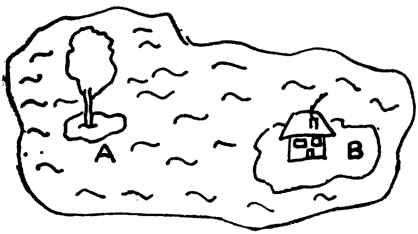
II.1.32^M. Determinați, prin măsurători, distanța de la A la C, unde C este inaccesibil.



R. Alegem un punct „accesibil" B și măsurăm distanța AB. Măsurăm cu ajutorul grafometrului unghiurile $\widehat{BAC}$ respectiv $\widehat{CBA}$.

Desenăm (în caiet) un triunghi $A'B'C'$ care să aibă $\hat{A}' \equiv \hat{A}$ și $\hat{B}' \equiv \hat{B}$. Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ fiind asemenea, din raportul $\frac{A'B'}{AB} = a$($[AB]$ măsurat pe teren, $[A'B']$ măsurat în caiet), putem calcula și raportul $\frac{A'C'}{AC}$, dacă măsurăm $[A'C']$ în caiet și ținem cont de faptul că și $\frac{A'C'}{AC} = a$.

II.1.33[M]. Determinați prin măsurători distanța între punctele A și B, fără a „vizita" insulele.



R. Pe terenul accesibil căutăm un punct C coliniar cu punctele A și B și un punct oarecare D. Măsurăm distanța dintre punctele C și D. La fel, măsurăm unghiurile BCD, CDB și CDA.

Construim (pe o foaie, în caiet) un triunghi $A'C'D'$ cu latura $[D'C']$ evident măsurabilă și cu unghiurile $\widehat{A'C'D'} \equiv \widehat{ACD}$, $\widehat{C'D'A'} \equiv \widehat{CDA}$. În interiorul triunghiului $A'C'D'$ construim unghiul $\widehat{C'D'B'} \equiv \widehat{CDB}$. Măsurăm segmentul $A'B'$ și calculăm distanța dintre cele două puncte inaccesibile din proporția:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'},$$

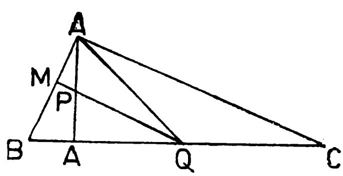
deoarece perechile de triunghiuri ACD și $A'C'D'$, respectiv BCD și $B'C'D'$ sînt asemenea.

II.1.34. Fie A' piciorul înălțimii duse din vîrful A al triunghiului dreptunghic ABC. Pe $[AA']$ și $[A'C]$ se consideră punctele P și Q. Demonstrați că dr.$BP \perp$ dr.AQ dacă și numai dacă:

$$\frac{AP}{AA'} = \frac{QC}{A'C}.$$

R. 1°) Vom demonstra:

Din dr.$BP \perp$ dr.AQ rezultă $\frac{AP}{AA'} = \frac{QC}{A'C}$.



Fie $\{M\} =$ dr.$AB \cap$ dr.PQ. Deoarece $[BP]$ și $[AA']$ sînt înălțimi în triunghiul ABQ, P este ortocentrul acestui triunghi, deci dr.$MQ \perp$ dr.AB.

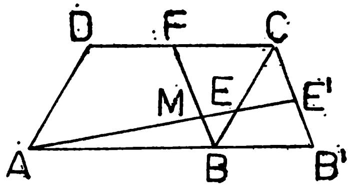
Rezultă că dr.$MQ \parallel$ dr.AC și, din teorema lui Thales aplicată triunghiului $AA'C$, $\frac{AP}{AA'} = \frac{QC}{A'C}$.

2°) Vom demonstra: Din $\frac{AP}{AA'} = \frac{QC}{A'C}$ rezultă dr.$BP \perp$ dr.AQ. Deoarece $\frac{AP}{AA'} = \frac{QC}{A'C}$, conform teoremei reciproce a lui Thales obținem dr.$PQ \parallel$ dr.AC, deci dr.$QP \perp$ dr.AB. În triunghiul ABQ, $[AP]$ și $[QP]$ sînt așadar înălțimi, prin urmare $[BP]$ este de asemenea înălțime, adică dr.$BP \perp$ dr.AQ.

II.1.35. Pe laturile $[BC]$ și $[CD]$ ale paralelogramului $ABCD$ se consideră respectiv punctele E și F astfel încît:

$$\frac{EB}{EC} = K_1 \text{ și } \frac{FC}{FD} = K_2.$$

Fie M intersecția dreptelor AE și BF. Să se determine valoarea raportului $\frac{AM}{ME}$.



R. Ducem dr.$CB' \parallel$ dr.BF ($B' \in$ dr.AB) şi fie $\{E'\} =$ $=$ dr.$CB' \cap$ dr.AE. Avem:

$$\frac{AM}{ME} = \frac{AM}{ME'} \cdot \frac{ME'}{ME}.$$

Din asemănarea triunghiurilor AMB şi $AE'B'$ respectiv MBE şi $E'CE$, obţinem:

$$\frac{AM}{ME'} = \frac{AB}{BB'}\ ;\ \frac{EE'}{EM} = \frac{CE}{EB},$$

deci:

$$\frac{AM}{ME'} = \frac{DC}{FC} = \frac{K_2+1}{K_2}\ ;\ \frac{ME'}{EM} = \frac{K_1+1}{K_1},$$

de unde rezultă:

$$\frac{AM}{ME} = \frac{(K_1+1)(K_2+1)}{K_1 \cdot K_2};$$

II.1.34. Se dă un triunghi ABC cu m$(\hat{A}) = 90°$ şi $AB > AC$, înscris într-un cerc de centru O. În A se duce o tangentă la cerc care intersectează dr.BC în P. Fără a folosi teorema lui PITAGORA, să se arate că:

$$[PO]^2 = [PA]^2 + [OA]^2.$$

R. Deoarece m$(\hat{A}) = 90°$, ipotenuza BC este diametru deci $O \in$ dr.BC şi $[OB] \equiv [OA] \equiv [OC]$. Avem $\widehat{CAP} \equiv \widehat{PBA}$ şi $\widehat{APC} \equiv \widehat{APB}$ de unde rezultă că triunghiurile ACP şi BAP sînt asemenea, deci:

$$PA^2 = PC \cdot PB.$$

Dar:

$$PC = PO - OC = PO - OA$$

şi:

$$PB = PO + OA.$$

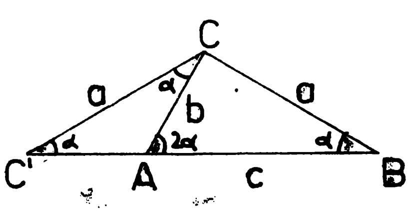
Avem deci:

$$PA^2 = PC \cdot PB = (PO - OA)(PO + OA) = PO^2 - OA^2$$

iar de aici

$$PO^2 = PA^2 + OA^2.$$

II.1.35. Demonstraţi că într-un triunghi ABC, m$(\hat{A}) = 2$m$(\hat{B})$ dacă şi numai dacă $a^2 = b(b+c)$.



R. 1°) Demonstrăm că dacă m$(\hat{A}) = 2$m$(\hat{B})$ rezultă $a^2 = b(b+c)$. „Prelungim" segmentul $[BA]$ cu segmentul $[AC'] \equiv [AC]$. Fie a, b, c lungimile laturilor triunghiului şi $\alpha =$ m$(\widehat{ABC})$. Deoarece unghiul BAC este exterior triunghiului isoscel $C'AC$ şi m$(\hat{A}) = 2\alpha$, rezultă că m$(\widehat{ACC'}) =$ m$(\widehat{AC'C}) = \alpha$. Prin urmare triunghiul BCC' este isoscel şi $CC' = a$.

Din asemănarea triunghiurilor BCC' și $C'AC$ deducem : $\frac{BC}{CA} = \frac{BC'}{CC'}$ sau $\frac{a}{b} = \frac{b+c}{a}$

de unde $a^2 = b(b+c)$.

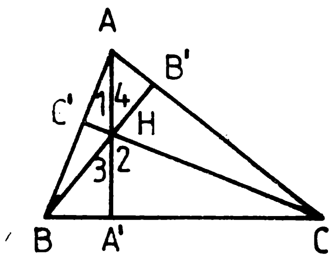
2°) Demonstrăm că dacă $a^2 = b(b+c)$ rezultă $m(\hat{A}) = 2m(\hat{B})$.

Cu notațiile de la 1°), relația $a^2 = b(b+c)$ se transcrie :

$$\frac{CC'}{AC'} = \frac{BC'}{CC'}.$$

Cum $\sphericalangle C'$ este unghiul comun triunghiurilor BCC' și CAC', rezultă că $\Delta BCC'$ este asemenea cu triunghiul CAC', de unde rezultă $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C'CA$ (1). Notînd cu β măsura unghiului $C'CA$, din (1) rezultă $m(\hat{B}) = \beta$. De asemenea, $m(\hat{A}) = 2\beta$ ca unghi exterior triunghiului isoscel CAC', prin urmare $m(\hat{A}) = 2m(\hat{B})$.

II.1.36^{PO}. Să se demonstreze că în orice triunghi ortocentrul împarte înălțimile în două părți, astfel încît produsul măsurilor acestor segmente nu depinde de înălțimea aleasă.



R. Triunghiurile $AC'H$ și $A'HC$ sînt asemenea (sînt triunghiuri dreptunghice și au $\hat{H}_1 \equiv \hat{H}_2$ opuse la vîrf) Deci $\frac{AH}{HC} = \frac{C'H}{HA'}$ adică $AH \cdot HA' = HC \cdot HC'$. Dar și triunghiurile $AB'H$ și $BA'H$ sînt asemenea (triunghiuri dreptunghice cu $\hat{H}_3 \equiv \hat{H}_4$ opuse la vîrf) Avem :

$$\frac{AH}{HB} = \frac{B'H}{HA'}$$

adică $AH \cdot HA' = HB \cdot HB'$.

Din $AH \cdot HA' = HC \cdot HC'$ și $AH \cdot HA' = HB \cdot HB'$ rezultă :

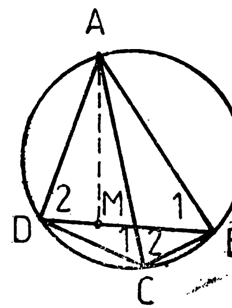
$$AH \cdot HA' = CH \cdot HC' = HB \cdot HB'.$$

II.1.37^{M}. Se consideră un patrulater inscriptibil $ABCD$. a) Să se construiască un punct M de aceeași parte a dreptei AD ca și B și C, astfel ca triunghiurile AMD și ABC să fie asemenea.

b) Descoperiți pe figură alte două triunghiuri asemenea.

c) Demonstrați că $AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD$.

R. a) Cum $\hat{D}_2 \equiv \hat{C}_2$, construind $\widehat{DAM} \equiv \widehat{CAB}$ rezultă că triunghiurile DAM și ABC sînt asemenea :



b) Deoarece $\hat{B}_1 \equiv \hat{C}_1$ și $\widehat{BAM} \equiv \widehat{DAC}$, triunghiurile AMB și ADC sînt asemenea.

c) Din asemănarea triunghiurilor ABC și DAM rezultă :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{DM}{BC} \qquad (1)$$

iar din asemănarea lui ADC cu AMB rezultă :

$$\frac{MB}{DC} = \frac{AB}{AC} \qquad (2)$$

Din relaţiile (1) şi (2) se mai poate scrie :

$$DM \cdot AC = BC \cdot AD$$

şi :

$$MB \cdot AC = DC \cdot AB$$

Prin adunarea membru cu membru a ultimelor două relaţii se obţine :

$$AC \cdot BD = BC \cdot AD + DC \cdot AB.$$

Observaţie : Această relaţie este denumită ca teorema lui PTOLEMEU.

II.1.38. În triunghiul ABC considerăm dreptele AA' şi BB' concurente în G. ($A' \in [BC]$, $B' \in [AC]$).

a) Dacă $\frac{A'G}{AG} = \frac{B'G}{BG} = \frac{1}{2}$, atunci cele două drepte considerate sînt mediane.

b) Dacă una din dreptele considerate este mediană şi determină pe cealaltă două segmente al căror raport este $\frac{1}{2}$, atunci şi cea de a doua dreaptă este mediană.

R. a) Considerăm punctele A_2 şi B_2 mijloacele segmentelor AG şi BG. Patrulaterul $A'B'A_2B_2$ are diagonalele împărţite în părţi egale, deci este un paralelogram, de unde rezultă că : dr $A_2B_2 \parallel$ dr. $A'B'$ şi $A_2B_2 = A'B'$. În triunghiul AGB segmentul A_2B_2 este linie mijlocie, deci :

$$\text{dr. } A_2B_2 \parallel \text{dr. } AB \text{ şi } A_2B_2 = \frac{AB}{2} \qquad (2)$$

Comparînd (1) cu (2) deducem :

$$\text{dr. } A'B' \parallel \text{dr. } AB \text{ şi } A'B' = \frac{AB}{2}. \qquad (3)$$

Deoarece $A'B'$ îndeplineşte relaţiile (3) în triunghiul ABC, rezultă că $[A'B']$ este linie mijlocie în acest triunghi, deci $[AA']$ şi $[BB']$ sînt mediane.

b) Demonstraţia acestei afirmaţii o facem prin reducere la absurd. Presupunem deci că $[BB']$ nu este mediană. Fie atunci $[BB_1]$ mediana laturii AC, care intersectează mediana AA' în G_1. În acest caz avem $\frac{B_1G_1}{BG_1} = \frac{1}{2}$. Cum din ipoteză $B'G\ BG = \frac{1}{2}$ rezultă că :

$\frac{B_1G_1}{BG_1} = \frac{B'G}{BG}$. Conform reciprocei teoremei lui THALES în triunghiul BB_1B', vom avea dr. $GG_1 \parallel$ dr. B_1B' ceea ce este imposibil, deoarece dreptele G_1G şi B_1B' se intersectează în punctul A.

Înseamnă că presupunerea făcută este falsă, prin urmare $[BB']$ este mediană a triunghiului ABF.

II.1.39PO. Fie triunghiul ABC şi $D \in (BC)$. Să se arate că :

$$BC \cdot AD < AC \cdot BD + AB \cdot CD.$$

R. Notăm $\frac{DC}{BD} = K$, (1). Construim pe $[AD$ punctul E astfel încît : dr.$AB \parallel$dr.CE şi să notăm $\frac{DE}{AD} = K$. (2).

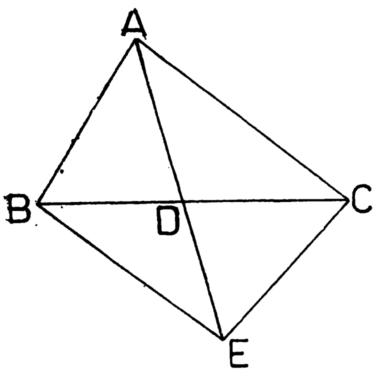
Avem $\Delta ABD \sim \Delta CDE$, de unde $\frac{AB}{CE} = \frac{1}{K}$ sau $CE = K \cdot AB$, (3). În triunghiul ACE avem :

$$AE < AC + CE \qquad (4),$$

iar $AE = AD + DE$ şi înlocuind în (4) obţinem :

$$AD + DE < AC + CE. \qquad (5)$$

Ţinînd seama de (2) şi (3) şi înlocuind în (5), avem :



$$AD + K \cdot AD < AC + K \cdot AB \qquad (6)$$

Înlocuind pe (1) în (6), se obţine :

$$AD \cdot \left(1 + \frac{DC}{DB}\right) < AC + \frac{DC}{BD} \cdot AB$$

de unde :

$$AD \cdot BC < AC \cdot BD + AB \cdot DC \qquad (7)$$

Observaţii : 1°) Dacă AD este mediană, relaţia (7) devine $AD < \frac{AB + AC}{2}$; 2°) Dacă AD este bisectoare, relaţia (7) devine : $AD < \frac{2AC \cdot AB}{AB + AC}$.

II.1.40PO. În triunghiul ABC, dreptunghic în A, $[EF]$ este linie mijlocie ($E \in$ dr. AB, $F \in$ dr. AC), iar D este piciorul înălţimii din A.

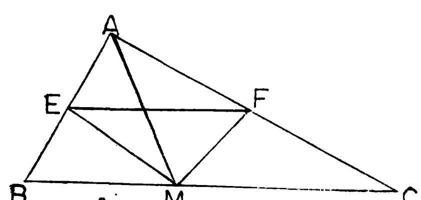
a) Demonstraţi că triunghiurile EDF şi ABC sînt asemenea ;

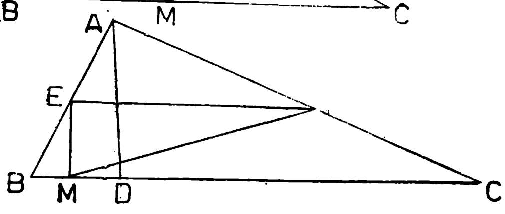
b) Găsiţi un alt punct M ce aparţine ipotenuzei, astfel încît triunghiurile EMF şi ABC să fie asemenea.

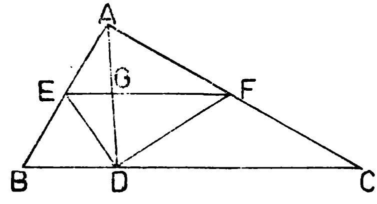
R. a) Triunghiul ABC este dreptunghic în A. Pentru ca asemănarea cerută să aibă loc trebuie ca unul din unghiurile triunghiului EDF să fie drept. Notăm dr. $EF \cap$ dr. $AD = \{G\}$.

Deoarece $[EF]$ este linie mijlocie rezultă că dr. $EF \parallel$ dr. BC şi cum dr. $AD \perp$ dr. BC vom avea dr. $AD \perp$ dr. EF, deci unghiurile EGD şi FGD sînt drepte. Aşadar triunghiul EGD este dreptunghic în G şi unghiul FED nu este drept.

De asemenea, triunghiul FGD este dreptunghic în G şi unghiul EFD nu este drept. Rămîne să demonstrăm că triunghiul EDF are unghiul drept în D.







Într-adevăr, deoarece $[EF]$ e linie mijlocie, E şi F sînt mijloacele laturilor AB şi respectiv AC; în triunghiurile dreptunghice ADB şi ADC, $[DE]$ şi $[DF]$ sînt respectiv mediane; cum mediana corespunzătoare ipotenuzei într-un triunghi dreptunghic are măsura cît jumătate din măsura ipotenuzei, rezultă că triunghiurile EAD şi FAD sînt isoscele cu baza AD; din această afirmaţie avem:

$$\sphericalangle EDA \equiv \sphericalangle EAD; \ \sphericalangle ADF \equiv \sphericalangle FAD$$

de unde:

$$m(\widehat{EDF}) = m(\widehat{EDA}) + m(\widehat{ADF}) = m(\widehat{EAD}) + m(\widehat{FAD}) = m(\widehat{EAF}) = 90^{\circ}.$$

Deci triunghiul EDF este dreptunghic în D. Dreptele paralele EF şi BC formează cu secanta AB, $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle AEF$ (1), ca unghiuri corespondente.

Deoarece triunghiul AED este isoscel şi $[EG]$ este înălţime, avem că $[EG$ este şi bisectoare şi deci $\sphericalangle AEF \equiv \sphericalangle FED$ (2). Din (1) şi (2) avem $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle FED$, de unde se obţine că triunghiurile dreptunghice ABC şi DEF sînt asemenea.

b) Să notăm cu M punctul ce aparţine ipotenuzei BC.

Pentru ca triunghiurile EMF şi ABC să fie asemenea, dat fiind că triunghiul ABC este dreptunghic, trebuie ca şi triunghiul EMF să fie dreptunghic. Vom studia cazul cînd triunghiul EMF este dreptunghic în E.
Aceasta înseamnă că dr. $EM \perp$ dr. EF, şi cum dr. $EF \parallel$ dr. BC rezultă că dr. $EM \perp$ dr. BC, şi deci dr. $EM \parallel$ dr. AD.

În triunghiul ABD, $[EM]$ este linie mijlocie, şi cum $EM = \frac{1}{2} AD$, înseamnă că o catetă din triunghiul dreptunghic EMF are măsura jumătate din măsura înălţimii corespunzătoare ipotenuzei triunghiului dreptunghic ABC şi nu jumătate din măsura unei catete a acestui triunghi. În acest fel, triunghiul EMF, dreptunghic în E, nu este asemenea cu triunghiul dreptunghic ABC.

Analog se demonstrează că triunghiul EMF, dreptunghic în F, nu este asemenea cu triunghiul dreptunghic ABC.

Deci, pentru ca triunghiul EMF să fie asemenea cu triunghiul dreptunghic ABC, trebuie ca să fie dreptunghic în M. S-a arătat la punctul a) că $M = D$. Această situaţie a corespuns faptului că unghiul FED al triunghiului dreptunghic EDF este congruent cu unghiul ABC al triunghiului dreptunghic ABC.

Să studiem cazul cînd unghiul FEM al triunghiului dreptunghic EMF este congruent cu unghiul ACB al triunghiului dreptunghic ABC, adică cu unghiul AFE al triunghiului dreptunghic AEF care este asemenea cu triunghiul ABC.

În acest caz se observă că dr. $EM \parallel$ dr. AC. Cum E este mijlocul lui $[AB]$, rezultă că $[EM]$ este linie mijlocie în triunghiul ABC şi deci M este mijlocul lui $[BC]$. Atunci $[MF]$ este de asemenea linie mijlocie în acelaşi triunghi şi este paralelă cu AB.
Avem, astfel, din condiţia de paralelism:

$$\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle FME$$

şi deci, triunghiurile ABC şi MFE sînt asemenea, iar M, mijlocul ipotenuzei BC, este punctul cerut.

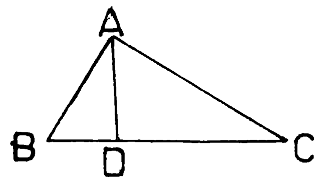
Deoarece nu se mai poate face altă alegere a unghiurilor celor două triunghiuri, singurele puncte căutate sînt piciorul înălţimii din A şi mijlocul ipotenuzei.

§2. Teorema catetei, teorema înălțimii; Teorema lui PITAGORA

II.2.1. Deduceți teorema lui PITAGORA din teorema catetei.

R. Fie ABC un triunghi dreptunghic ($m(\hat{A}) = 90°$) și D piciorul perpendicularei din A pe dr. BC.

Teorema catetei ne dă:



$$AB^2 = BD \cdot BC;\ AC^2 = DC \cdot BC.$$

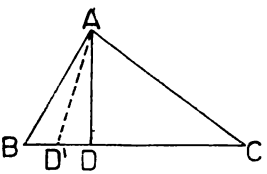
Prin adunarea celor două relații se obține:

$$AB^2 + AC^2 = BD \cdot BC + CD \cdot BC =$$
$$= BC(BD + DC) = BC^2.$$

II.2.2PO. Fie ABC un triunghi dreptunghic și D un punct al ipotenuzei. Propozițiile următoare sînt reciproce ale teoremei catetei și teoremei înălțimii:

a) Dacă $AB^2 = BC \cdot BD$, AD este înălțime;
b) Dacă $AD^2 = DB \cdot DC$, AD este înălțime.

Aceste reciproce sînt adevărate?



R. a) Relația dată, pusă sub forma:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB},$$

arată că triunghiurile ABD și ABC au două laturi proporționale, unghiul B format de ele este comun, deci triunghiurile sînt asemenea. Rezultă că unghiurile lor sînt congruente două cîte două. Triunghiul ABC avînd un unghi drept, triunghiul ABD are de asemenea un unghi drept, deci dr. $AD \perp$ dr. BC, $[AD]$ este înălțime. Reciproca este adevărată.

b) Propoziția nu este adevărată. Fie $[AD]$ mediană; atunci:

$$DB = DC = \frac{BC}{2},$$

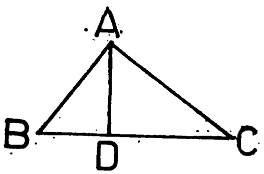
deci $DB \cdot DC = \dfrac{BC^2}{4}$.

Pe de altă parte, într-un triunghi dreptunghic mediana are măsura jumătate din măsura ipotenuzei, deci $AD = \dfrac{BC}{2}$, de unde $AD^2 = \dfrac{BC^2}{4}$. Aceste două relații arată că $AD^2 = DB \cdot DC$, dar $[AD]$ nu este înălțime în mod obligatoriu, ci poate fi mediană.

II.2.3. Ipotenuza unui triunghi dreptunghic este de 13 cm, iar una din catete este de 5 cm. Aflaţi cît are cealaltă catetă, înălţimea şi proiecţiile catetelor pe ipotenuză.

R. Fie ABC triunghiul dreptunghic considerat cu $m(\hat{A}) = 90°$ şi fie D piciorul perpendicularei din A pe dr. BC.

Fie $BC = 13$ cm şi $AB = 5$ cm; măsura catetei AC o aflăm aplicînd teorema lui PITAGORA în triunghiul ABC:



$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 13^2 - 5^2 = 12^2$$

deci $AC = 12$ cm. Vom calcula proiecţiile BD şi DC ale catetelor pe ipotenuză aplicînd teorema catetei. Avem:

$$BC \cdot BD = AB^2$$

sau:

$$BD = \frac{AB^2}{BC} = \frac{25}{13}$$

iar:

$$DC = BC - BD = 13 - \frac{25}{13} = \frac{144}{13}.$$

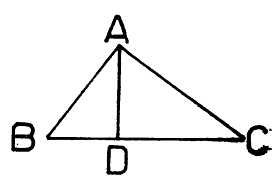
Înălţimea $[AD]$ o determinăm aplicînd teorema înălţimii:

$$AD^2 = BD \cdot DC = \frac{25}{13} \cdot \frac{144}{13}$$

de unde se obţine $AD = \sqrt{\frac{25}{13} \cdot \frac{144}{13}} = \frac{60}{13}$ (cm).

II.2.4^M. O catetă a unui triunghi dreptunghic are măsura 10 cm, iar înălţimea 8 cm. Aflaţi celelalte elemente ale triunghiului.

R. Fie ABC triunghiul considerat cu $m(\hat{A}) = 90°$ şi fie D piciorul perpendicularei din A pe dr. BC. Teorema lui PITAGORA aplicată în triunghiul ABD (am presupus $AB = 10$ cm) ne dă:



$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = 6 \text{ cm}.$$

Din teorema înălţimii vom obţine pe DC:

$$DC = \frac{AD^2}{BD} = \frac{32}{3} \text{ cm}$$

de unde rezultă $BC = BD + DC = \frac{50}{3}$ (cm).

În continuare, cateta AC se obţine aplicînd teorema lui PITAGORA în triunghiul ABC:

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \frac{40}{3} \text{ cm}.$$

II.2.5. Înălţimea unui triunghi dreptunghic este de 24 cm, iar proiecţia unei catete pe ipotenuză de 10 cm. Aflaţi celelalte elemente.

R. Fie ABC triunghiul dreptunghic considerat ($m(\hat{A}) = 90°$) şi notînd cu D piciorul perpendicularei din A pe dr. BC fie $[BD]$ proiecţia catetei AB pe BC, $BD = 10$ cm. Aplicînd teorema lui PITAGORA în triunghiul ABD se obţine :

$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = 26 \text{ cm}.$$

Din teorema catetei rezultă măsura ipotenuzei BC :

$$BC = \frac{AB^2}{BD} = \frac{676}{10} \text{ cm},$$

iar $DC = BC - BD = \frac{576}{10}$ cm.

Mărimea catetei AC o obţinem cu teorema catetei :

$$AC = \sqrt{BC \cdot DC} = \frac{624}{10} \text{ (cm)}.$$

II.2.6^{M}. Ipotenuza unui triunghi dreptunghic este de 50 cm, iar proiecţia unei catete pe ea este de 5 cm. Aflaţi celelalte elemente.

R. Fie ABC triunghiul considerat ($m(\hat{A}) = 90°$) şi D piciorul perpendicularei din A pe BC. Fie $BD = 5$ cm; din teorema catetei putem afla măsura lui AB:

$$AB^2 = BC \cdot BD = 50 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 250 \text{ cm}^2$$

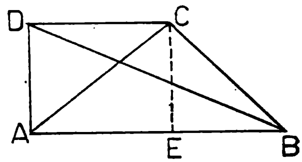
deci $AB = 5\sqrt{10}$ cm. Deoarece $DC = BC - BD = 45$ cm, măsura înălţimii AD rezultă din teorema înălţimii :

$$AD = \sqrt{BD \cdot DC} = 15 \text{ cm}$$

iar mărimea catetei AC este :

$$AC = \sqrt{BC \cdot DC} = 15\sqrt{10} \text{ cm}.$$

II.2.7^{M}. Într-un trapez dreptunghic, bazele au 10 cm şi 7 cm, iar latura neparalelă perpendiculară pe ele este de 4 cm. Calculaţi lungimile celeilalte laturi şi ale diagonalelor.



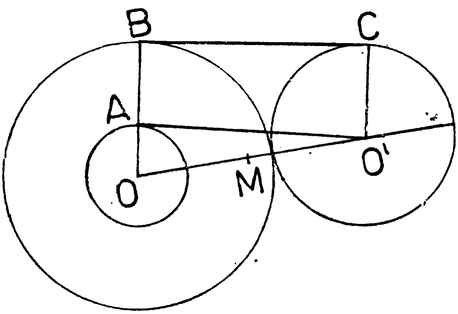
R. Lungimea laturei oblice o aflăm din triunghiul dreptunghic CEB, cu ajutorul teoremei lui PITAGORA :

$$BC^2 = CE^2 + EB^2$$

de unde se obţine $BC = 5$ cm.

Diagonala BD este ipotenuza triunghiului dreptunghic DAB, deci $BD^2 = AB^2 + AD^2 = 2\sqrt{29}$ cm.

Diagonala AC este ipotenuza triunghiului dreptunghic ADC, de unde : $AC^2 = AD^2 + DC^2 = \sqrt{65}$ cm.



II.28^{M}. Calculaţi lungimea „tangentelor" comune a două cercuri tangente exterioare de raze R şi r.

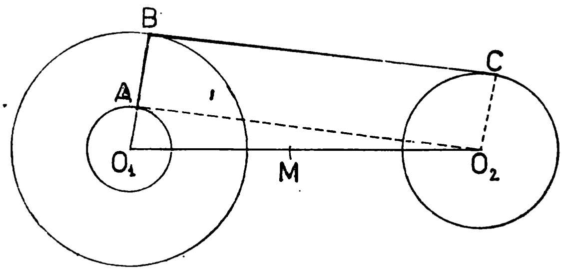
R. „Tangenta comună" a celor două cercuri tangente exterioare este egală cu tangenta construită la cercul $\mathcal{C}(O, R - r)$ din punctul exterior O'.

În triunghiul dreptunghic OAO' avem :

$$O'A^2 = O'O^2 - OA^2 = \sqrt{(R + r)^2 - (R - r)^2} = 2\sqrt{Rr}.$$

II.2.9[M]. Calculaţi lungimile „tangentelor" comune exterioare şi interioare a două cercuri cu razele 8 cm şi 5 cm, dacă distanţa dintre centrele lor este de 20 cm.

R. Construim tangenta comună exterioară a celor două cercuri exterioare:



„Tangenta comună" exterioară, are măsura egală cu a „tangentei" construită la cercul $\mathcal{C}(O_1, R - r)$ din punctul O_2, deci tangenta exterioară $[BC] \equiv [AO_2]$. Din triunghiul dreptunghic O_1AO_2 avem:

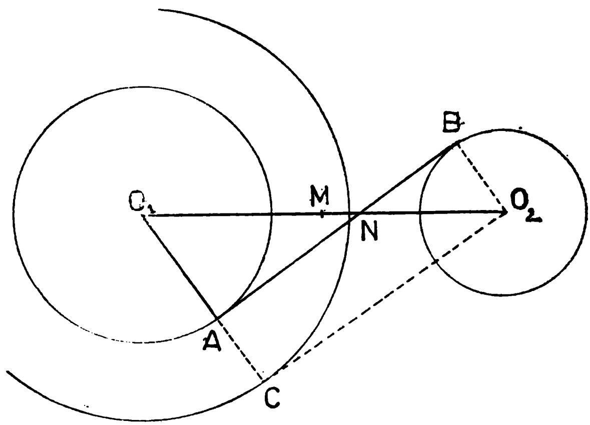
$$AO_2 = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1A^2} = \sqrt{20^2 - 3^2} = \sqrt{391} \text{ (cm).}$$

Construim „tangenta" comună interioară celor două cercuri exterioare:

„Tangenta" comună interioară, este egală cu tangenta construită la cercul $\mathcal{C}(O_1, R + r)$ din punctul O_2 deci măsura lui $[CO_2]$ este egală cu măsura tangentei comune interioare $[AB]$.

Din triunghiul dreptunghic O_1CO_2 avem:

$$CO_2 = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1C^2} = \sqrt{20^2 - 13^2} = \sqrt{231} \text{ (cm).}$$



II.2.10. Există triunghiuri dreptunghice în care ipotenuza este medie proporţională între înălţime şi suma catetelor?

R. Notăm: a măsura ipotenuzei, h măsura înălţimii, b şi c măsurile catetelor. Presupunem că există triunghiuri care îndeplinesc ipoteza dată: $a^2 = h(b + c)$ (1). Se ştie că $h = \frac{bc}{a}$. Cu aceasta, relaţia (1) devine succesiv:

$$a^2 = \frac{bc}{a}(b + c), \; a^3 = bc(b + c), \text{ sau } a^2 \cdot a = bc(b + c) \; (2).$$

Se ştie din teorema lui PITAGORA:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Relaţia (2) se scrie succesiv:

$$(b^2 + c^2)a = bc(b + c), \; b^2a + c^2a = b^2c + bc^2, \; b^2a - b^2c = bc^2 - ac^2, \; b^2(a - c) = c^2(b - a). \quad (3)$$

La orice triunghi dreptunghic se ştie că măsura ipotenuzei este mai mare decît măsura oricărei catete. Avem deci: $a > c$ adică $a - c > 0$, adică $a - c$ este un număr pozitiv. Asemănător, $a > b$ adică $a - b > 0$, adică $a - b$ este un număr pozitiv ceea ce implică $b - a$ este un număr negativ şi deci relaţia (3) este falsă.

Deci nu există triunghiuri dreptunghice care să îndeplinească condiţia dată.

II.2.11. Există triunghiuri dreptunghice la care ipotenuza este medie proporţională între înălţime şi diferenţa catetelor?

R. Procedăm ca în problema anterioară. Presupunem că există triunghiuri dreptunghice care îndeplinesc ipoteza dată.

Avem două cazuri :

a) $b > c$. Relaţia din ipoteză este : $a^2 = h(b - c)$. Aceasta devine pînă la urmă $b^2(b - a) = c^2(b + a)$ care este falsă, deoarece $b - a$ este număr negativ.

Deci nu există triunghiuri dreptunghice în ipoteza dată.

b) $c > b$. Avem $a^2 = h(c - b)$ care devine $b^2(a + c) = c^2(b - a)$, din nou falsă, căci $b - a$ este număr negativ şi deci nu există triunghiuri dreptunghice în condiţia dată.

II.2.12. Triunghiul ABC este un triunghi isoscel. $[AB] \equiv [AC]$ iar unghiul BAC are $120°$.

Calculaţi măsura laturii BC ştiind că :

a) $AB = 10$ cm; b) $AB = 2\sqrt{3}$ cm; c) a cm.

R. a) Deoarece avem un unghi de $120°$ într-un triunghi isoscel calculăm măsura unuia din unghiurile sale congruente :

$$m(\widehat{ABC}) = \frac{180° - m(\widehat{BAC})}{2} = \frac{180° - 120°}{2} = \frac{60°}{2} = 30°.$$

Util ar fi să avem un triunghi dreptunghic cu un unghi de $30°$. Pentru aceasta vom nota cu D piciorul înălţimii din A. Am obţinut triunghiul ABD dreptunghic în D cu unghiul din B de $30°$ şi ipotenuza AB de 10 cm. Cateta opusă unghiului de $30°$ este AD deci $AD = \frac{AB}{2} = \frac{10}{2} = 5$ (cm).

Calculăm măsura catetei BD cu ajutorul teoremei lui Pitagora :

$$BD^2 = AB^2 - AD^2;\ BD^2 = 10^2 - 5^2;\ BD^2 = 75;\ BD = \sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3} \text{ (cm.)}$$

Deoarece ABC este un triunghi isoscel înălţimea AD este şi mediană, adică D este mijlocul laturii BC. Aşadar, $BD = DC$ şi deci $BC = 2 \cdot BD = 2 \cdot 5\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$ (cm). b) $BC = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6$ (cm) ; c) $a\sqrt{3}$ cm.

II.2.13. ABC este un triunghi isoscel. $[AB] \equiv [AC]$ iar unghiul BAC are $30°$. Calculaţi măsura segmentului $[BC]$ în cazul cînd a) $AB = 10$ cm; b) $AB = 2\sqrt{5}$ cm; c) $AB = m$ cm.

R. a) Notăm cu D piciorul înălţimii din B. În triunghiul dreptunghic ABD avem un unghi de $30°$, deci $BD = 5$ cm. Calculăm cu ajutorul teoremei lui Pitagora măsura lui $[AD]$:

$$AD^2 = AB^2 - BD^2;\ AD^2 = 75;\ AD = 5\sqrt{3} \text{ cm.}$$

Calculăm măsura lui $[DC]$:

$$DC = AC - AD = 10 - 5\sqrt{3},\ (AC = AB = 10 \text{ cm}).$$

În triunghiul dreptunghic BDC aplicăm teorema lui Pitagora pentru calculul măsurii segmentului $[BC]$:

$$BC^2 = BD^2 + DC^2;\ BC^2 = 25 + (10 - 5\sqrt{3})^2;$$

$$BC^2 = 25 + 100 - 100\sqrt{3} + 75;\ BC^2 = 200 - 100\sqrt{3};$$

$BC^2 = 100(2 - \sqrt{3})$; $BC = \sqrt{100 \cdot (2 - \sqrt{3})} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 10\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ (cm);

b) $2\sqrt{5}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ cm; c) $m\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ cm.

II.2.14. ABC este un triunghi isoscel, $[AB] \equiv [AC]$, iar unghiul BAC are 45°. Calculați măsura lui $[BC]$ în cazul cînd: a) $AB = \sqrt{5}$ cm; b) $AB = 8$ cm c) $AB = n$ cm.

R. a) Notăm cu D piciorul înălțimii din B. În triunghiul dreptunghic ABD avem un unghi de 45°, deci $[BD] \equiv [AD]$ căci triunghiul este și isoscel. Aplicăm teorema lui PITAGORA:

$$BD^2 + AD^2 = AB^2;\ BD^2 + BD^2 = (\sqrt{5})^2;\ 2BD^2 = 5;\ BD^2 = \frac{5}{2};\ BD = \sqrt{\frac{5}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}\text{ (cm)} = AD.$$

Calculăm măsura lui $[DC]$:

$$DC = AC - AD = \sqrt{5} - \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

În triunghiul dreptunghic BDC aplicăm din nou teorema lui PITAGORA:

$$BC^2 = BD^2 + DC^2;\ BC^2 = \frac{10}{4} + \left(\sqrt{5} - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2;\ BC^2 = \frac{10}{4} + 5 - 2\sqrt{5}\frac{\sqrt{10}}{2} +$$

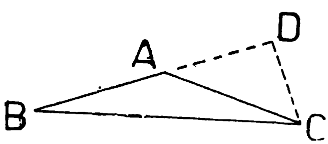
$$+ \frac{10}{4};\ BC^2 = \frac{20}{4} + 5 - \sqrt{50};\ BC^2 = 10 - \sqrt{25 \cdot 2};\ BC^2 = 10 - 5\sqrt{2};\ BC^2 = 5(2 - \sqrt{2});$$

$$BC = \sqrt{5(2 - \sqrt{2})} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}\ \text{(cm)}$$

b) $8\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ cm. c) $n \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ cm.

II.2.15. În triunghiul ABC avem $[AB] \equiv [AC]$ iar măsura unghiului BAC este de 150°. Calculați măsura lui BC în cazul a) $AB = 7$ cm; b) $AB = \pi$ cm; c) $AB = p$ cm.

R. a) Triunghiul are unghiul „de vîrf" de 150°. În acest caz unul din unghiurile „de la bază" are măsura de $\frac{180° - 150°}{2} = \frac{30°}{2} = 15°$. Convenabil ar fi să avem totuși un triunghi cu cel puțin un unghi care să aibă măsura de 30°, 45° sau 60° pentru a aplica unele cunoștințe învățate.



În problema noastră suma celor două unghiuri „de la bază" este de 30° deci un unghi exterior al triunghiului corespunzător celui de 150° are 30°. Vom pune în evidență un triunghi dreptunghic în care acesta să fie unghi. Notăm cu D piciorul înălțimii din C. Am obținut triunghiul ADC dreptunghic în D cu $m(\widehat{DAC}) = 30°$ unde $AC = 7$ cm. Deci conform teoremei cunoscute cu privire la unghiul de 30°, vom avea măsura catetei $[DC]$ (opusă unghiului de 30°) ca fiind $\frac{7}{2}$ cm. Aplicăm teorema lui PITAGORA în acest triunghi și avem:

$$DA^2 = AC^2 - DC^2;\ DA^2 = 7^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2;\ DA^2 = 7^2 - \frac{7^2}{4};\ DA^2 = \frac{4 \cdot 7^2 - 7^2}{4};\ DA^2 =$$

$$= \frac{7^2 \cdot 3}{4};\ DA = \sqrt{\frac{7^2 \cdot 3}{4}};\ DA = \frac{\sqrt{7^2 \cdot 3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{7^2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{2}.$$

Scopul nostru este să calculăm măsura laturii BC. Această latură are rol de ipotenuză în triunghiul BDC, dreptunghic în D, unde știm măsura catetei DC; avem nevoie de măsura catetei BD care este formată din $BA + AD$ adică $BD = 7 + \frac{7\sqrt{3}}{2}$. Putem acum să aplicăm teorema lui PITAGORA în acest triunghi dreptunghic:

$$BC^2 = BD^2 + DC^2;\quad BC^2 = \left(7 + \frac{7\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 \quad BC^2 = 49 + 2\cdot 7\cdot\frac{7\sqrt{3}}{2} +$$

$$+ \frac{49\cdot 3}{4} + \frac{49}{4};\ BC^2 = 49 + 49\sqrt{3} + \frac{49}{4}\cdot(3+1);\ BC^2 = 49 + 49\sqrt{3} + 49;\ BC^2 = 2\cdot$$

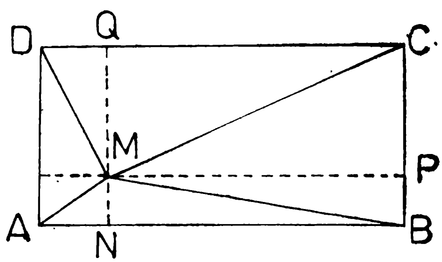
$$\cdot 49 + 49\cdot\sqrt{3};\ BC^2 = 49(2 + \sqrt{3});\quad BC = \sqrt{49\cdot(2+\sqrt{3})}.\ \text{Deci}: BC = 7\sqrt{2+\sqrt{3}}\ \text{cm}.$$

b) $BC = \pi\sqrt{2+\sqrt{3}}$ cm; c) $BC = p\sqrt{2+\sqrt{3}}$ cm.

II.2.16. În interiorul dreptunghiului $ABCD$ se consideră punctul M situat la 7 cm de vîrful A, la 11 cm de vîrful B și la 18 cm de vîrful C (opus vîrfului A).

a) Aflați distanța de la punctul M la vîrful D;

b) Generalizați problema.



R. Considerăm dreptunghiul $ABCD$ și punctul M în interiorul acestuia.

a) Din triunghiurile dreptunghice formate exprimăm distanțele de la punctul M la vîrfurile A, B și C. Avem:

$$AM^2 = AN^2 + NM^2;\quad MB^2 = MN^2 + NB^2;$$

$$MC^2 = NB^2 + MQ^2;\quad MD^2 = MQ^2 + NA^2.$$

Observăm că

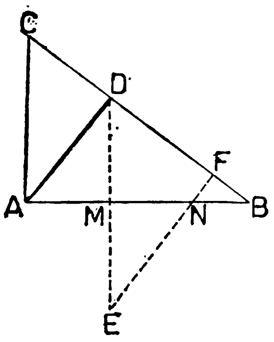
$$AM^2 - MB^2 + MC^2 - MD^2 = 0$$

de unde se obține $MD = 6\sqrt{7}$ cm.

b) Fie distanțele de la M la vîrfurile A, B, C ale dreptunghiului a, b respectiv c. Din relația de mai sus avem:

$$MD^2 = AM^2 - MB^2 + MC^2$$

$$MD = \sqrt{a^2 - b^2 + c^2}.$$



II.2.17. Triunghiul dreptunghic ABC are $m(\hat{A}) = 90°$, D este piciorul înălțimii din A pe dr.BC, iar E simetricul lui D față de dr. AB. Se știe că $AB = 20$; $AC = 15$. Din punctul E ducem perpendiculara EF pe dr. BC ($F \in$ dr. BC) care intersectează cateta AB în punctul N. Se cere:

— perimetrul triunghiului EDF;

— lungimea segmentului FB;

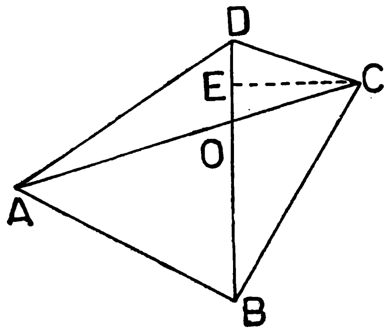
— să se arate că patrulaterul $MNFD$ este inscriptibil unde dr. $DE \cap$ dr. $AB = \{M\}$;

— raza cercului circumscris patrulaterului $MNFD$.

R. Ipotenuza triunghiului ABC are $BC = 25$ cm, iar înălţimea $AD = 12$ cm. Din triunghiul dreptunghic ABD aflăm $BD = 16$ cm, $DM = 9{,}6$ cm, $MB = 12{,}8$ cm. Din asemănarea triunghiurilor DMB şi DFE obţinem $DF = 11{,}52$ cm şi $EF = 15{,}36$ cm. Perimetrul triunghiului EDF este 46,08 cm. Lungimea segmentului FB este 4,48 cm. În patrulaterul $MNFD$ unghiurile M şi F sînt unghiuri drepte, deci suma lor este 180° şi patrulaterul este inscriptibil.

Raza cercului circumscris patrulaterului are măsura cît jumatate din a segmentului DN pe care o aflăm din asemănarea triunghiurilor MNE şi FDE. Obţinem $NE = 12$ cm. Dar $NE = DN$, deoarece E este simetricul lui D faţă de dr. AB, deci şi $DN = 12$ cm, iar raza cercului este de 6 cm.

II.2.18[PO]. Un patrulater convex are trei laturi cu lungimile egale cu a. Două din laturile congruente sînt perpendiculare, iar celălalt unghi format de două laturi congruente are măsura de 60°. Să se calculeze lungimile diagonalelor şi a celeilalte laturi a patrulaterului.



R. Fie $AB = BC = DA = a$, astfel încît dr. AB şi dr. BC sînt perpendiculare, iar $m(\widehat{BAD}) = 60°$. Triunghiul ABD fiind isoscel, cu $m(\widehat{BAD}) = 60°$, va fi echilateral şi deci $BD = a$. Avem deci :

$$m(\widehat{CBD}) = 90° - 60° = 30°.$$

Fie E proiecţia lui C pe dr. BD. Din triunghiul dreptunghic BEC, avem :

$$CE = \frac{a}{2}\ ; \quad BE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

şi, prin urmare :

$$ED = BD - BE = a - \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2}(2 - \sqrt{3}).$$

Mai departe, din triunghiul dreptunghic DEC, obţinem :

$$DC = \sqrt{DE^2 + EC^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4}(7 - 4\sqrt{3}) + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{a^2(2 - \sqrt{3})} = a\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Evident $AC = a\sqrt{2}$.

II.2.19[M]. Într-un triunghi ABC, unghiul A este ascuţit dacă şi numai dacă $BC^2 < AB^2 + AC^2$.

R. Fie ABC şi $A_1B_1C_1$ două triunghiuri în care $[AB] \equiv [A_1B_1]$, $[AC] \equiv [A_1C_1]$ şi $m(\hat{A}) < m(\hat{A}_1)$. Atunci, $BC < B_1C_1$ (acest rezultat este demonstrat în manualul de geometrie cl. a VI-a). Dacă în cele 2 triunghiuri, considerăm $m(\hat{A}) < 90°$ şi $m(\hat{A}_1) = 90°$ atunci din $BC < B_1C_1$, rezultă $BC^2 < B_1C_1^2$. Dar :

$$B_1C_1^2 = A_1B_1^2 + A_1C_1^2 = AB^2 + AC^2$$

deci :

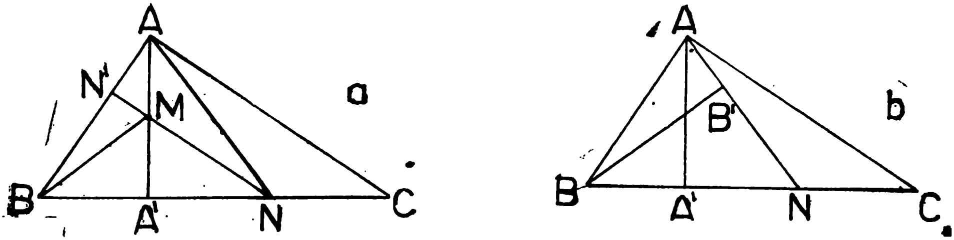
$$BC^2 < AB^2 + AC^2.$$

II.2.20. Fie M mijlocul înălţimii $[AA']$ a triunghiului dreptunghic ABC şi N mijlocul segmentului $A'C$. Să se demonstreze că dr. $BM \perp$ dr. AN.

R. *Metoda I.* Prin ipoteză, punctele M şi N sînt respectiv mijloacele segmentelor AA' şi $A'C$. Rezultă că $[MN]$ este linie mijlocie în triunghiul $AA'C$, deci dr. $MN \parallel$ dr. AC (1).

Notînd $\{N'\}$ = dr. $MN \cap$ dr. AB și ținînd seama de faptul că triunghiul ABC este dreptunghic, din relația (1) deducem că dr. $NN' \perp$ dr. AB.

P in urmare punctul M este la intersecția înălțimilor AA' și NN' ale triunghiului ABN, deci M este ortocentrul acestui triunghi, deci dr. $BM \perp$ dr. AN.



Metoda a II-a. Aplicînd teorema înălțimii în triunghiul ABC avem succesiv:

$$AA'^2 = BA' \cdot A'C \text{ sau } AA' \cdot 2MA' = BA' \cdot 2A'N \text{ sau } \frac{MA'}{NA'} = \frac{BA'}{AA'}.$$

Cum $m(\hat{A'}) = 90°$, rezultă că triunghiul BMA' este asemenea cu triunghiul ANA', deci $\angle MBN \equiv \angle A'AN$.

Notînd $\{B'\}$ = dr. $AN \cap$ dr. BM, triunghiurile MAB' și MBA' au respectiv două unghiuri congruente, deci au toate unghiurile congruente. Prin urmare $m(\hat{B'}) = 90°$.

II.2.21. Printr-un punct M de pe diagonala DB a unui dreptunghi $ABCD$ se consideră o dreaptă Δ perpendiculară pe dr. BD, care se intersectează cu dr. AB în E și cu dr. BC în F. Să se arate că:

a) $AB^2 \cdot ME = BC^2 \cdot MF$;

b) Oricare ar fi poziția punctului M pe dr. BD, raportul:

$$\frac{AB \cdot ME + BC \cdot MF}{MB}$$

este constant.

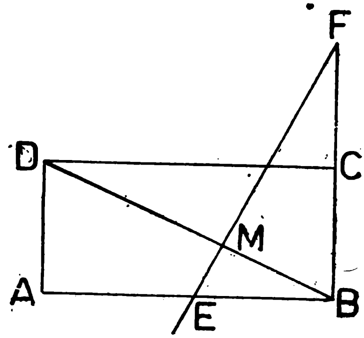
c) $\dfrac{AB^2}{MF^2} + \dfrac{BC^2}{ME^2} = \dfrac{BD^2}{MB^2}$.

R. a) Din asemănarea triunghiurilor ABD și MBE rezultă:

$$MB = \frac{AB \cdot ME}{AD};$$

De aici obținem:

$$MB^2 = \frac{AB^2 \cdot ME^2}{AD^2}. \qquad (1)$$



Teorema înălțimii aplicată în triunghiul BFE ne dă:

$$MB^2 = ME \cdot MF. \qquad (2)$$

Din (1) și (2) se obține prima relație din enunț.

b) Din asemănarea triunghiurilor ABD și MBE obținem:

$$\frac{AD}{ME} = \frac{AB}{MB}, \qquad (3)$$

Iar din asemănarea triunghiurilor BCD şi FMB rezultă :

$$\frac{CD}{MF} = \frac{BC}{MB}. \tag{4}$$

Ţinînd cont că $AD = BC$, $CD = AB$ şi adunînd (3) cu (4) membru cu membru obţinem :

$$\frac{AB}{MF} + \frac{BC}{ME} = \frac{AB + BC}{MB}, \tag{5}$$

de unde rezultă :

$$\frac{AB \cdot ME + BC \cdot MF}{ME \cdot MF} = \frac{AB + BC}{MB}.$$

Pe baza relaţiei (2) ultima relaţie implică :

$$\frac{AB \cdot ME + BC \cdot MF}{MB} = AB + BC = \text{constant}.$$

c) Ridicînd la pătrat ambii membri ai relaţiei (5) obţinem :

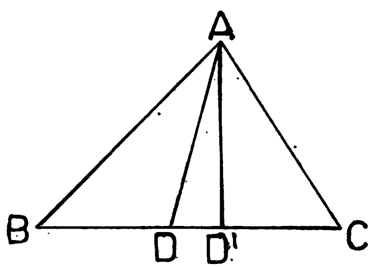
$$\frac{AB^2}{MF^2} + \frac{BC^2}{ME^2} + 2\frac{AB \cdot BC}{ME \cdot MF} = \frac{AB^2 + BC^2}{MB^2} + 2 \cdot \frac{AB \cdot BC}{MB^2}$$

Apoi dacă ţinem seama de (2) şi de faptul că $AB^2 + BC^2 = BD^2$, deducem relaţia din enunţ.

II.2.22[PO]. Dacă D este un punct pe latura BC a triunghiului ABC şi :

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$$

atunci dr. $AD \perp$ dr. BC.



R. Fie dr. $AD' \perp$ dr. BC, $D' \in$ dr. BC. Atunci :

$$AB^2 - BD'^2 = AC^2 - D'C^2 \text{ (T. lui Pitagora).} \tag{1}$$

Dar

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 \tag{2}$$

şi scăzînd relaţiile (1) şi (2) rezultă :

$$CD^2 + D'B^2 = BD^2 + D'C^2$$

adică :

$$CD^2 - BD^2 = D'C^2 - D'B^2$$

care se mai scrie :

$$BC(BC - 2BD) = BC(BC - 2BD')$$

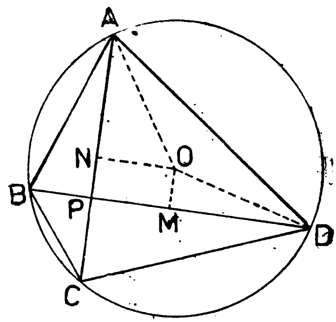
de unde $2BD = 2BD'$ deci D şi D' coincid, dacă sînt de aceiaşi parte a lui B. Dacă D şi D' sînt de o parte şi de alta a lui B atunci D nu satisface relaţia din enunţ. Aşadar dr. $AD \perp$ dr. BC.

II.2.23[M]. Un patrulater $ABCD$ înscris într-un cerc de rază 25 cm are diagonalele perpendiculare, depărtate de centrul cercului la 7 cm respectiv 15 cm. Să se calculeze lungimile diagonalelor şi să se verifice relaţia

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

R. Deoarece în problemă nu se precizează care din diagonale se află la 7 cm și care se află la 15 cm de centrul cercului, problema are două soluții.

Soluția I. Fie diagonala AC la distanța de 15 cm de centru iar diagonala BD la distanța de 7 cm de centru. Din triunghiul dreptunghic ANO, cu teorema lui PITAGORA aflăm $AN = \sqrt{25^2 - 15^2}$, adică $AN = 20$ cm. Atunci diagonala AC are 40 cm. La fel, din triunghiul dreptunghic OMD avem: $MD = \sqrt{25^2 - 7^2}$, adică $MD = 24$ cm. Atunci diagonala BD este de 48 cm. Lungimile laturilor patrulaterului le putem afla din triunghiurile dreptunghice APB, BPC, CPD și DPA, unde, în fiecare cunoaștem catetele; cu teorema lui PITAGORA se pot calcula măsurile ipotenuzelor. Avem:



În triunghiul APB: $AB^2 = 27^2 + 9^2$, de unde $AB = 9\sqrt{10}$ cm; în triunghiul BPC: $BC^2 = 9^2 + 13^2$, de unde $BC = 5\sqrt{10}$ cm; în triunghiul CPD: $CD^2 = 13^2 + 39^2$, de unde $CD = 13\sqrt{10}$ cm; în triunghiul DPA: $DA^2 = 39^2 + 27^2$, de unde $DA = 15\sqrt{10}$ cm.

Verificăm relația dată în problemă, care este teorema lui PTOLEMEU:

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

sau:

$$1170 + 750 = 1920.$$

Deci relația dată se verifică.

Soluția a II-a. Fie diagonala AC la distanța de 7 cm de centru iar diagonala BD la distanța de 15 cm de centru.

Din triunghiul dreptunghic ANO aflăm măsura catetei $AN = 24$ cm, deci diagonala AC este de 48 cm.

Din triunghiul dreptunghic DMO aflăm măsura catetei $MB = 20$ cm, deci diagonala BD este de 40 cm.

Din triunghiurile dreptunghice APB, BPC, CPD și DPA aflăm lungimile laturilor patrulaterului, cu ajutorul teoremei lui PITAGORA și obținem:

$$AB = 39^2 + 13^2, \text{ de unde } AB = 13\sqrt{10} \text{ cm};$$
$$BC = 9^2 + 13^2, \text{ de unde } BC = 5\sqrt{10} \text{ cm};$$
$$CD = 9^2 + 27^2, \text{ de unde } CD = 9\sqrt{10} \text{ cm};$$
$$DA = 27^2 + 39^2, \text{ de unde } DA = 15\sqrt{10} \text{ cm}.$$

Verificăm relația:

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

sau:

$$1170 + 750 = 1920.$$

Relația este verificată și în acest caz. Problema are deci două soluții.

II.2.24PO. Într-un triunghi dreptunghic ABC înălțimea este egală cu $\sqrt{uv}$; (u și v sînt lungimile proiecțiilor catetelor AB și respectiv AC pe ipotenuza BC.

a) Să se arate că perimetrul triunghiului se poate scrie ca un produs în care este factor $\sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{u + v}$.

b). Să se afle distanța de la centrul cercului circumscris triunghiului la punctul de intersecție a înălțimii cu ipotenuza.

R. a) Avem:

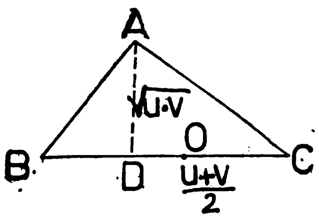
$$AB = \sqrt{u(u+v)};\ AC = \sqrt{v(u+v)};\ BC = u + v.$$

Perimetrul triunghiului se poate scrie:

$$P = \sqrt{u(u+v)} + \sqrt{v(u+v)} + \sqrt{(u+v)^2} = \sqrt{u+v}(\sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{u+v}).$$

b) *Metoda I.* Raza cercului circumscris triunghiului are lungimea egală cu $\frac{u+v}{2}$. Notăm cu d distanța cerută, adică $d = OD$.

1) Dacă $u = v$ atunci : $R = \frac{u+u}{2} = u$, $d = u - u = 0$;



2) Dacă $u < v$ atunci : $\frac{u+v}{2} > u$, $d = \frac{u+v}{2} - u = \frac{v-u}{2}$;

3) Dacă $u > v$ atunci : $\frac{u+v}{2} < u$, $d = u - \frac{u+v}{2} = \frac{u-v}{2}$.

Metoda a II-a. Din triunghiul dreptunghic ADO calculăm cu ajutorul teoremei lui PITAGORA $OD = \sqrt{AO^2 - DA^2} = \sqrt{\left(\frac{u-v}{2}\right)^2} = \left|\frac{u-v}{2}\right|$.

1) Dacă $u = v$, $d = 0$; 2) dacă $u < v$, $d = \frac{v-u}{2}$; 3) dacă $u > v$, $d = \frac{u-v}{2}$.

II.2.25. Determinați tangenta și cotangenta unghiurilor de 30°, 45° și 60°.

R. Pentru funcțiile unghiurilor de 30° și 60° folosim triunghiul echilateral ABC, de latură a. Ducem înălțimea AD și astfel obținem triunghiul dreptunghic ABD, care are măsura unghiului B de 60° iar măsura unghiului BAD de 30°. Calculăm AD cu ajutorul teoremei lui PITAGORA și obținem $AD = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

Calculăm :

$$\text{tg } 30° = \frac{BD}{AD} \text{ sau } \text{tg } 30° = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} \text{ de unde } \text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\text{tg } 60° = \frac{AD}{BD} \text{ sau } \text{tg } 60° = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{\frac{a}{2}}, \text{ de unde } \text{tg } 60° = \sqrt{3};$$

$$\text{ctg } 30° = \frac{1}{\text{tg } 30°}, \text{ sau } \text{ctg } 30° = \sqrt{3}; \quad \text{ctg } 60° = \frac{1}{\text{tg } 60°} \text{ sau } \text{ctg } 60° = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

Aflăm tangenta și cotangenta unghiului de 45° dintr-un triunghi dreptunghic isoscel cu catetele de lungime a.

Obținem : $$\text{tg } 45° = \text{ctg } 45° = \frac{a}{a} = 1.$$

CAPITOLUL III

Arii

III.1^M. a) Exprimaţi aria unui triunghi dreptunghic.
b) Care este aria unui triunghi dreptunghic isoscel de catetă a?
c) Care este aria unui triunghi echilateral de latură a?

R. a) Fie ABC triunghiul dreptunghic cu $m(\hat{A}) = 90°$. Dacă notăm $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, avem:

$$\mathcal{S}_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{b \cdot c}{2}.$$

b) Aria triunghiului are expresia:

$$\mathcal{S}_{ABC} = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

c) Fie ABC triunghiul echilateral de latură a şi A' piciorul perpendicularei din A pe dr. BC. Atunci, $AA' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ şi deci:

$$\mathcal{S}_{ABC} = \frac{a \cdot AA'}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

III.2^M. Cunoscînd două laturi şi unghiul cuprins între ele, exprimaţi aria unui triunghi. Care este raportul ariilor a două triunghiuri ce au cîte un unghi congruent.

R. Fie ABC un triunghi în care cunoaştem AB, BC şi măsura unghiului B. Fie D piciorul perpendicularei din A pe dr. BC. Avem:

$$AD = AB \cdot \sin \hat{B}$$

şi expresia ariei triunghiului devine:

$$\mathcal{S}_{ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{BC \cdot AB \cdot \sin \hat{B}}{2}.$$

Fie triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ care au unghiurile $\hat{B}$ şi $\hat{B}'$ congruente. Atunci, ţinînd cont că $\sin \hat{B} = \sin \hat{B}'$:

$$\frac{\mathcal{S}_{ABC}}{\mathcal{S}_{A'B'C'}} = \frac{\dfrac{BC \cdot AB \cdot \sin \hat{B}}{2}}{\dfrac{B'C' \cdot A'B' \cdot \sin \hat{B}'}{2}} = \frac{BC \cdot AB}{B'C' \cdot A'B'}.$$

III.3^M^. Pe laturile AB, AC ale unui triunghi ABC se consideră punctele D şi E. Arătaţi că :

$$\mathcal{S}_{ABC} = \mathcal{S}_{ADE} + \mathcal{S}_{BDE} + \mathcal{S}_{BCE}$$

R. Avem :

$$\mathcal{S}_{ABC} = \mathcal{S}_{ABE} + \mathcal{S}_{BCE}$$

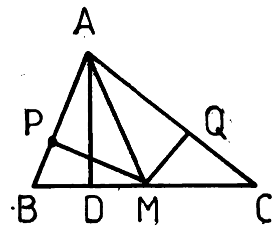
şi :

$$\mathcal{S}_{ABE} = \mathcal{S}_{ADE} + \mathcal{S}_{BED}.$$

Din aceste relaţii rezultă expresia din enunţ.

III.4^M^. Raportul distanţelor de la mijlocul unei laturi a unui triunghi la celelalte două laturi este egal cu inversul raportului lungimilor laturilor respective.

R. Fie ABC un triunghi, AM mediana din A, AD înălţimea din A şi Q şi P proiecţiile punctului M pe dr. AC şi respectiv dr. AB. Atunci :



$$\mathcal{S}_{ABM} = \frac{BM \cdot AD}{2} = \frac{MC \cdot AD}{2} = \mathcal{S}_{AMC}.$$

Pe de altă parte :

$$\mathcal{S}_{ABM} = \frac{AB \cdot MP}{2} \quad \text{şi} \quad \mathcal{S}_{AMC} = \frac{AC \cdot MQ}{2}.$$

Rezultă :

$$AB \cdot MP = AC \cdot MQ$$

de unde :

$$\frac{MP}{MQ} = \frac{AC}{AB}.$$

III.5^M^. Demonstraţi prin arii, teorema bisectoarei.

R. Fie în triunghiul ABC, $[AM$ bisectoarea unghiului A şi P, Q proiecţiile lui M pe laturile AB, respectiv AC, iar D piciorul perpendicularei din A pe dr. BC.
Deoarece $[MP] \equiv [MQ]$, putem scrie :

$$\mathcal{S}_{ABM} = \frac{AB \cdot MP}{2} = \frac{BM \cdot AD}{2}$$

şi :

$$\mathcal{S}_{AMC} = \frac{AC \cdot MQ}{2} = \frac{MC \cdot AD}{2}.$$

Din relaţiile de mai sus rezultă :

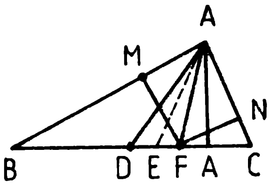
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{MC}.$$

III.6^M^. Într-un triunghi ABC, simetrica medianei (AD) faţă de bisectoarea AE intersectează dreapta BC în F. Determinaţi raportul $\dfrac{FB}{FC}$.

R. Să notăm cu M și N proiecțiile punctului F respectiv pe laturile AB și AC. Fie $[AA']$ înălțimea din A corespunzătoare laturii BC.
Atunci :

$$\mathcal{S}_{ABF} = \frac{BF \cdot AA'}{2} \ ; \ \mathcal{S}_{AFC} = \frac{FC \cdot AA'}{2}$$

și deci :



$$\frac{FB}{FC} = \frac{\mathcal{S}_{ABF}}{\mathcal{S}_{AFC}} = \frac{AB \cdot FM}{AC \cdot FN} = \frac{AB \cdot AF \sin \widehat{BAF}}{AC \cdot AF \sin \widehat{FAC}} =$$

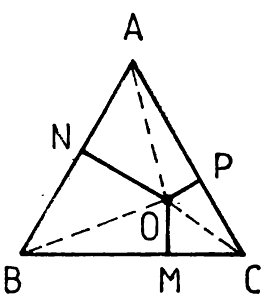
$$= \frac{AB^2}{AC^2} \cdot \frac{AC \cdot AD \sin \widehat{BAF}}{AB \cdot AD \sin \widehat{FAC}} = \frac{AB^2}{AC^2} \cdot \frac{\mathcal{S}_{ADC}}{\mathcal{S}_{ABD}}$$

Dar $\mathcal{S}_{ADC} = \mathcal{S}_{ABD}$, deci :

$$\frac{FB}{FC} = \frac{AB^2}{AC^2} .$$

III.7^M^. Arătați că suma distanțelor unui punct din interiorul unui triunghi echilateral la laturile triunghiului este constantă.

R. Fie ABC triunghiul echilateral, O un punct în interiorul triunghiului și M, N, P proiecțiile lui O respectiv pe laturile BC, AB, AC. Notăm latura triunghiului echilateral prin a.
Atunci :



$$\mathcal{S}_{AOC} = \frac{AC \cdot OP}{2} \ ; \ \mathcal{S}_{BOC} = \frac{BC \cdot OM}{2} \ ; \ \mathcal{S}_{AOB} = \frac{ON \cdot AB}{2} .$$

Exprimînd pe OP, OM și ON din relațiile de mai sus și adunînd rezultă :

$$OP + OM + ON = 2\left(\frac{\mathcal{S}_{AOC}}{AC} + \frac{\mathcal{S}_{BOC}}{BC} + \frac{\mathcal{S}_{AOB}}{AB}\right) = \frac{2}{a}\mathcal{S}_{ABC} =$$

$$= \frac{2}{a} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \text{constant.}$$

III.8^M^. Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.

R. Fie ABC și $A'B'C'$ două triunghiuri asemenea și D, D' picioarele perpendicularelor respectiv din A și A' pe dr. BC, respectiv dr. $B'C'$. Atunci :

$$\frac{AD}{A'D'} = \frac{AB}{A'B'} \tag{1}$$

De asemenea :

$$\frac{\mathcal{S}_{ABC}}{\mathcal{S}_{A'C'B'}} = \frac{BC \cdot AD}{B'C' \cdot A'D'} = \frac{BC}{B'C'} \cdot \frac{AD}{A'D'} = \frac{BC}{B'C'} \cdot \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \cdot \frac{BC}{B'C'} = \left(\frac{BC}{B'C'}\right)^2 .$$

III.9^M. O paralelă la latura BC a unui triunghi ABC taie laturile AB, AC în M, N. Să se arate că aria triunghiului ABN este medie proporțională între ariile triunghiurilor ABC și AMN.

R. Triunghiurile AMN și ABC sînt asemenea și :

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}.$$

Înmulțind ambii membri ai egalității de mai sus cu $\frac{AN}{AC}$ rezultă :

$$\frac{AB}{AM} \cdot \frac{AN}{AC} = 1.$$

Dar :

$$\frac{\mathcal{S}_{ABN}}{\mathcal{S}_{AMN}} = \frac{AB}{AM}; \quad \frac{\mathcal{S}_{ABN}}{\mathcal{S}_{ABC}} = \frac{AN}{AC}$$

și deci, exprimînd pe $\mathcal{S}_{ABN}$ din cele două relații și înmulțind rezultă

$$(\mathcal{S}_{ABN})^2 = \frac{AB}{AM} \cdot \frac{AN}{CA} \cdot \mathcal{S}_{AMN} \cdot \mathcal{S}_{ABC} = \mathcal{S}_{AMN} \cdot \mathcal{S}_{ABC}.$$

III.10^M. Exprimați aria unui romb în funcție de lungimile diagonalelor sale.

R. Să considerăm rombul $ABCD$ cu măsurile diagonalelor $AC = d_1$ și $BD = d_2$, și fie $\{O\} = d_1 \cap d_2$.
Atunci :

$$\mathcal{S}_{ABCD} = 2\mathcal{S}_{ABO} + 2\mathcal{S}_{BCO} = 2 \cdot \frac{BO \cdot AO}{2} + 2\frac{BO \cdot OC}{2} = \frac{2BO}{2}(AO + OC) = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$

III.11^M. Fie M, N, P, Q puncte interioare laturilor AB, BC, CD, DA ale unui patrulater convex $ABCD$. Demonstrați că :

$$\mathcal{S}_{ABCD} = \mathcal{S}_{MNPQ} + \mathcal{S}_{BMN} + \mathcal{S}_{CNP} + \mathcal{S}_{DPQ} + \mathcal{S}_{AQM}.$$

R. Avem :

$$\mathcal{S}_{ABCD} = \mathcal{S}_{AMQ} + \mathcal{S}_{DPQ} + \mathcal{S}_{MQP} + \mathcal{S}_{MPN} + \mathcal{S}_{BMN} + \mathcal{S}_{PNC} = (\mathcal{S}_{MPQ} + \mathcal{S}_{MNP}) +$$
$$+ \mathcal{S}_{BMN} + \mathcal{S}_{CNP} + \mathcal{S}_{DPQ} + \mathcal{S}_{AQM} = \mathcal{S}_{MNPQ} + \mathcal{S}_{BMN} + \mathcal{S}_{CNP} + \mathcal{S}_{DPQ} + \mathcal{S}_{AQM}.$$

III.12^M. Se consideră mijloacele M, N, P, Q ale laturilor AB, BC, CD, DA ale unui paralelogram. Dreptele AN, BP, CQ, DM determină un paralelogram. Care este raportul dintre aria acestui paralelogram și a celui inițial?

R. Fie $VTSR$ paralelogramul format și dr. $AA' \perp$ dr. DC, dr. $PP' \perp$ dr. DM, dr. $VV' \perp$ dr. ST. Atunci :

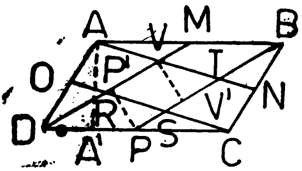
$$\mathcal{S}_{ABCD} = DC \cdot AA'$$

și :

$$\mathcal{S}_{ADM} = \frac{AM \cdot AA'}{2} = \frac{DC \cdot AA'}{4} = \frac{1}{4}\mathcal{S}_{ABCD}.$$

În mod analog rezultă:

$$\mathcal{S}_{PBO}=\frac{\mathcal{S}_{ABCD}}{4}\,;\quad \mathcal{S}_{VTSR}=ST\cdot VV';$$



$$\mathcal{S}_{SRDP}=\frac{(DR+PS)\cdot PP'}{2}=\frac{\left(DR+\frac{DR}{2}\right)VV'}{2}=$$

$$=\frac{3}{4}ST\cdot VV'=\frac{3}{4}\mathcal{S}_{VTSR};$$

$$\mathcal{S}_{VTBM}=\frac{3}{4}\mathcal{S}_{VTSR}.$$

Rezultă relația:

$$\mathcal{S}_{ABCD}=\frac{\mathcal{S}_{ABCD}}{4}+\frac{\mathcal{S}_{ABCD}}{4}+\frac{3\mathcal{S}_{VTSR}}{4}+\frac{3\mathcal{S}_{VTSR}}{4}+\mathcal{S}_{VTSR},$$

de unde se obține $\dfrac{\mathcal{S}_{VTSR}}{\mathcal{S}_{ABCD}}=\dfrac{1}{5}$.

III.13. Un triunghi are laturile de lungimi a, b, c $(a \geqslant b \geqslant c)$ și aria 1. Să se arate că $b \geqslant \sqrt{2}$.

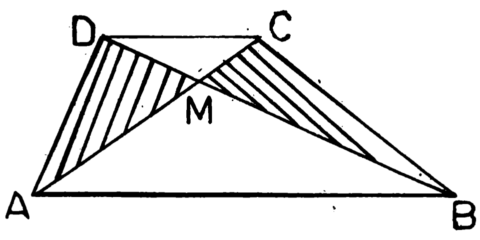
R. Aria triunghiului nu poate depăși jumătate din produsul lungimilor a două laturi. De aceea:

$$1 \leqslant \frac{bc}{2} \leqslant \frac{b^2}{2}$$

deci $b \geqslant \sqrt{2}$.

III.14. Diagonalele trapezului de mai jos formează cu laturile trapezului mai multe triunghiuri.

Arătați care din triunghiurile hașurate are aria mai mare. De ce? Justificați răspunsul.



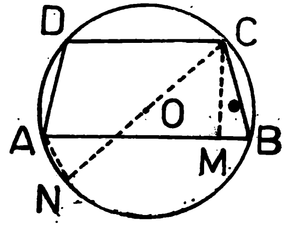
R. Notăm vîrfurile trapezului cu A, B, C, D iar punctul de intersecție al diagonalelor cu M. Deci comparăm ariile triunghiurilor AMD și BMC.

Observăm că triunghiurile ABD și ABC au ariile egale cu jumătatea produsului dintre măsura bazei mari $[AB]$ și măsura înălțimii trapezului. Triunghiurile ABD și ABC sînt echivalente.

Aria triunghiului AMD se poate obține scăzînd din aria triunghiului ABD aria triunghiului ABM, iar aria triunghiului BMC se poate obține scăzînd din aria triunghiului ABC aria aceluiași triunghi ABM.

Din ariile a două triunghiuri echivalente scăzînd aria aceluiași triunghi obținem triunghiuri echivalente, deci ariile triunghiurilor hașurate sînt egale.

III.15. Perimetrul unui trapez isoscel este 202 cm. Baza mare a trapezului este 76 cm iar baza mică este cu 56 cm mai mică decît baza mare. Aflaţi : a) aria trapezului ; b) lungimea diagonalei trapezului ; c) lungimea razei cercului circumscris trapezului.



R. a) Din perimetrul trapezului, cunoscînd lungimile bazelor $B = 76$ cm şi $b = 20$ cm aflăm măsura laturii oblice $AD = BC = 53$ cm.

Lungimea înălţimii trapezului se află din triunghiul dreptunghic CMB cu ajutorul teoremei lui PITAGORA şi se obţine $CM = 45$ cm. Aria trapezului este egală deci cu $\frac{(76 + 20) \cdot 45}{2} = 2160$ cm².

b) Lungimea diagonalei trapezului se poate afla din triunghiul dreptunghic AMC cu ajutorul teoremei lui PITAGORA : $AC = 3\sqrt{481}$ cm.

c) Pentru a putea calcula cît este raza cercului circumscris trapezului, considerăm diametrul CN. Triunghiurile CAN şi CMB sînt asemenea. Din proporţionalitatea laturilor avem : $\frac{AC}{CM} = \frac{CN}{CB}$, de unde $R = \frac{53\sqrt{481}}{30}$ cm.

III.16. În trapezul dreptunghic $ABCD$ ($m(\hat{A}) = 90°$), înălţimea este 15 cm, iar baza mică DC de 20 cm. Diagonala AC este perpendiculară pe latura oblică BC. Aflaţi : a) lungimea diagonalei AC ; b) lungimea bazei mari AB ; c) perimetrul şi aria trapezului.

Arătaţi că triunghiul DCN, format de „prelungirile" laturilor AD şi BC este asemenea cu triunghiul CBA.

R. a) Lungimea diagonalei AC se calculează din triunghiul dreptunghic ADC : $AC = 25$ cm Din triunghiul dreptunghic ACB aflăm lungimea bazei mari aplicînd teorema catetei : $AB = 31{,}25$ cm. Din acelaşi triunghi putem afla $BC = 18{,}75$ cm. Perimetrul trapezului este egal cu $31{,}25 + 18{,}75 + 15 + 20 = 85$ cm. Aria trapezului este egală cu $\frac{(31{,}25 + 20) \cdot 15}{2} = 384{,}375$ cm².

Deoarece $m(\widehat{NDC}) = m(\widehat{ACB}) = 90°$ şi $m(\widehat{NCD}) = m(\widehat{CBA})$ (unghiuri corespondente) rezultă pe baza primului caz de asemănare că triunghiurile NDC şi ACB sînt asemenea.

III.17. Se consideră două segmente paralele AB şi CD. Fie M mijlocul lui $[AB]$ şi N mijlocul lui $[CD]$. Să se arate că dacă $4\mathcal{S}_{DNM} = \mathcal{S}_{ABCD}$, atunci $ABCD$ este paralelogram.

R. Deoarece : $\mathcal{S}_{(DMN)} = \mathcal{S}_{(ABCD)} - \mathcal{S}_{(DMA)} - \mathcal{S}_{(BMN)} - S_{BNC} \Leftrightarrow \mathcal{S}_{(DMN)} = \mathcal{S}_{(ABCD)} -$

$$- \frac{1}{2}(\mathcal{S}_{(DBC)} + \mathcal{S}_{(DAB)} + \mathcal{S}_{(ABC)}) \tag{1}$$

Totodată :

$$\mathcal{S}_{(ABCD)} = \mathcal{S}_{(DBA)} + \mathcal{S}_{(DBC)}$$

şi atunci din relaţia de mai sus rezultă :

$$\mathcal{S}_{(DMN)} = \frac{1}{2}(\mathcal{S}_{(DAB)} + \mathcal{S}_{(DBC)} - \mathcal{S}_{(ABC)}), \tag{2}$$

şi dacă notăm cu h distanţa dintre cele două segmente paralele şi ţinem seama că $\mathcal{S}_{(BDA)} = \mathcal{S}_{(ABC)}$ din (2) rezultă:

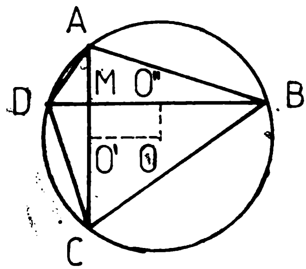
$$\mathcal{S}_{(DMN)} = \frac{1}{2}\mathcal{S}_{(DBC)} = \frac{1}{4}\mathcal{S}_{(ABCD)} \tag{3}$$

De asemenea avem:

$$\mathcal{S}_{(ABCD)} = \mathcal{S}_{(DBA)} + \mathcal{S}_{(DBC)} = \frac{h}{2}(AB+CD)$$ şi atunci din (3) obţinem:

$$\frac{DC \cdot h}{4} = \frac{h}{8}(AB + CD)$$

de unde $DC = AB$. Deoarece dr. $DC \| $dr. AB şi $DC = AB$, rezultă că $ABCD$ este paralelogram.



III.18. Fie $ABCD$ un patrulater cu diagonalele perpendiculare înscris în cercul de centru O. Demonstraţi că dr. AO şi dr. CO împart patrulaterul $ABCD$ în două patrulatere de arii egale.

R. Ducem dreapta OO' perpendiculară pe dreapta AC şi dreapta OO'' perpendiculară pe dreapta BD. Atunci $OO'MO''$ este dreptunghi, deci $OO' = O''M$.

Triunghiul BOD fiind isoscel, rezultă că:

$$BO'' = O''D = \frac{BD}{2}.$$

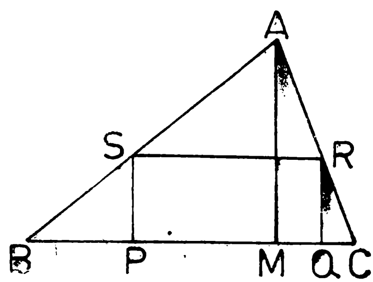
Avem:

$$\mathcal{S}_{COAD} = \mathcal{S}_{ACD} + \mathcal{S}_{AOC} = \frac{DM \cdot AC}{2} + \frac{OO' \cdot AC}{2} = \frac{AC}{2}(DM + OO') = \frac{AC}{2} \cdot \frac{BD}{2} =$$

$$= \frac{AC \cdot BD}{4} = \frac{1}{2}\mathcal{S}_{ABCD}$$

Deci $\mathcal{S}_{ACCD} = \mathcal{S}_{AOCB}$.

III.19^{PO}. Fie P, Q, R, S patru puncte pe laturile triunghiului ABC astfel încît $PQRS$ este dreptunghi. Arătaţi că maximul ariei dreptunghiului $PQRS$ este jumătate din aria triunghiului ABC.



R. Fie $S \in$ dr. AB astfel încît $\frac{AS}{SB} = \frac{1-\lambda}{\lambda}$.

Astfel triunghiul ASR este asemenea cu triunghiul ABC şi:

$$\frac{AS}{AB} = \frac{SR}{BC} = \frac{1-\lambda}{1}.$$

Fie M piciorul înălţimii din A. Astfel triunghiul BSP este asemenea cu triunghiul BAM şi

$$\frac{BS}{BA} = \frac{PS}{MA} = \frac{\lambda}{1}.$$

Deci avem succesiv:

$$\mathcal{S}_{PQRS} = SR \cdot PS = (1-\lambda)BC \cdot \lambda \cdot AM = 2\lambda(1-\lambda)\mathcal{S}_{ABC}.$$

Dar:

$$\lambda(1-\lambda) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - \lambda + \lambda^2\right) = \frac{1}{4} - \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4},$$

pentru orice λ, deoarece $\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0.$

Prin urmare:

$$\mathcal{S}_{PQRS} \leqslant 2 \cdot \frac{1}{4}\mathcal{S}_{ABC} = \frac{1}{2}\mathcal{S}_{ABC},$$

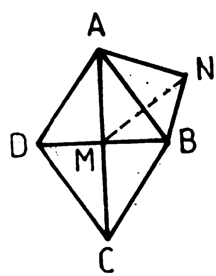
egalitatea avînd loc pentru $\lambda = \frac{1}{2}$.

III.20[PO]. Notăm cu M punctul de intersecţie al diagonalelor rombului $ABCD$ şi cu N simetricul punctului M faţă de latura AB a rombului.

a) Care este condiţia ca punctele N, B şi C să fie coliniare?

b) Aflaţi aria figurii $ANBCD$ în funcţie de aria rombului, fără să cunoaştem unghiurile rombului.

c) Care este condiţia ca $[AN]$ să fie congruent cu $[DC]$?



R. a) Punctele N, B şi C sînt coliniare dacă unghiul obtuz al rombului este de 120°. Observăm că: $\widehat{ABN} \equiv \widehat{ABM}$ (M şi N fiind simetrice) şi $\widehat{ABM} \equiv \widehat{CBM}$ (diagonala rombului este bisectoare deci $\widehat{ABN} \equiv \widehat{ABM} \equiv \widehat{CBM}$. Suma măsurilor lor este de 180° dacă un unghi este de 60° adică dacă $\widehat{ABC}$ are 120°. b). Observăm că aria triunghiului ANB este egală cu aria triunghiului AMB, adică cu $\frac{1}{4}$ din aria rombului. Atunci aria figurii $ANBCD$ este $\frac{5}{4}$ din aria rombului.

c) Se vede că, deoarece $[AN] \equiv [AM]$ (M şi N fiind simetrice) şi $[AM] \equiv [MC]$ (jumătăţi ale diagonalei), rezultă $[AN] \equiv [MC]$ (1).

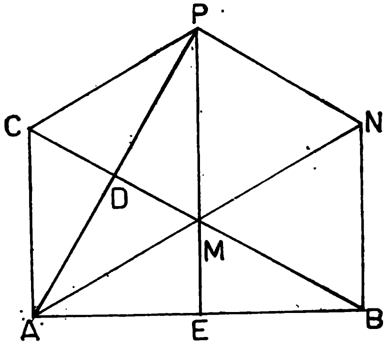
Cum dr. $MC \perp$ dr. BD şi dr. CD nu e perpendiculară pe dreapta BD, rezultă $MC < CD$ (2).

Din (1) şi (2) avem că $AN < CD$, deci $[AN]$ nu poate fi congruent cu $[CD]$.

III.21. Triunghiul dreptunghic ABC are $m(\hat{A}) = 90°$, $m(\hat{B}) = 30°$ şi $AC = 5$ cm. Notăm cu P simetricul punctului A faţă de dr. BC (dr. BC şi dr. AP se intersectează în punctul D) şi cu N simetricul punctului A faţă de punctul M, mijlocul laturii BC.

Arătaţi că: a) dr. $AM \perp$ dr. PB; b) dr. $PM \perp$ dr. AB; c) $[PC] \equiv [PN]$.

Aflaţi: d) aria şi perimetrul pentagonului $ABNPC$; e) ce fel de patrulater este patrulaterul $MBNP$? Dar $CMNP$?



R. a) b) Triunghiul ABP este triunghi echilateral. Punctul M este ortocentrul triunghiului, deci dr.$AM \perp$ dr. PB şi dr. $PM \perp$ dr. AB.
c) Deoarece $[CP] \equiv [CA]$ şi $[NP] \equiv [NB]$, rezultă $[PC] \equiv [PN]$. d) Aria pentagonului poate fi calculată ca fiind de 5 ori mai mare decît aria triunghiului echilateral AMC sau fiind de 2 ori mai mare decît aria trapezului $AEPC$. Se obţine $S = \frac{125\sqrt{3}}{4}$ cm².
Perimetrul pentagonului este $P = 4 \cdot CA + AB = 5(4+\sqrt{3})$ cm.
e) Patrulaterele $MBNP$ şi $CMNP$ sînt romburi.

III.22. Triunghiul dreptunghic ABC are : $m(\hat{A}) = 90^\circ$, $m(\hat{B}) = 60^\circ$ şi $AB = 10$ cm. Notăm cu A' simetricul lui A faţă de dr. BC. (dr.$AA' \cap$ dr. $BC = \{D\}$). Din A' construim perpendicularele $A'Q$ şi $A'M$ pe laturile $[AB]$ respectiv $[AC]$. Punctele de intersecţie ale dreptelor AB şi CA' respectiv $A'M$ şi BC le notăm cu N şi respectiv P. a) Aflaţi lungimea segmentului $[DP]$; b) Arătaţi că $[DP] \equiv [PM]$; c) Demonstraţi că patrulaterele $QA'DB$ şi $A'CMD$ sînt inscriptibile şi aflaţi razele cercurilor circumscrise patrulaterelor; d) Calculaţi perimetrul şi aria triunghiului ANC.

R. a) Deoarece dreapta $AD \perp$ dreapta BC, $m(\widehat{DAC}) = 60^\circ$. Punctele A şi A' fiind simetrice, $[AC] \equiv [A'C]$. Deci triunghiul $AA'C$ este triunghi echilateral; dreapta $CD \perp$ dreapta AA' şi dreapta $A'M \perp$ dreapta $[AC]$, atunci punctul P este ortocentrul triunghiului echilateral, iar $DP = \frac{1}{3} \cdot DC$.

Aflăm lungimea laturii $[AC]$: $\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{AC}{BA}$, de unde $AC = 10\sqrt{3}$ cm.

$[DC]$ poate fi calculat din triunghiul dreptunghic ABC cu ajutorul teoremei catetei (deoarece este proiecţia catetei $[AC]$ pe ipotenuza $[BC]$) sau din triunghiul $AA'C$ ca înălţimea triunghiului echilateral. Se obţine $DC = 15$ cm, deci $DP = 5$ cm.
b) $[DP]$ şi $[PM]$ sînt congruente deoarece sînt apotemele triunghiului echilateral $AA'C$ şi au lungimea egală cu o treime din înălţimea triunghiului.
c) În patrulaterul $QA'DB$ unghiurile opuse $\hat{Q}$ şi $\hat{D}$ sînt unghiuri drepte (dr. $A'Q \perp$ dr. AN, dr. $AA' \perp$ dr.BC) deci suma măsurilor lor este 180°. Patrulaterul $QA'DB$ este inscriptibil. Raza cercului circumscris patrulaterului este jumătate din $BA' = AB$, deci $r = 5$ cm.
În patrulaterul $A'CMD$ unghiurile $A'MC$ şi $A'DC$ sînt unghiuri drepte, deci patrulaterul poate fi înscris într-un semicerc cu lungimea razei egală cu jumătate din lungimea diametrului $[A'C]$. $A'C$ fiind egală cu AC, raza cercului are lungimea $5\sqrt{3}$ cm.

d) Triunghiul ANC este triunghi dreptunghic. Ştim că $m(\widehat{ACN}) = 60^\circ$ şi $AC = 10\sqrt{3}$ cm.

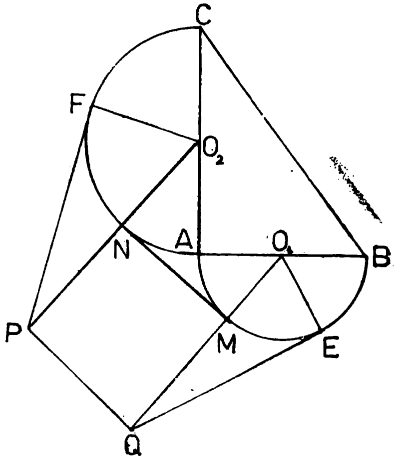
Aflăm lungimea catetei $[AN]$ cu ajutorul lui tg$C$. Avem $\operatorname{tg} C = \frac{AN}{AC}$, de unde $AN = 30$ cm.

Lungimea ipotenuzei $[NC]$ o calculăm cu ajutorul lui cos C. Avem $\cos C = \frac{AC}{NC}$, de unde $NC = 20\sqrt{3}$ cm.
Perimetrul triunghiului ANC este:

$$P = AN + NC + CA = 30 \cdot (1 + \sqrt{3}) \text{ cm.}$$

Aria triunghiului este: $S = \frac{AC \cdot AN}{2} = 150\sqrt{3}$ cm².

III.23. Pe catetele triunghiului dreptunghic ABC, $AB = 12$ cm, $AC = 16$ cm, se construiesc în afara triunghiului, semicercuri care au ca diametru catetele triunghiului. $[MN]$ este „tangenta" comună celor două semicercuri ($M \in \overset{\frown}{AB}$, $N \in \overset{\frown}{AC}$). Construim pătratul $MNPQ$ în exteriorul cercurilor. Din Q ducem tangenta QE la semicercul cu diametrul AB iar din P ducem tangenta PF la semicercul cu diametrul AC. Arătaţi că aria triunghiului dreptunghic ABC este egală cu aria pătratului $MNPQ$. Aflaţi raportul lungimilor tangentelor QE şi PF.



R. Aflăm lungimea lui $[MN]$ din trapezul dreptunghic O_1O_2NM şi obţinem: $MN = 4\sqrt{6}$ cm. Aria pătratului este 96 cm² iar aria triunghiului este $\dfrac{12 \cdot 16}{2} = 96$ (cm²). Deci ariile lor sînt egale.

Lungimea segmentului $[QE]$ o aflăm din triunghiul dreptunghic QEO_1 cu teorema lui PITAGORA:

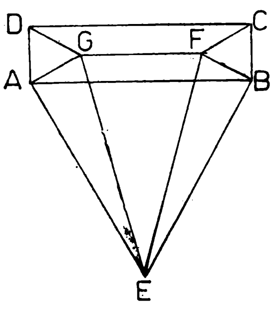
$$QE^2 = QO_1^2 - EO_1^2$$

adică $QE = 4\sqrt{3(2+\sqrt{6})}$.

La fel obţinem lungimea lui $[PF]$ din triunghiul dreptunghic PFO_2: $PF = 4\sqrt{2(3+2\sqrt{6})}$.

Raportul segmentelor este deci $\sqrt{\dfrac{6+\sqrt{6}}{10}}$.

III.24. Se dă dreptunghiul $ABCD$ cu dimensiunile $AB = 40$ cm, $BC = 10$ cm. În interiorul dreptunghiului construim triunghiurile echilaterale ADG şi BCF, iar în exteriorul dreptunghiului construim triunghiul echilateral ABE. Aflaţi: a) perimetrul triunghiului EFG; b) aria patrulaterului $AEGD$.



R. Observăm că unghiul FBE este unghi drept. Calculăm FE din triunghiul dreptunghic FBE cu teorema lui PITAGORA:

$$FE^2 = FB^2 + EB^2$$

de unde $FE = 10\sqrt{17}$ cm, $FE = EG$. Calculăm $GF = 40 - 2 \cdot 5\sqrt{3} = 10 \cdot (4 - \sqrt{3})$ cm.

Perimetrul triunghiului EFG este:

$$\mathcal{P}_{EFG} = 10 \cdot (2\sqrt{17} + 4 - \sqrt{3}) \text{ cm}.$$

Aria patrulaterului $AEGD$ se scrie ca sumă între aria triunghiului echilateral AGD şi aria triunghiului dreptunghic AEG. Avem:

$$\mathcal{S} = \frac{10^2\sqrt{3}}{4} + \frac{40 \cdot 10}{2} = 25 \cdot (\sqrt{3} + 8) \text{ cm}^2.$$

III.25. Se dă un pătrat. Construiţi un dreptunghi echivalent (cu aceeaşi arie) cu pătratul, cunoscînd lungimea unei laturi a dreptunghiului. Folosiţi numai compasul şi rigla negradată.

R. Latura dreptunghiului este ori mai mare ori mai mică decît latura pătratului. La efectuarea construcției vom deosebi două cazuri:

a) Latura dată a dreptunghiului este mai mică decît latura pătratului.

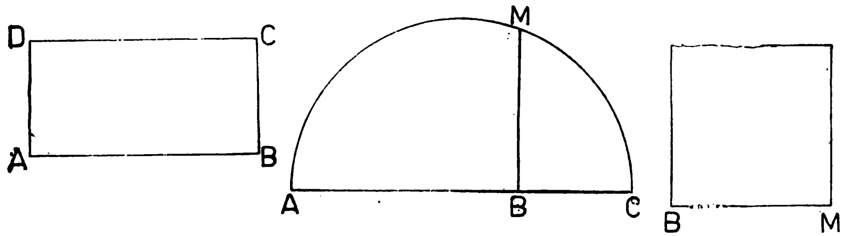
Fie $[AB]$ latura pătratului și $[AC]$ latura dreptunghiului. Pe latura AE a pătratului $ABDE$ construim (în exterior) un semicerc cu lungimea razei egală cu jumătate din lungimea laturii pătratului. Din punctul A construim o coardă congruentă cu $[AC]$ și o prelungim pînă intersectează prelungirea laturii DE a pătratului. Fie acest punct M. În A „ridicăm" o perpendiculară pe $[AC]$ și măsurăm pe ea segmentul $[AP] \equiv [AM]$. Acest segment $[AP]$ este latura căutată a dreptunghiului. Acum putem trasa celelalte două laturi ale dreptunghiului. Dreptunghiul este $APNC$. Se poate verifica cu teorema catetei: $AE^2 = AC \cdot AM$.

b) Latura dată a dreptunghiului este mai mare decît latura pătratului.

Construcția este asemănătoare cu cea precedentă. După ce am construit semicercul în afara pătratului și am prelungit latura $[DE]$ a pătratului, luăm în deschiderea compasului latura dată a dreptunghiului și trasăm un arc de cerc care intersectează prelungirea laturii DE a pătratului. Acest punct de intersecție va fi M.

$[AM$ intersectează semicercul în punctul C. Coarda $[AC]$ va fi latura căutată a dreptunghiului. Ducînd perpendiculare în A și C pe dr. AC și măsurînd pe ele segmentul $[AM]$(latura dată a dreptunghiului), obținem dreptunghiul echivalent cu pătratul dat. Verificarea se face la fel ca în cazul precedent.

III.26. Se dă un dreptunghi. Construiți un pătrat echivalent (cu aceeași arie) cu dreptunghiul dat. Folosiți numai compasul și rigla negradată.

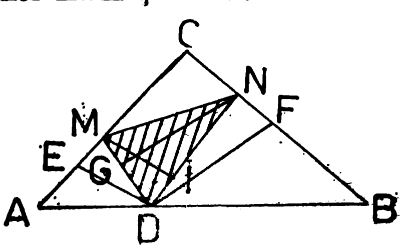


R. Procedeul se reduce la construirea mediei proporționale a două segmente. Adunăm lungimea și lățimea dreptunghiului. Construim pe acest segment, luat ca diametru, un semicerc. Ridicăm o perpendiculară pe diametru în punctul de capăt al lungimii, respectiv lățimii. Această perpendiculară va intersecta semicercul într-un punct. Lungimea segmentului cuprins între diametru și cerc este lungimea laturii pătratului. Verificarea se face cu ajutorul teoremei înălțimii:

$$BM^2 = AB \cdot BC.$$

Cu ajutorul acestui segment se poate construi pătratul echivalent cu dreptunghiul dat.

III.27. Se consideră un triunghi ABC de bază $[AB]$. Pe latura $[AB]$ fie un punct oarecare D. Paralelele prin D la laturile $[AC]$ și $[BC]$ intersectează latura $[AC]$ în punctul M și latura $[BC]$ în punctul N. Să se demonstreze că aria triunghiului DMN este media geometrică a ariilor triunghiurilor ADM și DBN.



R. Construim înălțimile: dr. $DE \perp$ dr. AM; dr. $MI \perp$ dr.DN; dr. $NG \perp$ dr.DM, dr. $DF \perp$ $\perp$ dr. BN ($[DE] \equiv [MI]$; $[NG] \equiv [DF]$). Avem:

$$\mathcal{S}_{DMN} = \frac{DN \cdot MI}{2} = \frac{MC \cdot MI}{2};$$

$$\mathcal{S}_{DMN} = \frac{MD \cdot NG}{2} = \frac{CN \cdot NG}{2}.$$

$$\mathcal{S}_{ADM} = \frac{AM \cdot DE}{2}; \mathcal{S}_{DMN} = \frac{MC \cdot MI}{2}.$$

Dar cum $[DE] \equiv [MI]$, rezultă:

$$\frac{\mathcal{S}_{DMA}}{\mathcal{S}_{DMN}} = \frac{AM}{MC}.$$

Avem şi:

$$\mathcal{S}_{DMN} = \frac{CN \cdot NG}{2}; \mathcal{S}_{DBN} = \frac{BN \cdot DF}{2}$$

Dar cum $[NG] \equiv [DF]$, rezultă:

$$\frac{\mathcal{S}_{DMN}}{\mathcal{S}_{DBN}} = \frac{CN}{BN}.$$

Deci $\frac{\mathcal{S}_{ADM}}{\mathcal{S}_{DMN}} = \frac{AM}{MC}$, dar cum dr. $MD \parallel$ dr. BC, rezultă $\frac{AM}{MC} = \frac{AD}{DB}$;

iar $\frac{\mathcal{S}_{DMN}}{\mathcal{S}_{DBN}} = \frac{CN}{BN}$, dar cum dr. $DN \parallel$ dr. AC rezultă $\frac{CN}{BN} = \frac{AD}{DB}$.

Deci: $\frac{AM}{MC} = \frac{CN}{NB}$. Obţinem în final:

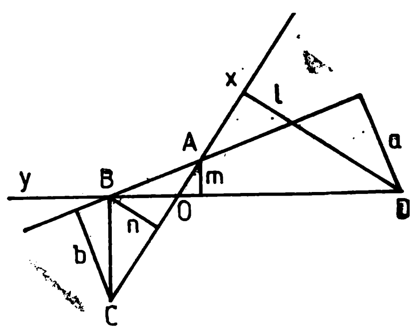
$$\frac{\mathcal{S}_{ADM}}{\mathcal{S}_{DMN}} = \frac{\mathcal{S}_{DMN}}{\mathcal{S}_{DBN}}.$$

sau:

$$\mathcal{S}_{ADM} \cdot \mathcal{S}_{DBN} = \mathcal{S}^2_{DMN}.$$

III.28. Se dau două drepte concurente Ox şi Oy. Pe $(Ox$ se ia punctul A, pe semidreapta $[Oy$ punctul B astfel ca $OB = 2OA$, pe „prelungirea" $[Ox$ punctul C astfel ca $OC = 2OB$, iar pe „prelungirea" $[Oy$ punctul D astfel ca $OD = 2OC$. Arătaţi că $\mathcal{S}_{AOD} = \mathcal{S}_{BOC}$ şi $16\mathcal{S}_{AOB} = \mathcal{S}_{DOC}$ (unde cu „$\mathcal{S}$" se notează aria), şi $ABCD$ este un trapez.

R. Ducem înălţimea din A pe dr. BD şi o notăm cu m, înălţimea din B pe dr. AC şi o notăm cu n şi înălţimea din D pe AC şi o notăm cu l. Avem:



$$\mathcal{S}_{AOB} = \frac{OB \cdot m}{2}; \mathcal{S}_{AOD} = \frac{OD \cdot m}{2}.$$

Cum OD este mai mare de patru ori decît OB atunci $4\mathcal{S}_{AOB} = \mathcal{S}_{AOD}$. Mai avem:

$$\mathcal{S}_{AOB} = \frac{n \cdot AO}{2}: \mathcal{S}_{BOC} = \frac{n \cdot OC}{2}.$$

Cum OC este mai mare de patru ori decît AO atunci $4\,\mathcal{S}_{AOB} = \mathcal{S}_{BOC}$ şi:

$$\mathcal{S}_{AOD} = \frac{AO \cdot l}{2}; \mathcal{S}_{DOC} = \frac{l \cdot OC}{2}.$$

Cum $OC = 4AO$ avem atunci $4S_{AOD} = S_{DOC}$. Deci:

$$4S_{AOB} = S_{AOD};\ 4S_{AOB} = S_{BOC};\ 4S_{AOD} = S_{DOC},$$

de unde rezultă că $S_{AOD} = S_{BOC}$.

În relația $4S_{AOD} = S_{DOC}$ înlocuim pe S_{AOD} cu $4S_{AOB}$ și obținem $4 \cdot 4S_{AOB} = S_{DOC}$, deci:

$$16\, S_{AOB} = S_{DOC}.$$

Conform proprietății de aditivitate pentru arii avem:

$$S_{ABD} = S_{AOD} + S_{AOB};\ S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC}.$$

Dacă $S_{AOD} = S_{BOC}$ atunci $S_{ABD} = S_{ABC}$. Dar $S_{ABD} = \dfrac{a \cdot AB}{2}$ și $S_{ABC} = \dfrac{b \cdot AB}{2}$ (unde a și b sînt înălțimi pe AB). Rezultă că $a = b$, deci dr. $AB \parallel$ dr. DC, deci $ABCD$ este un trapez.

III.29[PO]**. Să se arate că două triunghiuri dreptunghice care au aceeași arie și același perimetru sînt congruente.**

R. Fie ABC și $A_1B_1C_1$ două triunghiuri dreptunghice $m(\hat{A}) = m(\hat{A}_1) = 90°$, cu laturile de lungimi respectiv a, b, c și a_1, b_1, c_1, care au aceeași arie și același perimetru, sau:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{și} \quad a_1^2 = b_1^2 + c_1^2 \tag{1}$$

și:

$$b \cdot c = b_1 \cdot c_1 \tag{2}$$

În plus:

$$a + b + c = a_1 + b_1 + c_1. \tag{3}$$

Ridicînd la pătrat relația (3) și folosind pe cele anterioare, se obține succesiv:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + 2(a_1b_1 + b_1c_1 + c_1a_1),$$

sau:

$$2a^2 + 2ab + 2ac = 2a_1^2 + 2a_1b_1 + 2a_1c_1$$

de unde:

$$2a(a + b + c) = 2a_1(a_1 + b_1 + c_1).$$

De aici se obține $a = a_1$ și relația (3) devine:

$$b + c = b_1 + c_1$$

sau:

$$b - b_1 = c_1 - c. \tag{4}$$

Relația (2) se mai poate scrie:

$$\frac{b}{c_1} = \frac{b_1}{c}$$

și folosind proprietatea șirului de rapoarte egale și (4) avem:

$$\frac{b}{c_1} = \frac{b_1}{c} = \frac{b - b_1}{c_1 - c} = 1,$$

iar de aici $b = c_1$ și $b_1 = c$, de unde avînd și $a = a_1$, rezultă congruența celor două triunghiuri.

III.30[PO]**. Fie un triunghi isoscel ABC dreptunghic în A. Pe cateta $[AB]$ (sau pe „prelungirea" acesteia) fie două puncte M și N. În aceste puncte se consideră două perpendiculare pe AB care intersectează ipotenuza (sau „prelungirea" acesteia) în punctele P respectiv Q. Să se arate că suma ariilor triunghiurilor BMP și BNQ este mai mare sau cel puțin egală cu aria dreptunghiului format cu segmentele $[MP]$ și $[NQ]$.**

R. Cum $m(A) = 90°$ şi triunghiul este isoscel, avem şi $m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = 45°$. Deoarece dr. $MP \perp$ dr. AB, dr. $NQ \perp$ dr. AB şi $m(\hat{B}) = 45°$, triunghiurile BMP şi NBQ sînt dreptunghice isoscele $(BM) \equiv (MP)$, $(NB) \equiv (NQ)$, deci:

$$\mathcal{S}_{BMP} = \frac{MP^2}{2}\ ;\ \mathcal{S}_{BNQ} = \frac{NQ^2}{2}.$$

Aria unui dreptunghi format cu segmentele $[MP]$ şi $[NQ]$ va fi $MP \cdot NQ$. Rămîne de demonstrat relaţia:

$$\mathcal{S}_{BMP} + \mathcal{S}_{BNQ} \geqslant MP \cdot NQ$$

sau:

$$MP^2 + NQ^2 \geqslant 2\ MP \cdot NQ$$

sau:

$$(MP - NQ)^2 \geqslant 0$$

evident. Egalitatea are loc cînd M şi N coincid.

III.31^{PO}. Fie triunghiul dreptunghic ABC. Se construieşte un semicerc cu centrul pe ipotenuza $[BC]$, tangent la cele două catete. Dacă se notează cu b, c şi r lungimile catetelor şi respectiv lungimea razei semicercului, demonstraţi că:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

R. Să observăm că, dacă notăm cu O centrul semicercului, atunci avem:

$$\mathcal{S}_{AOB} = \frac{r \cdot c}{2}\ ;\ \mathcal{S}_{AOC} = \frac{r \cdot b}{2}.$$

De asemenea, avem şi:

$$\mathcal{S}_{AOB} + \mathcal{S}_{AOC} = \mathcal{S}_{ABC}.$$

De aici, se obţine succesiv:

$$\frac{r \cdot c}{2} + \frac{r \cdot b}{2} = \frac{b \cdot c}{2}\ ;\ r(c + b) = b \cdot c$$

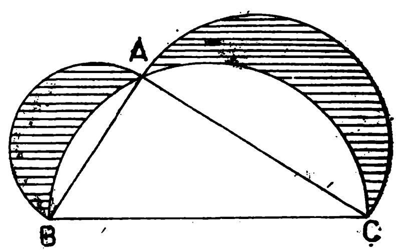
sau:

$$r\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 1$$

de unde:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{r}.$$

III.32^{M}. Pe cele trei laturi ale unui triunghi dreptunghic ca diametre se descriu semicercuri, ca în figura alăturată. Arătaţi că aria părţii haşurate este egală cu aria triunghiului.



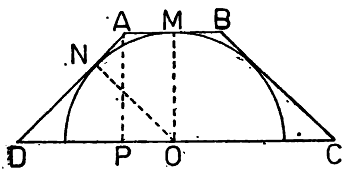
R. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A, cu $AB = c$, $AC = b$ şi $BC = a = \sqrt{b^2 + c^2}$. Aria triunghiului este $\frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{b \cdot c}{2}$. Trebuie să arătăm că şi aria părţii haşurate este tot $\frac{bc}{2}$. Aria părţii haşurate este diferenţa dintre suma ariilor semicercurilor construite pe catete cu aria triunghiului şi aria semicercului construit pe ipotenuză. Aria părţii haşurate este deci:

$$\mathcal{S} = \pi \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \pi \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{b \cdot c}{2} - \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{bc}{2} + \frac{\pi}{8}(b^2 + c^2 - a^2).$$

Dar cum $b^2 + c^2 - a^2 = 0$, aria părţii haşurate este $bc/2$.

III.33^{M}. Un semicerc cu raza de lungime R este înscris într-un trapez isoscel (adică are centrul pe baza mare $[DC]$ şi este tangent celorlalte laturi $[AB]$, $[BC]$ şi $[DA]$. Unghiul $\widehat{ADC}$ format de o latură neparalelă cu baza mare are $45°$. Să se afle aria trapezului.

R. Notînd lungimea razei semicercului cu R, lungimea înălţimii trapezului este tot R. Observăm că în triunghiul dreptunghic isoscel DNO avem: $DN = NO = R$, $DO = R\sqrt{2}$, deci baza mare a trapezului este $2R\sqrt{2}$. În triunghiul dreptunghic isoscel DPA: $AP = PD = R$ şi $AD = R\sqrt{2}$. Dar $ND = R$. Atunci:



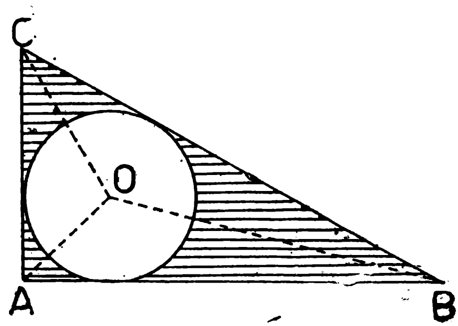
$$NA = R\sqrt{2} - R = R(\sqrt{2} - 1).$$

AN şi AM sînt congruente, fiind „tangente" duse la cerc din punctul exterior A. Deci $AM = R(\sqrt{2} - 1)$ şi baza mică a trapezului este $2R(\sqrt{2} - 1)$. Aria trapezului este:

$$\mathcal{S} = \frac{[2R\sqrt{2} + 2R(\sqrt{2} - 1)] \cdot R}{2} = R^2(2\sqrt{2} - 1).$$

III.34^{M}. Dintr-un triunghi dreptunghic cu catetele de lungimi b şi c să se „decupeze" cercul înscris. Se cere aria rămasă din triunghi.

R. Aflăm lungimea razei cercului înscris în triunghi cu ajutorul ariei triunghiului:



$$\frac{b \cdot c}{2} = \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} + \frac{\sqrt{b^2 + c^2} \cdot r}{2},$$

deci:

$$r = \frac{b \cdot c}{b + c + \sqrt{b^2 + c^2}}.$$

Aria rămasă este diferenţa ariilor triunghiului şi a cercului înscris:

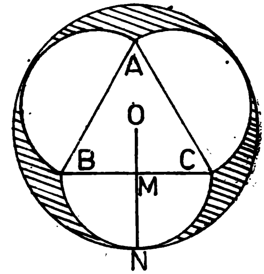
$$\mathcal{S} = \frac{b \cdot c}{2} - \frac{b^2c^2 \cdot \pi}{(b + c + \sqrt{b^2 + c^2})^2}$$

sau:

$$\mathcal{S} = \frac{bc[(b + c + \sqrt{b^2 + c^2})^2 - 2bc\pi]}{2(b + c + \sqrt{b^2 + c^2})^2}.$$

III.35[M]. ABC este un triunghi echilateral şi se construiesc în afara lui, considerînd laturile ca diametre, semicercuri. Un cerc este tangent la toate aceste semicercuri. Să se afle aria porţiunii haşurate în funcţie de l, lungimea laturii triunghiului echilateral.

R. Aria porţiunii haşurate este diferenţa dintre aria cercului mare şi suma ariilor triunghiului cu cele 3 semicercuri mici.



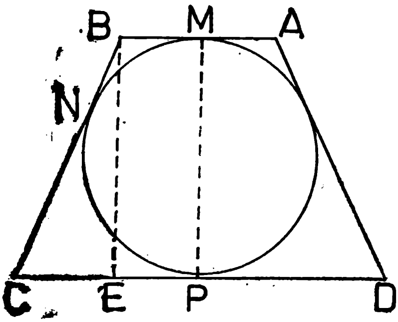
Lungimea razei cercului mare este $OM + MN = \frac{l\sqrt{3}}{6} + \frac{l}{2} = \frac{l}{6}(3 + \sqrt{3})$. Aria cercului mare este $\frac{l^2}{36}(3+\sqrt{3})^2 \cdot \pi = \frac{2+\sqrt{3}}{6} \cdot l^2\pi$. Suma ariilor triunghiului şi a celor 3 semicercuri este:

$$\frac{l^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{l^2}{4} \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{l^2}{4}\left(\sqrt{3} + \frac{3\pi}{2}\right).$$

Aria porţiunii haşurate este:

$$S = \frac{2+\sqrt{3}}{6} l^2\pi - \frac{l^2}{4}\left(\sqrt{3} + \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{(4\sqrt{3}-1)\pi - 6\sqrt{3}}{24} l^2.$$

III.36[M]. Un trapez isoscel are baza mică de lungime $AB = 2a$ şi baza mare de lungime $DC = 2b$. El este circumscris unui cerc. Se cere aria trapezului.



R. Aflăm lungimea înălţimii trapezului din triunghiul dreptunghic BEC. Observăm că B şi C fiind puncte exterioare faţă de cercul înscris în trapez, tangentele BM şi BN respectiv CN şi CP sînt congruente, atunci latura $BC = a + b$, iar segmentul CE avînd drept lungime semidiferenţa bazelor, $CE = b - a$. Aplicînd teorema lui PITAGORA avem:

$$BC^2 = CE^2 + BE^2$$

de unde:

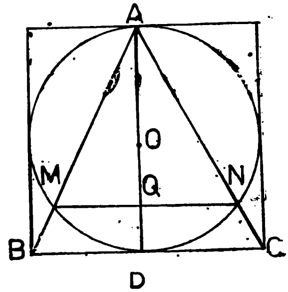
$$BE^2 = (a+b)^2 - (b-a)^2 \text{ adică } BE = 2\sqrt{ab}.$$

Aria trapezului este deci:

$$S = \frac{(2a+2b) \cdot 2\sqrt{ab}}{2} = 2(a+b)\sqrt{ab}.$$

III.37[M]. Triunghiul isoscel ABC este înscris într-un pătrat ($AB = AC = a$) şi pe înălţimea (AD) ca diametru se construieşte un cerc care intersectează pe (AB) în M şi (AC) în N. Se cere lungimea lui MN în funcţie de a.

R. Aflăm latura pătratului, deci înălţimea triunghiului în funcţie de a. Deoarece $AD^2 + BD^2 = AB^2$ şi ştiind că $BD = \frac{AD}{2}$, se obţine $AD = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$. Triunghiul AMD, fiind înscris într-un semicerc, este triunghi dreptunghic, deci putem aplica teorema catetei şi avem:



$$AM^2 = AQ \cdot AD.$$

Lungimea lui (AQ) se obţine din asemănarea triunghiurilor AMQ şi ABD:

$$AQ = \frac{AM \cdot AD}{AB} = \frac{AM \cdot \frac{2a\sqrt{5}}{5}}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{5} AM.$$

Înlocuind şi efectuînd calculele obţinem $AM = \frac{4a}{5}$, iar cu teorema lui PITAGORA, aplicată în triunghiul AQM se obţin $MQ = \frac{4a\sqrt{5}}{25}$ şi $MN = \frac{8a\sqrt{5}}{25}$.

III.38[PO]. Din punctul exterior A se construiesc la cercul $\mathcal{C}(O, R)$ tangentele (AB) şi (AC) care formează unghiul BAC cu măsura de $60°$ (B şi C sînt punctele de tangenţă). Cercul înscris în triunghiul ABC are centrul în punctul O_1 şi este tangent la laturile (AB) şi (AC) în punctele D respectiv E, iar cercul înscris în triunghiul DEA are centrul în punctul O_2 şi este tangent la laturile (DA) şi (EA) în punctele F respectiv G.

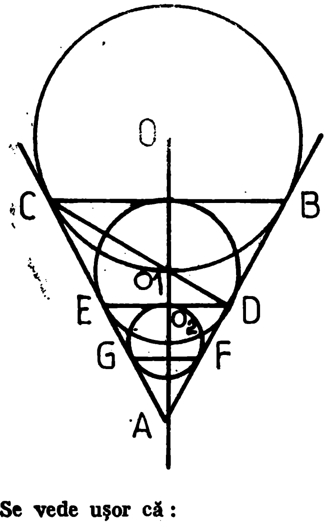
a) Arătaţi că lungimea şi aria cercului cu centrul în punctul O_1 este medie proporţională între lungimile respectiv ariile cercurilor cu centrele în O şi respectiv în O_2.

b) Aflaţi raportul lungimilor segmentelor (AF) şi (CE);

c) Verificaţi dacă punctele C, O_1 şi D sînt coliniare;

d) Calculaţi lungimea segmentului (CD).

R. a) $\widehat{BAC}$ avînd măsura de $60°$ şi $[AB] \equiv [AC]$, triunghiul ABC este echilateral, deci unghiul ABC are măsura de $60°$, de unde rezultă că arcul mic BC are măsura de $120°$ (deoarece dr. AB este tangentă). Atunci latura (BC) este $R\sqrt{3}$. Lungimea razei cercului înscris în triunghiul echilateral ABC este $\frac{1}{3} \cdot \frac{R\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2}$ adică $\frac{R}{2}$. Deci O_1, centrul cercului, este pe arcul BC, la mijlocul acestuia.



La fel ca în cazul primului cerc, arcul DE este de $120°$ şi $DE = \frac{R}{2}\sqrt{3}$. Raza cercului înscris în triunghiul echilateral DEA este $\frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{R}{2}\sqrt{3}\sqrt{3}}{2}$ adică $\frac{R}{4}$. Deci O_2, centrul cercului, se află pe arcul DE, la mijlocul acestuia.

La fel ca în primele două cazuri, triunghiul format FGA este echilateral şi $FG = \frac{R}{4}\sqrt{3}$.

Cunoscînd mărimile razelor cercurilor, calculăm lungimile şi ariile celor trei cercuri:

$$\mathcal{L} = 2 \cdot \pi \cdot R,\ \mathcal{S} = \pi \cdot R^2;\ \mathcal{L}_1 = \pi \cdot R,\ \mathcal{S}_1 = \pi \cdot \frac{R^2}{4};$$

$$\mathcal{L}_2 = \pi \cdot \frac{R}{2},\ \mathcal{S}_2 = \pi \cdot \frac{R^2}{16}.$$

Se vede uşor că:

$$\mathcal{L}_1 = \sqrt{\mathcal{L} \cdot \mathcal{L}_2} \text{ pentru că } \pi R = \sqrt{2\pi R \cdot \pi \frac{R}{2}}$$

şi:

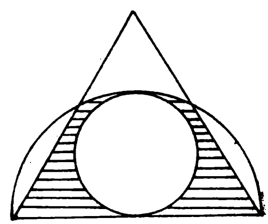
$$\mathcal{S}_1 = \sqrt{\mathcal{S} \cdot \mathcal{S}_2} \text{ pentru că } \pi \frac{R^2}{4} = \sqrt{\pi R^2 \cdot \pi \frac{R^2}{16}}.$$

b) Avem relația $AF = FG = \dfrac{R\sqrt{3}}{4}$. CE este diferența dintre CA și EA, sau, observăm că este jumătate din CA, deci $CE = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. Raportul dintre AF și CE este deci $\dfrac{1}{2}$.

c) ~~Calculînd~~ măsurile unghiurilor OO_1C și DO_1A obținem că fiecare unghi este de 60°. Punctele O, O_1 și A fiind coliniare, rezultă că unghiurile sînt opuse la vîrf, deci și punctele C, O_1 și D sînt coliniare.

d) Unghiul OO_1C are măsura de 60°, și rezultă $CO_1 = R$, iar $O_1D = \dfrac{R}{2}$. Deci lungimea segmentului $[CD]$ este

III.39[MPO]. În figura alăturată se dă un triunghi echilateral cu latura de lungime $2a$, un semicerc construit pe una din laturile triunghiului echilateral și în interiorul acestuia un cerc. Aflați aria porțiunii hașurate.



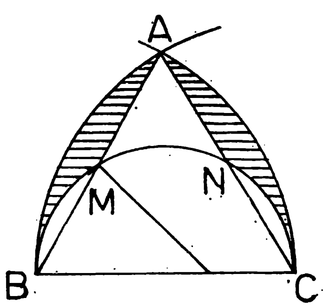
R. Aria porțiunii hașurate este egală cu diferența dintre aria semicercului și suma ariilor cercului interior și a segmentelor de cerc exterioare triunghiului.

Aria semicercului este $\dfrac{a^2}{2}\pi$; aria cercului mic este $\dfrac{a^2}{4}\pi$;

aria unui segment de cerc este $\dfrac{1}{6}\cdot a^2\pi - \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, și deci aria porțiunii hașurate este :

$$\mathcal{S} = \frac{a^2}{2}\pi - \frac{a^2}{4}\pi - \frac{a^2}{6}\cdot(2\pi - 3\sqrt{3}) = a^2\,\frac{6\sqrt{3} - \pi}{12}.$$

III.40[MPO]. În figura alăturată latura triunghiului echilateral are mărimea a cm. Calculați aria porțiunii hașurate.



R. Aria cerută este dublul diferenței ariilor celor două segmente de cerc. Prima dată aflăm aria segmentului mare de cerc :

$$\mathcal{S}_1 = \frac{a^2\pi}{6} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\cdot\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12}.$$

Aflăm acum aria segmentului mic :

$$\mathcal{S}_2 = \frac{\frac{a^2}{4}\pi}{6} - \frac{\frac{a^2}{4}\sqrt{3}}{4} = a^2\cdot\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{48}.$$

Aria cerută este :

$$\mathcal{S} = 2\cdot 3a^2\,\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{48} = a^2\cdot\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{8}\ \text{cm}^2.$$

CAPITOLUL IV

Probleme recapitulative şi de sinteză

IV.1. În triunghiul ABC, $m(\hat{A}) = 50°$ iar $\widehat{EBD}$ format de înălţimea $[BE]$ şi bisectoarea $[BD]$, are măsura de 15°.

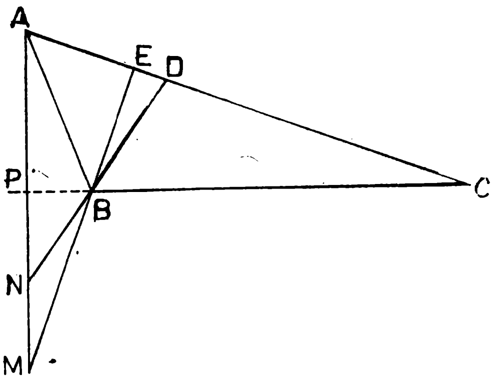
a) Ştiind că $AE < AD$ ($E, D \in$ dr.AC), aflaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

b) Dacă înălţimea „coborîtă" din vîrful A pe latura BC intersectează înălţimea BE în punctul M şi bisectoarea BD în punctul N, aflaţi unghiurile triunghiului MBN. (dr. AM intersectează dr. BC în punctul P).

c) Verificaţi care din triunghiurile formate sînt asemenea? Dar congruente?

R. a) În triunghiul $\widehat{BEA}$, unghiul $\widehat{ABE}$ are măsura de $90° - 50° = 40°$. Deoarece $[BD$ este bisectoare şi unghiul $\widehat{ABD}$ are măsura de 55°, unghiul $\widehat{ABC}$ are măsura de 110°. Atunci unghiul BCA are măsura de 20°.

b) În triunghiul NMB, unghiul $\widehat{NBM}$ este congruent cu unghiul $\widehat{EBD}$, fiind unghiuri opuse la vîrf, avînd măsura de 15°. Măsura unghiului $\widehat{NMB}$ se poate afla din triunghiul MEA şi este de $90° - (90° - 20°) = 20°$. Unghiul $\widehat{MNB}$ are măsura de $180° - (20° + 15°) = 145°$.

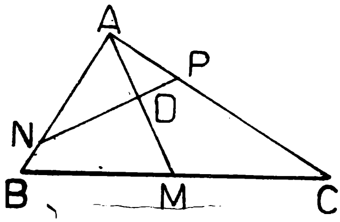


c) Triunghiurile BCE, ACP, BAP şi BMP au unghiurile $\widehat{CEB} \equiv \widehat{CPA} \equiv \widehat{APB} \equiv \widehat{MPB}$ cu măsura de 90° şi $\widehat{BCE} \equiv \widehat{ACP} \equiv \widehat{BAP} \equiv \widehat{BMP}$ cu măsura 20° deci sînt asemenea. Observăm că patrulaterul $APBE$ este inscriptibil, deoarece $m(\widehat{APB}) + m(\widehat{BEA}) = 180°$. Atunci $m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{EPB}) = 50°$. Dar $m(\widehat{PBE}) = m(\widehat{ABC}) = 110°$. Deci şi triunghiurile ABC şi PBE sînt asemenea.

Triunghiurile PBA şi PBM sînt congruente deoarece au cateta PB comună, unghiurile $m(\widehat{APB}) = m(\widehat{MPB}) = 90°$ şi $m(\widehat{PBA}) = m(\widehat{PBM}) = 70°$. Deci triunghiurile PBA şi PBM sînt congruente.

IV.2. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC ($m(\hat{A}) = 90°$) şi punctele $N \in$ dr.AB şi $P \in$ dr.AC. Demonstraţi că mediana AM este perpendiculară pe dr.NP dacă şi numai dacă $\widehat{ABC} \equiv \widehat{APN}$.

R. Fie $\{D\} =$ dr.$AM \cap$ dr.NP. Deoarece $[AM]$ mediană şi $m(\widehat{BAC}) = 90°$ rezultă $AM = MC = BM$, deci triunghiul AMC este isoscel, prin urmare $\sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle MCA$. Dacă dr. $AM \perp$



$\perp$ dr. NP avem $m(\widehat{NPA}) = 90° - m(\widehat{MAC})$, deci $m(\widehat{NPA}) = 90° - m(\widehat{MCA})$. Cum: $m(\widehat{ABC}) = 90° - m(\widehat{BCA}) = 90° - m(\widehat{MCA})$ rezultă $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle APN$. Deci, dacă mediana $[AM]$ este perpendiculară pe dr. NP, atunci $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle APN$. Reciproc, dacă $\sphericalangle APN \equiv \sphericalangle ABC$, $m(\widehat{ABC})$ $90° - m(\widehat{BCA})$, $\sphericalangle BCA \equiv \sphericalangle MCA \equiv \sphericalangle MAC$ ($[AM]$ mediană). Cum:

$$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{APN}) = 90° - m(\widehat{MAC})$$

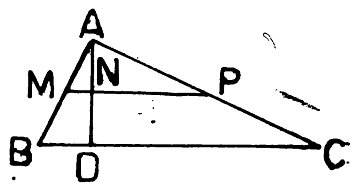
rezultă:

$$m(\widehat{ADP}) = 180° - 90° + m(\widehat{MAC}) - m(\widehat{MAC}) = 90°$$

deci dr. $AM \perp$ dr. NP.

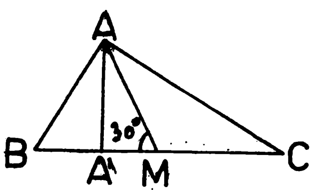
IV.3. Există triunghiuri în care mijloacele înălţimilor sînt coliniare?

R. Răspunsul este afirmativ: toate triunghiurile dreptunghice au această proprietate. În adevăr, fie ABC un triunghi dreptunghic ($m(\hat{A}) = 90°$) şi D piciorul înălţimii din A. Notăm cu M, N şi P respectiv mijloacele înălţimilor $[AB]$, $[AD]$ şi $[AC]$. Deoarece $[MN]$ şi $[NP]$ sînt linii mijlocii în triunghiurile ABD respectiv ADC, rezultă că dr. $MN \parallel$ dr. BC şi dr. $NP \parallel$ dr. BC.



Din axioma paralelelor rezultă atunci că M, N şi P sînt coliniare.

IV.4PO. Într-un triunghi dreptunghic înălţimea dusă din vîrful unghiului drept are lungimea egală cu un sfert din lungimea ipotenuzei. Să se construiască triunghiul cunoscînd lungimea ipotenuzei.



R. Demonstrăm că un astfel de triunghi are unghiurile ascuţite cu măsurile de 15° şi 75°. În adevăr, fie dr. $AA' \perp$ dr. BC şi M mijlocul lui $[BC]$. Atunci:

$$AM = \frac{BC}{2} = 2\,AA', \text{ deci } m(\widehat{AMA'}) = 30°;$$

de unde $m(\hat{C}) = m(\widehat{CAM}) = 15°$ (unghiul AMA' este exterior triunghiului isoscel AMC).

Construcţia: Din mijlocul M al lui $[BC]$ ca origine se duc două semidrepte care fac cu dr. BC unghiuri de 30° şi se ia pe fiecare din ele punctul A astfel încît $AM = \frac{1}{2} BC$. Problema are două soluţii.

IV.5PO. Se dă trapezul $ABCD$ înscris în cercul de diametru $[AB]$. Ştiind că dr. $AC \cap$ dr. $BD = \{I\}$ şi dr. $AD \cap$ dr. $BC = \{M\}$, să se arate că patrulaterul $MCID$ este inscriptibil. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABM în funcţie de lungimea razei R a cercului ştiind că $[DC] \equiv [BC]$.

R. Avem:

$$m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ADB}) = 90°$$

ca unghiuri înscrise într-un semicerc. Deci :

$$m(\widehat{BDM}) = m(\widehat{ACM}) = 90°$$

şi :

$$m(\widehat{MDI}) + m(\widehat{MCI}) = 90° + 90° = 180°$$

deci, patrulaterul $MCID$ este inscriptibil. Avem şi $[AD] \equiv [BC]$ deoarece dr. $AB \parallel$ dr. DC; dar $[BC] \equiv [DC]$ şi deci :

$$[AD] \equiv [DC] \equiv [CB].$$

Prin urmare, trapezul $ABCD$ este o ,,jumătate de hexagon regulat''. Deci :

$$m(\widehat{MAB}) = m(\widehat{MBC}) = 60°$$

adică triunghiul AMB este echilateral şi are lungimea perimetrului $6R$.

IV.6PO. Se dă triunghiul echilateral ABC şi un punct oarecare M pe (AC). Fie N şi P proiecţiile punctului M pe dr. BC şi respectiv pe dr. AB, iar $\{R\}$ = dr. $MN \cap$ dr. AB, $\{Q\}$ = dr. $PM \cap$ dr. BC. Să se arate că : 1) $m(\widehat{NPQ}) = m(\widehat{NRQ})$; 2) dr. $BM \perp$ dr. RQ.

R. 1) Fiindcă $m(\widehat{RPQ}) = m(\widehat{RNQ}) = 90°$, rezultă că patrulaterul $RPNQ$ este inscriptibil şi atunci $m(\widehat{NPQ}) = m(\widehat{NRQ}) = a$, ca unghiuri formate de diagonale cu laturi opuse.

2) În triunghiul RBQ, $[RN]$ şi $[QP]$ sînt înălţimi, deci M este ortocentrul acestui triunghi şi deci $[BM]$ este înălţime deci dr. $BM \perp$ dr. RQ.

IV.7PO. În triunghiul ABC, bisectoarea $[AD]$, înălţimea $[BE]$ şi mediana $[CF]$ determină triunghiul MNP.* Poate fi acest triunghi echilateral? (dr. $AD \cap$ dr. $BE = \{P\}$ şi dr. $AD \cap$ dr. $CF = \{N\}$).

R. Vom presupune, prin reducere la absurd că triunghiul MNP este echilateral. Atunci toate unghiurile sale au măsura de 60° şi deci $m(\widehat{MPN}) = 60°$. La fel, unghiul opus la vîrf lui $\widehat{MPN}$ este $\widehat{APE}$ cu măsura tot de 60°. Atunci în triunghiul APE vom avea :

$$m(\widehat{PAE}) = 180° - [m(\widehat{APE}) + m(\widehat{AEP})] = 180° - (60° + 90°) = 30°.$$

Deoarece $[AD$ este bisectoare şi $m(\widehat{DAC}) = 30°$, avem că $m(\widehat{BAC}) = 60°$; iar din triunghiul BAE se obţine :

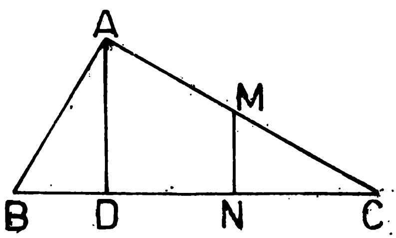
$$m(\widehat{ABE}) = 180° - [m(\widehat{BAE}) + m(\widehat{BEA})] = 180° - (60° + 90°) = 30°.$$

Deoarece $m(\widehat{FMB}) = m(\widehat{PMN}) = 60°$, în triunghiul FMB avem :

$$m(\widehat{BFM}) = 180° - [m(\widehat{FBM}) + m(\widehat{FMB})] = 180° - (60° + 30°) = 90°.$$

Dar, cum $m(\widehat{BFM}) = m(\widehat{BFC}) = 90°$, avem că $[FC]$ este mediană și înălțime, prin urmare triunghiul ABC este isoscel cu $[AC] \equiv [CB]$. Dar $m(\widehat{BAC}) = 60°$, deci triunghiul ABC este echilateral. În acest caz, înălțimea, mediana și bisectoarea duse din același vîrf se confundă. Cum toate liniile sînt concurente, rezultă că punctele M, N, P se suprapun, deci triunghiul MNP se reduce la un punct. Rămîne că triunghiul MNP nu este echilateral.

IV.8. Demonstrați că diferența pătratelor segmentelor determinate pe ipotenuza unui triunghi dreptunghic de perpendiculara dusă din mijlocul unei catete este egală cu pătratul celeilalte catete.



R. Fie M mijlocul catetei $[AC]$, iar D și N respectiv proiecțiile punctelor A și M pe ipotenuză. Deoarece $[MN]$ este linie mijlocie în triunghiul ACD, rezultă că $[CN] \equiv [ND]$. Avem :

$$BN^2 - CN^2 = (BN - CN)\cdot(CN+BN) =$$

$$= (BN - ND)\cdot BC = BD \cdot BC = AB^2,$$

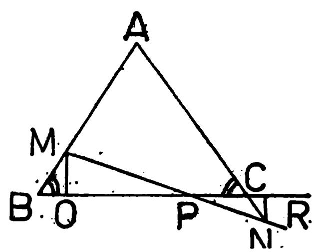
ceea ce trebuia demonstrat.

IV.9. În triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) se iau segmentele $[BM] \equiv [CN]$ (M între A și B, N pe „prelungirea" lui $[AC)$. Să se demonstreze că dr. BC trece prin mijlocul segmentului $[MN]$.

R. Vom duce perpendicularele dr.MO și dr.NR pe dreapta BC. Triunghiurile BMO și CNR sînt dreptunghice și au $BM = CN$ și $\sphericalangle MBO \equiv \sphericalangle NCR$ (ambele fiind congruente cu $\sphericalangle ACB$); deci triunghiurile BMO și CNR sînt congruente, de unde $MO = NR$.

Fie P intersecția dreptelor MN și BC Triunghiurile MOP și NPR sînt congruente fiind dreptunghice și avînd $MO = NR$, $\sphericalangle MPO \equiv \sphericalangle NPR$ (ca opuse la vîrf). Prin urmare :

$$[MP] \equiv [NP]$$



ceea ce înseamnă că dr.BC trece prin mijlocul segmentului $[MN]$.

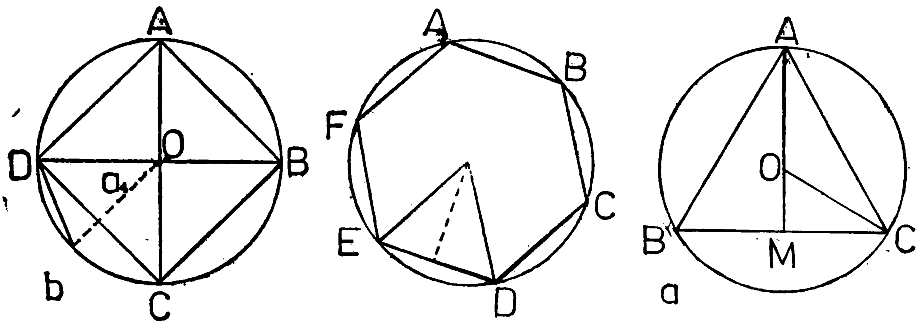
IV.10. Fie triunghiul isoscel ABC cu $m(\hat{A}) = 100°$. $[CM$ bisectoarea unghiului C, $M \in$ dr. AB, $[AD$ bisectoarea unghiului A și $\{P\} =$ dr. $CM \cap$ dr. AD. Bisectoarea unghiului CMB intersectează latura BC în N. Să se arate că $[NP$ este bisectoarea unghiului MNC.

IV.11[M]. Să se calculeze apotema a_n şi lungimea laturii l_n a unui poligon regulat cu n laturi, înscris în cercul cu raza de lungime r, pentru $n = 3,\ 4,\ 6,\ 8$.

R. Pentru $n = 3$, avem triunghiul echilateral înscris în cerc. Fie ABC acest triunghi, O centrul cercului şi dr.$AM \perp$ dr.BC. Atunci $m(\widehat{OBM}) = 30°$ şi deci $OM = a_3 = \frac{r}{2}$. Înălţimea $[AM]$ are lungimea $AM = \frac{3r}{2}$. Teorema lui PITAGORA aplicată triunghiului AMC ne dă:

$$3l_3^2 = 9r^2$$

de unde $l_3 = r\sqrt{3}$.



Pentru $n = 4$, un calcul imediat ne dă:

$$a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2};\ l_4 = r\sqrt{2}.$$

Pentru $n = 6$, $a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}$, $l_6 = r$; iar pentru $n = 8$ se obţine:

$$a_8 = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}};\ l_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

În general, avem relaţiile:

$$a_{2n} = \frac{1}{2}\sqrt{2r(r + a_n)}.$$

$$l_{2n} = \sqrt{2r(r - a_n)}.$$

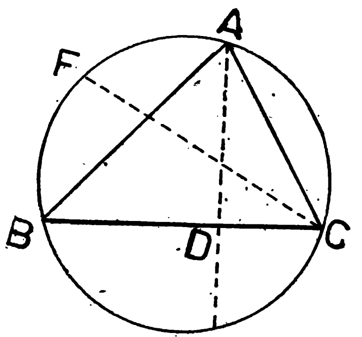
IV.12. Să se determine măsura arcului mic determinat de o latură a unui poligon regulat cu n laturi înscris într-un cerc $\mathscr{C}(O,\ r)$.

R. Fie $A_1A_2 \ldots A_n$ un poligon regulat cu n laturi înscris în $\mathscr{C}(O, r)$. Atunci:

$$m(\widehat{A_1OA_2}) = \frac{2 \cdot 180°}{n}.$$

IV.13PO. Punctele A, B, C determină pe cercul $\mathcal{C}(O, R)$ de rază 10 cm arcele $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ proporționale cu 6, $7\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$.

„Prelungirea" înălțimii AD a triunghiului ABC, intersectează cercul în E, iar bisectoarea unghiului $\hat{C}$ intersectează cercul în F. Aflați: a) perimetrul triunghiului ABC; b) lungimea segmentului $[EF]$.



R. a) Aflăm prima dată măsura arcelor determinate de punctele A, B, C pe cerc. Avem:

$$\frac{m(\overset{\frown}{AB})}{6} = \frac{m(\overset{\frown}{BC})}{7\frac{1}{2}} = \frac{m(\overset{\frown}{CA})}{4\frac{1}{2}} = \frac{360°}{18} = 20°;$$

De aici obținem: $m(\overset{\frown}{AB}) = 120°$, $m(\overset{\frown}{BC}) = 150°$, $m(\overset{\frown}{CA}) = 90°$. Aflăm lungimile laturilor triunghiului ABC. Dacă $m(\overset{\frown}{AB}) = 120°$, atunci $[AB]$ este latura triunghiului echilateral înscris, deci $AB = R\sqrt{3}$, adică $AB = 10\sqrt{3}$ cm.

Dacă $m(\overset{\frown}{CA}) = 90°$, atunci $[CA]$ este latura pătratului înscris, deci $CA = R\sqrt{2}$, adică $CA = 10\sqrt{2}$ cm.

Latura $[BC]$ se poate afla din triunghiul ABC cu teorema lui *Pitagora* generalizată, sau ducînd din centrul cercului o perpendiculară pe latura BC; în triunghiul dreptunghic format aflăm jumătate din lungimea laturii $[BC]$ cu funcția cos 15°.

În ambele cazuri obținem $BC = 10\sqrt{2+\sqrt{3}}$ cm sau $BC = 5\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$ cm. Perimetrul triunghiului este:

$$\mathcal{P} = AB + BC + CA = 5\cdot(2\sqrt{3}+\sqrt{6}+3\sqrt{2}).$$

b) Pentru a calcula lungimea segmentului $[EF]$, analizăm patrulaterul $FBEC$ în care $[EF]$ este diagonală. Deoarece dr. AE este perpendiculară pe dr. BC, suma măsurilor arcelor AB și EC este 180°. Dar $m(\overset{\frown}{AB}) = 120°$. Deci arcul $\overset{\frown}{EC}$ are 60°. $[CF]$ este bisectoarea unghiului C, deci împarte arcul $\overset{\frown}{AB}$ în două părți congruente și $m(\overset{\frown}{BF}) = 60°$. Arcele $\overset{\frown}{BF}$ și $\overset{\frown}{EC}$ avînd aceeași măsură, ele sînt determinate de coarde paralele. Atunci patrulaterul $EBFC$ este trapez isoscel. Diagonalele trapezului isoscel fiind congruente rezultă că:

$$FE = BC = 10\sqrt{2+\sqrt{3}}\text{ cm}.$$

IV.14. Se dă trapezul $ABCD$ înscris în cercul de diametru $[AB]$. Știind că dr. $AC \cap$ dr. $BD = \{I\}$ și dr. $AD \cap$ dr. $BC = \{M\}$, să se arate că patrulaterul $MCID$ este inscriptibil. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABM în funcție de lungimea razei R a cercului știind că $[DC] \equiv [BC]$.

R. Avem $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ADB}) = 90°$, ca înscrise într-un semicerc. Rezultă $m(\widehat{BDM}) = m(\widehat{ACM}) = 90°$; deci:

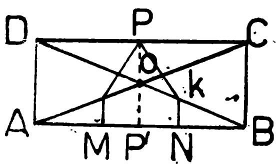
$$m(\widehat{MDI}) + m(\widehat{MCI}) = 90° + 90° = 180°;$$

prin urmare patrulaterul $MCID$ este inscriptibil. Avem $AD = BC$ deoarece dr. $AB \parallel$ dr. DC; dar $BC = CD$ și deci $AD = DC = CB$; prin urmare trapezul $ABCD$ este o „jumătate" de hexagon regulat. Deci $m(\widehat{MAB}) = m(\widehat{MBC}) = 60°$, adică triunghiul AMB este echilateral și are perimetrul $6R$.

IV.15. Se consideră un dreptunghi $ABCD$, în care $AB = DC = a$, $AD = BC = b$. Se împarte latura AB în trei părți egale și se notează cu

M şi N aceste puncte, M „mai aproape" de A. Se notează cu O intersecţia diagonalelor. Fie T şi K intersecţia diagonalelor (AC) şi (BD) cu perpendicularele ridicate în M şi N pe dr. AB şi fie P mijlocul laturii DC. Să se arate că dacă se notează cu p_1 perimetrul poligonului $MTPKN$ şi cu p_2 perimetrul dreptunghiului $ABCD$, atunci:

$$3p_1 - p_2 = \frac{16b^2}{\sqrt{a^2 + 16b^2} + a}.$$



R. Dacă p_2 este perimetrul dreptunghiului $ABCD$, atunci:

$$p_2 = 2(a + b); \quad p_1 = MN + NK + PK + PT + TM.$$

Din ipoteză $MN = \frac{a}{3}$. Să calculăm pe TM. Dacă notăm cu P' mijlocul laturii (AB) atunci $OP' = \frac{b}{2}$; triunghiurile TAM şi OAP' sînt asemenea, deci avem:

$$\frac{TM}{OP'} = \frac{AM}{AP'} \text{ de unde } TM = \frac{AM \cdot OP'}{AP'} = \frac{b}{3}.$$

Dar conform simetriei figurii, $MT = KN = \frac{b}{3}$. Deci:

$$p_1 = \frac{a}{3} + \frac{2b}{3} + PT + PK.$$

Avem

$$PT^2 = \frac{a^2}{36} + \frac{4b^2}{9} = \frac{a^2 + 16b^2}{36}.$$

Deci, $PT = \frac{\sqrt{a^2 + 16b^2}}{6}$; $PT = PK$ şi

$$p_1 = \frac{a + 2b + \sqrt{a^2 + 16b^2}}{3}.$$

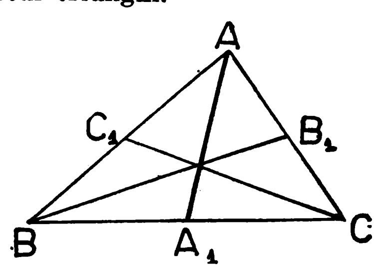
Avem:

$$3p_1 - p_2 = \sqrt{a^2 + 16b^2} - a = \frac{16b^2}{\sqrt{a^2 + 16b^2} + a}.$$

IV.16^M Cele trei laturi ale unui triunghi au lungimile de 10, 12 şi 8.

a) Calculaţi lungimile medianelor acestui triunghi.

b) Calculaţi cosinusurile măsurilor unghiurilor dintre mediane şi laturile corespunzătoare.



R. a) Construim triunghiul. Fie $AB = 10$, $BC = 12$, $CA = 8$.

Calculăm medianele cu ajutorul formulei:

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}.$$

Astfel:

$$AA_1 = \sqrt{\frac{2(64+100)-144}{4}} = \sqrt{46};$$

$$BB_1 = \sqrt{\frac{2(144+100)-64}{4}} = \sqrt{106};$$

$$CC_1 = \sqrt{\frac{2(144+64)-100}{4}} = \sqrt{79}.$$

b) Calculăm cosinusurile măsurilor unghiurilor dintre mediane și laturile corespunzătoare cu ajutorul teoremei lui PITAGORA generalizată.

Pentru unghiul $\widehat{CC_1A}$ aflăm din triunghiul CC_1A:

$$\cos \widehat{CC_1A} = \frac{C_1A^2 + C_1C^2 - AC^2}{2 \cdot C_1A \cdot C_1C} = \frac{5^2 + (\sqrt{79})^2 - 8^2}{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{79}} = \frac{4\sqrt{79}}{79},$$

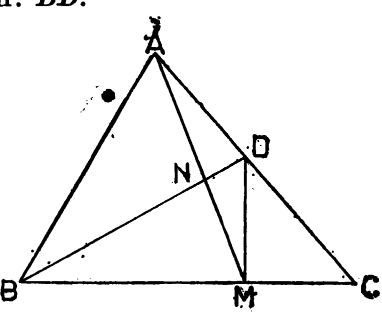
Pentru unghiul $\widehat{BB_1C}$ aflăm din triunghiul BB_1C:

$$\cos \widehat{BB_1C} = \frac{B_1B^2 + B_1C^2 - BC^2}{2\ B_1B \cdot B_1C} = \frac{(\sqrt{106})^2 + 4^2 - 12^2}{2 \cdot \sqrt{106} \cdot 4} = -\frac{11\sqrt{106}}{424}.$$

Pentru unghiul $\widehat{AA_1B}$ aflăm din triunghiul AA_1B:

$$\cos \widehat{AA_1B} = \frac{A_1A^2 + A_1B^2 - AB^2}{2 \cdot A_1A \cdot A_1B} = \frac{(\sqrt{46})^2 + 6^2 - 10^2}{2 \cdot \sqrt{46} \cdot 6} = -\frac{3\sqrt{46}}{92}.$$

IV.17[PO]. Măsurile unghiurilor triunghiului ABC sînt proporționale cu numerele 7, 6 și 5, iar laturile $AB = 12$ cm și $BC = 18$ cm. Aflați:
a) lungimea laturii $[AC]$;
b) lungimile segmentelor determinate de bisectoarea $[BD$ pe latura AC;
c) lungimile diagonalelor patrulaterului $BMDA$, unde M este proiecția lui D pe BC;
d) dacă dr. AM este perpendiculară pe dr. BD.



R. a) Lungimea laturii AC o aflăm din triunghiul ABC cu ajutorul teoremei lui PITAGORA generalizată:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \hat{B}$$

de unde:

$$AC = 6\sqrt{7} \text{ cm}.$$

b) Lungimile segmentelor determinate de bisectoarea $[BD]$ pe latura $[AC]$ le aflăm cu ajutorul teoremei bisectoarei:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC} = \frac{AD + DC}{AB + BC} = \frac{6\sqrt{7}}{30} = \frac{\sqrt{7}}{5}.$$

De aici $AD = \frac{12\sqrt{7}}{5}$ cm și $DC = \frac{18\sqrt{7}}{5}$ cm.

c) Lungimea diagonalei $[BD]$ o aflăm cu ajutorul teoremei lui STEWART din triunghiul ABC:

$$AB^2 \cdot DC + BC^2 \cdot AD - BD^2 \cdot AC = AD \cdot DC \cdot AC$$

Înlocuind datele cunoscute şi efectuînd calculele obţinem:

$BD = \dfrac{36\sqrt{3}}{5}$ cm. Din triunghiul DMB aflăm lungimea catetei $BM \cdot BM = BD \cdot \cos 30°$

Lungimea diagonalei $[AM]$ o aflăm din triunghiul ABM cu ajutorul teoremei lui PITAGORA generalizată:

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2 \cdot AB \cdot BM \cdot \cos 60° = \frac{6}{5} \cdot \sqrt{91} \text{ cm}.$$

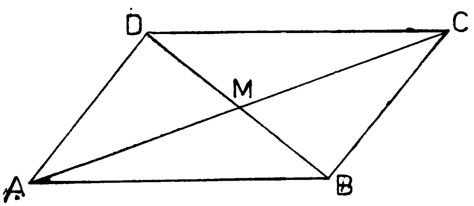
d) Pentru ca bisectoarea $[BD]$ să fie perpendiculară pe dr. AM este necesar ca triunghiul ABM să fie echilateral (unghiul B cu măsura de $60°$). Dar $AB = 12$ cm iar $BM = 10{,}8$ cm. Deci triunghiul nu este echilateral şi dr. BD nu este perpendiculară pe dr. AM.

IV. 18. Laturile unui paralelogram au lungimile de 5 şi 8, iar unul din unghiurile sale are $50°$.

a) Calculaţi lungimile diagonalelor;

b) Calculaţi cosinusurile măsurilor unghiurilor dintre diagonale şi laturi;

c) Calculaţi cosinusul măsurii unghiului dintre diagonale.



R. a) Fie $AB = 8$, $BC = 5$ şi $m(\hat{A}) = 50°$. Pentru diagonala $[BD]$ aflăm din triunghiul ABD cu teorema lui PITAGORA generalizată:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos A$$

de unde $BD = \sqrt{89 - 80 \cos 50°}$. Pentru diagonala $[AC]$ aflăm din triunghiul ABC cu teorema lui PITAGORA generalizată:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 130°$$
$$AC^2 = 64 + 25 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 130°$$

de unde

$$AC = \sqrt{89 + 80 \cos 50°}.$$

b) Cosinusurile măsurilor unghiurilor formate de diagonale şi laturi le aflăm din triunghiurile ABC şi ABD. În triunghiul ABC avem:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$$

de unde:

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{8 + 5 \cos 50°}{\sqrt{89 + 80 \cos 50°}}.$$

La fel, avem:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos \widehat{ACB}$$

de unde:

$$\cos \widehat{ACB} = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2BC \cdot AC} = \frac{5 + 8 \cos 50°}{\sqrt{89 + 80 \cos 50°}}.$$

În triunghiul ABD avem:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cos \widehat{ABD}$$

de unde:

$$\cos \widehat{ABD} = \frac{AB^2 + BD^2 - AD^2}{2AB \cdot BD} = \frac{8 - 5\cos 50^\circ}{\sqrt{89 - 80\cos 50^\circ}}.$$

La fel avem:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cos \widehat{ADB}$$

de unde:

$$\cos \widehat{ADB} = \frac{AD^2 + BD^2 - AB^2}{2AD \cdot BD} = \frac{5 - 8\cos 50^\circ}{\sqrt{89 - 80\cos 50^\circ}}.$$

c) Cosinusul măsurii unghiului dintre diagonale se poate calcula din triunghiul AMD cu teorema lui PITAGORA generalizată.

$$AD^2 = AM^2 + DM^2 - 2AM \cdot DM \cos \widehat{AMD}$$

de unde:

$$\cos \widehat{AMD} = \frac{AM^2 + DM^2 - AD^2}{2\,AM \cdot DM} = \frac{39}{\sqrt{7921 - 6400\cos^2 50^\circ}}.$$

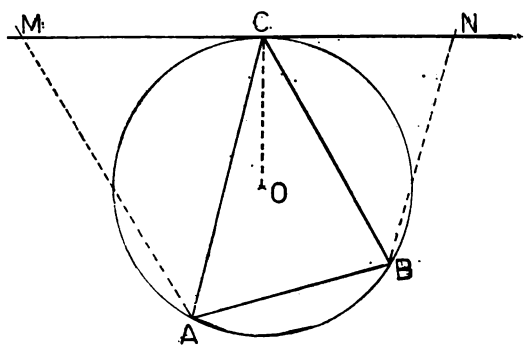
IV. 19. Măsurile unghiurilor triunghiului ABC sînt proporționale cu numerele 4, 5 și respectiv 3. Paralelele duse prin punctele A și B la laturile $[BC]$ respectiv la $[AC]$ intersectează tangenta dusă în C la cercul circumscris triunghiului ABC în punctele M și respectiv N.

1) Arătați, fără a calcula măsurile unghiurilor triunghiului ABC, că patrulaterul $AMNB$ este inscriptibil.

2) Aflați perimetrul triunghiului ABC în funcție de lungimea R a razei cercului circumscris triunghiului.

3) Calculați, în funcție de R, aria patrulaterului $AMNB$.

R. 1) Dreptele AM și BC fiind paralele iar dr. MN secantă, unghiurile AMN și BCN sînt congruente ca unghiuri corespondente. Măsura unghiului BCN este jumătate din măsura arcului BC. Deci și măsura unghiului AMC este egală cu jumătate din măsura arcului BC.



Unghiul opus unghiului AMC este unghiul ABN care are ca măsură suma măsurilor unghiurilor ABC și CBN.

Măsura unghiului ABC este egală cu jumătate din măsura arcului CA. Măsura unghiului CBN este egală cu jumătate din măsura arcului AB, deoarece unghiurile CBN și BCA sînt congruente ca unghiuri alterne interne (dr.$AC \parallel$ dr.BN, BC secantă).

Deci suma măsurilor unghiurilor AMN și ABN este jumătate din suma măsurilor arcelor $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ și $\overset{\frown}{CA}$ adică 180°. Prin urmare patrulaterul $ABNM$ este inscriptibil.

2) Pentru a calcula lungimile laturilor triunghiului ABC mai întîi calculăm măsurile unghiurilor triunghiului. Avem:

$$\frac{m(\hat{A})}{4} = \frac{m(\hat{B})}{5} = \frac{m(\hat{C})}{3} = \frac{180^\circ}{12}$$

de unde $m(\hat{A}) = 60^\circ$, $m(\hat{B}) = 75^\circ$, $m(\hat{C}) = 45^\circ$.

Dacă $m(\hat{A}) = 60°$ atunci $m(\widehat{BC}) = 120°$, iar $BC = R\sqrt{3}$. Din $m(\hat{C}) = 45°$ rezultă $m(\widehat{AB}) = 90°$, iar $AB = R\sqrt{2}$. Latura AC o aflăm cu ajutorul teoremei lui PITAGORA generalizată:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B = 2R^2 + 3R^2 - 2 \cdot R\sqrt{2} \cdot R\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.$$

Efectuînd calculele obținem:

$$AC = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot R = R \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}.$$

Perimetrul triunghiului ABC este:

$$\mathcal{P} = R\sqrt{2} + R\sqrt{3} + R\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} = R\,\frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{2},$$

3) Înălțimea triunghiului ABC, „coborîtă" din vîrful B pe latura $[AC]$ este egală cu $AB \cdot \sin A$, adică cu $\frac{R\sqrt{6}}{2}$.

Aria triunghiului ABC este:

$$\mathcal{S} = \frac{R \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \cdot R \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{4} R^2.$$

Din asemănarea triunghiurilor MAC și ACB avem:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{R \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{2}) : 2}{R \cdot \sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{6}}{6}$$

Aria triunghiului MAC este:

$$\mathcal{S} = \left(\frac{3 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{6}}{6}\right)^2 \cdot \frac{3 + \sqrt{3}}{4} R^2 = \frac{9 + 5\sqrt{3}}{12} R^2.$$

Din asemănarea triunghiurilor CBN și ACB avem:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{R \cdot \sqrt{3}}{R \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{2}) : 2} = \frac{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})}{2}.$$

Aria triunghiului CBN este:

$$\mathcal{S} = \left(\frac{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})}{2}\right)^2 \cdot \frac{3 + \sqrt{3}}{4} R^2 = \frac{3 \cdot (3 - \sqrt{3})}{4} R^2.$$

Aria patrulaterului $AMNB$ este:

$$\mathcal{S} = \left(\frac{3 \cdot (3 - \sqrt{3})}{4} + \frac{3 + \sqrt{3}}{4} + \frac{9 + 5\sqrt{3}}{12}\right) \cdot R^2 = \frac{45 - \sqrt{3}}{12} \cdot R^2.$$

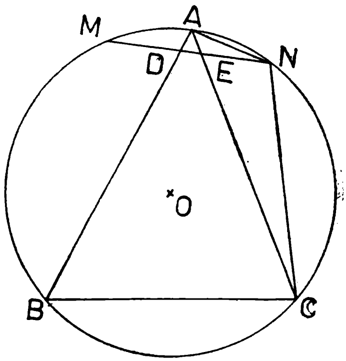
IV. 20^{PO}. Triunghiul ABC are $\hat{A}$ de $50°$ și $\hat{B}$ de $60°$. Pe cercul circumscris triunghiului se iau arcele $\widehat{AM} \equiv \widehat{AN}$ avînd măsura de $30°$

($M \in \overset{\frown}{AB}$, $N \in \overset{\frown}{AC}$). Coarda $[MN]$ intersectează laturile $[AB]$ şi $[AC]$ ale triunghiului în punctele D şi respectiv E.

a) Arătaţi că inscriptibilitatea patrulaterului $BCED$ nu depinde de măsura unghiurilor triunghiului, nici de măsura arcelor AM şi AN, doar de congruenţa acestor două arce.

b) Aflaţi perimetrul triunghiului ACN în funcţie de R, lungimea razei cercului circumscris triunghiului.

R. a) Pentru a arăta că inscriptibilitatea patrulaterului $BCED$ nu depinde de măsura unghiurilor triunghiului, demonstrăm inscriptibilitatea fără a folosi măsura unghiurilor triunghiului. Măsura unghiului $\widehat{BDE}$ este semisuma măsurilor arcelor $\overset{\frown}{MA}$ şi $\overset{\frown}{NCB}$. Măsura unghiului $\widehat{BCE}$ este egală cu jumătate din măsura arcului $\overset{\frown}{BMA}$. Suma măsurilor arcelor $\overset{\frown}{MA}$, $\overset{\frown}{NCB}$ şi $\overset{\frown}{BMA}$ este egală cu $360° - m(\overset{\frown}{AN}) + m(\overset{\frown}{MA})$. Dar arcele $\overset{\frown}{MA}$ şi $\overset{\frown}{AN}$ sînt congruente,deci suma măsurilor unghiurilor opuse în patrulaterul $BCED$ este 180°. Prin urmare patrulaterul $BCED$ este inscriptibil, orice măsură ar avea unghiurile triunghiului ABC sau arcele AM şi AN, dar este necesar ca aceste arce să fie congruente.



b) Unghiul ABC avînd măsura de 60°, arcul ANC are măsura de 120° iar coarda $[AC]$ are lungimea de $R\sqrt{3}$. Arcul NC are măsura de 90°, deci coarda NC are lungimea $R\sqrt{2}$.

Latura AN se poate calcula din triunghiul isoscel AON cu ajutorul funcţiei sinus, sau din triunghiul ACN cu ajutorul teoremei lui PITAGORA generalizată. Obţinem $AN = R \cdot \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$. Perimetrul triunghiului este :

$$\mathcal{P} = R\sqrt{3} + R\sqrt{2} + R\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} R.$$

IV. 21.[PO]. Demonstraţi că în orice poligon convex cu 21 de laturi există două diagonale care formează între ele un unghi cu măsura mai mică de 1°.

R. Fie P un punct din planul poligonului. Ducînd prin P paralele la cele $\dfrac{21 \cdot 18}{2} = 189$ diagonale ale poligonului, în jurul lui P se formează $2 \cdot 189 = 378$ unghiuri. Cum suma măsurilor unghiurilor din jurul unui punct este de 360°, cel puţin unul din cele 378 unghiuri are măsura mai mică decît 1°. Diagonalele cu proprietatea din enunţ sînt cele paralele cu laturile acestui unghi.

IV. 22.[M] Calculaţi aria unui triunghi ale cărui laturi au lungimile de 13, 20 şi 21.

R. Fie ABC triunghiul în care $AB = 13$, $AC = 20$ şi $BC = 21$. Teorema lui PITAGORA generalizată aplicată în acest triunghi ne dă :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B$$

de unde :

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC}$$

Cum $\sin \hat{B} = \sqrt{1 - \cos^2 B}$ rezultă :

$$\mathcal{S}_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \sin B}{2} = 126.$$

Observaţie. Dacă se cunosc lungimile laturilor a, b, c ale unui triunghi, mărimea ariei sale poate fi calculată folosind o relaţie numită formula lui HERON :

$$\mathcal{S} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\text{unde } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

IV. 23. Trei cercuri neegale, tangente exterior două cîte două, au centrele în punctele O_1, O_2 şi O_3 şi razele de lungimi egale cu R_1, R_2 şi respectiv R_3. Aflaţi aria triunghiului $O_1O_2O_3$.

R. Cunoscînd lungimile laturile triunghiului, aflăm aria triunghiului cu ajutorul formulei lui HERON :

$$\mathcal{S} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

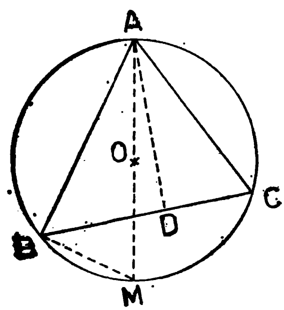
unde $p = R_1 + R_2 + R_3$; $p - a = R_1$; $p - b = R_2$; $p - c = R_3$.
Deci aria triunghiului este :

$$\mathcal{S} = \sqrt{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot (R_1 + R_2 + R_3)}\ .$$

IV.24[MPO]. Se dă triunghiul oarecare ABC cu măsurile laturilor : $AB = 10$ cm, $BC = 12$ cm şi $CA = 14$ cm.

a) Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului.

b) Generalizaţi problema. Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului dacă laturile acestuia au lungimile a, b, c.



R. Ducem diametrul $[AM]$ al cercului. Triunghiurile ADC şi ABM sînt asemenea. Lungimea înălţimii $[AD]$ se află împărţind dublul ariei triunghiului la lungimea laturii $[BC]$. Aflăm aria triunghiului ABC cu ajutorul formulei lui HERON. Avem :

$$p = 18,\ p - c = 8,\ p - a = 6,\ p - b = 4,$$

de unde :

$$\mathcal{S} = \sqrt{18 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4} = 24\sqrt{6} \text{ cm}^2.$$

Atunci $AD = 2 \cdot 24\sqrt{6} : 12 = 4\sqrt{6}$ cm. Din proporţionalitatea laturilor triunghiurilor asemenea ADC şi ABM avem : $\frac{AB}{AD} = \frac{AM}{AC}$, de unde, raza are lungimea $\frac{35\sqrt{6}}{12}$ cm.

b) Dacă laturile triunghiului ABC sînt a, b, c, atunci lungimea înălţimi AD este de $\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$.

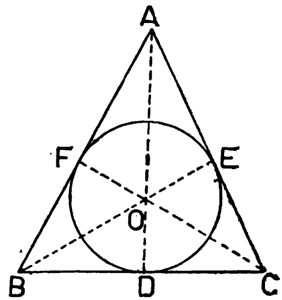
Din proporţia de mai sus avem :

$$2R = \frac{c \cdot b}{\dfrac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}}$$

de unde:

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

IV. 25. În triunghiul isoscel ABC este înscris un cerc. Laturile $[AB] \equiv [AC]$, $AB = 13$ cm, iar baza $[BC]$ are **10** cm. Să se calculeze raza cercului înscris.



R. Deoarece:

$$\mathcal{S}_{ABC} = \mathcal{S}_{BOC} + \mathcal{S}_{COA} + \mathcal{S}_{AOB}$$

rezultă:

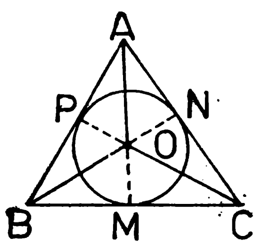
$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{BC \cdot r}{2} + \frac{CA \cdot r}{2} + \frac{AB \cdot r}{2}$$

de unde $r = \frac{60}{18}$, sau $r = 3\frac{1}{3}$ cm.

IV. 26[PO]. Se dă triunghiul oarecare ABC cu lungimile laturilor: $AB = 16$ cm, $BC = 12$ cm, $CA = 14$ cm.

Aflați lungimea razei cercului înscris în triunghi.

Generalizați problema. Calculați lungimea razei cercului înscris, dacă laturile triunghiului sînt a, b, c.



R. Dacă unim centrul cercului cu fiecare din vîrfurile triunghiului ABC, obținem trei triunghiuri. Suma ariilor triunghiurilor AOB, BOC și COA este egală cu aria triunghiului ABC. Avem deci:

$$\frac{BC \cdot r}{2} + \frac{CA \cdot r}{2} + \frac{AB \cdot r}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

iar de aici $r = \sqrt{21 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5} : (6 + 7 + 8) = \sqrt{15}$ cm.

Generalizînd problema obținem $r = \dfrac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{\dfrac{a+b+c}{2}}$,

sau $r = \dfrac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$.

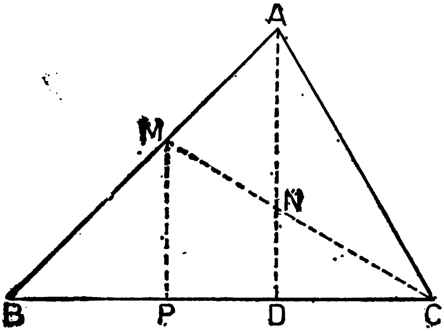
IV. 27[PO]. Măsurile unghiurilor triunghiului ABC sînt direct proporționale cu numerele 5, 3 respectiv 4. Înălțimea $[AD]$ are lungimea $10\sqrt{3}$ cm și intersectează bisectoarea CM în punctul N. ($D \in$ dr. BC, $M \in$ dr. AB). Din M „coborîm" perpendiculara MP pe latura BC ($P \in$ dr. BC). Aflați: a) perimetrul triunghiului ABC; b) perimetrul patrulaterului $MPDN$; c) aria triunghiului ANC.

R. a) Aflăm măsurile unghiurilor triunghiului ABC. Avem:

$$\frac{m(\hat{A})}{5} = \frac{m(\hat{B})}{3} = \frac{m(\hat{C})}{4} = \frac{180^\circ}{12} = 15^\circ$$

deci: $m(\hat{A}) = 75^\circ$, $m(B) = 45^\circ$, $m(\hat{C}) = 60^\circ$.

Triunghiul DAB este dreptunghic isoscel deci $BD = 10\sqrt{3}$ cm iar $AB = 10\sqrt{6}$ cm. În triunghiul ADC, unghiul C avînd măsura de 60° iar unghiul D de 90° avem $DC = \dfrac{AD}{\operatorname{tg} 60^\circ}$, de unde $DC = 10$ cm şi $AC = 20$ cm. Perimetrul triunghiului ABC este:



$$\mathcal{P} = AB + BC + CA = 10(3 + \sqrt{3} + \sqrt{6}) \text{ cm.}$$

b) Calculăm lungimile laturilor trapezului $PDNM$. Din triunghiul dreptunghic DCN avem: $DN = DC \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$, de unde $DN = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$ cm.

Aflăm MB aplicînd teorema bisectoarei:

$$\frac{MB}{MA} = \frac{BC}{AC}.$$

Înlocuind, obţinem:

$$\frac{MB}{10\sqrt{6}} = \frac{10\sqrt{3} + 10}{10\sqrt{3} + 30}.$$

şi efectuînd rezultă $MB = 10\sqrt{2}$ cm.

În triunghiul BPM, $BP = 10$ cm. Atunci $PD = 10\sqrt{3} - 10 = 10(\sqrt{3} - 1)$

Din triunghiul dreptunghic PCM putem afla lungimea lui $[MC]$. Deoarece:

$$MC^2 = MP^2 + PC^2$$

rezultă $MC = 20$ cm iar din triunghiul dreptunghic DCN avem: $NC^2 = DN^2 + DC^2$, de unde $NC = \dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ cm. Atunci:

$$MN = MC - NC = 20\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right) \text{cm.}$$

Perimetrul patrulaterului $MPDN$ este:

$$\mathcal{P} = MP + PD + DN + NM = 10 + 10(\sqrt{3} - 1) + \frac{10\sqrt{3}}{3} + 20\,\frac{3 - \sqrt{3}}{3} =$$

$$= 10\,\frac{2\sqrt{3} + 6}{3} \text{ cm.}$$

c) Aflăm aria triunghiului NCA cu ajutorul formulei lui Heron:

$$\mathcal{S} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

Triunghiul este isoscel, avînd două unghiuri cu măsura de 30°, deci $NA = NC$. Atunci avem:

$$p = \left(20 + 2 \cdot \frac{20\sqrt{3}}{3}\right) : 2 = 10 + \frac{20\sqrt{3}}{3}\ ;\ p - a = \frac{20\sqrt{3}}{3} - 10\ ;\ p - b = p - c = 10.$$

Deci:

$$\mathcal{S} = 10 \cdot \sqrt{\frac{400 \cdot 3}{9} - 100} = 100\,\frac{\sqrt{3}}{3}\ \text{cm}^2.$$

Observație. Se poate afla aria și în mod obișnuit calculînd lungimea înălțimii corespunzătoare laturii AC care va fi $\frac{10\sqrt{3}}{3}$.

IV. 28. Paralelogramul $ABCD$ are $m(\hat{A}) = 60°$, $AB = 2a$ și $AD = a$. În exteriorul paralelogramului construim pătratele $ABEF$, $BCGH$, $CDIK$ și $DALM$.

a) Ce putem spune despre punctele L, M și I? Dar despre H, B, D și M?

b) Calculați aria și perimetrul hexagonului $FEGKIL$.

R. a) În triunghiul MDI avem: $MD = a$, $DI = 2a$, $m(\widehat{MDI}) = 60°$, deci triunghiul este dreptunghic și dr. $DM \perp$ dr. MI. Dar dr. $DM \perp$ dr. ML pentru că $ADML$ este pătrat. Deci punctele L, M și I sînt coliniare.

Triunghiurile ABD și CDB sînt, la fel ca triunghiul MDI, dreptunghice pentru că lungimile a două laturi sînt a și $2a$ iar unghiul cuprins între aceste laturi este de 60°. De aici rezultă că dr. BD este perpendiculară pe dr. AD și pe dr. BC. Dar dr. $MD \perp$ dr. AD și dr. $HB \perp$ dr. BC. Prin urmare am obținut că punctele H, B, D și M sînt coliniare.

b) Aria hexagonului $FEGKIL$ este formată din aria paralelogramului $ABCD$ adunată cu dublul ariei pătratului $ADML$, cu dublul ariei triunghiului LAF, cu dublul ariei pătratului $ABEF$ și cu dublul ariei triunghiului BEH. Aria paralelogramului $ABCD$ este;

$$\mathcal{S} = 2a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a^2\sqrt{3}.$$

Pentru a putea calcula aria triunghiului ALF, calculăm întîi lungimea laturii LF, cu ajutorul teoremei lui PITAGORA generalizată. Avem:

$$LF^2 = LA^2 + AF^2 - 2 \cdot AL \cdot AF \cdot \cos 120°$$

de unde obținem $LF = a\sqrt{7}$.
Aria triunghiului LAF o calculăm cu ajutorul formulei lui HERON:

$$\mathcal{S} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} = \sqrt{\frac{3a + a\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{a + a\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{7} - a}{2} \cdot \frac{3a - a\sqrt{7}}{2}} =$$

$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Aria triunghiului BEH este:

$$\mathcal{S}_{BEH} = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Aria hexagonului este deci:

$$\mathcal{S}_h = a^2\sqrt{3} + 2 \cdot a^2 + 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot 4a^2 + 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

Efectuînd calculele obținem:

$$\mathcal{S}_h = a^2 \cdot (10 + 3\sqrt{3}).$$

Perimetrul hexagonului este:

$$\mathcal{P} = 2 \cdot FE + 2 \cdot EG + 2 \cdot GK = 2 \cdot 2a + 2 \cdot (a\sqrt{3} + a) + 2 \cdot a\sqrt{7} = 2a \cdot (3 + \sqrt{3} + \sqrt{7}).$$

IV. 29. Un paralelogram $ABCD$ are laturile de lungimi: $AB = 30$ cm, $AD = 20$ cm și unghiul $\hat{A}$ de $60°$. Construim dr. $DM \perp$ dr. AB ($M \in$ dr. AB) și dr. $DN \perp$ dr. BC ($N \in$ dr. BC). „Prelungirea" segmentului $[DM]$ intersectează „prelungirea" laturii CB în punctul E. Aflați: a) lungimea segmentelor $[AE]$, $[BD]$, $[DN]$ și $[MN]$; b) aria patrulaterului $AECD$; c) valoarea logică a relației: $DE^2 - AC^2 = \frac{EB^2}{2}$.

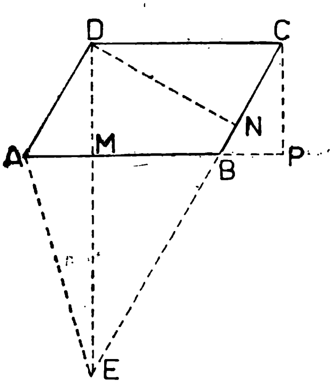
R. a) Aflăm DM, lungimea înălțimii paralelogramului, din triunghiul dreptunghic AMD:

$$DM = 20 \cdot \sin 60° = 10\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Din triunghiul dreptunghic ECD aflăm DE:

$$DE = 30 \cdot \operatorname{tg} 60° = 30\sqrt{3} \text{ cm}.$$

În triunghiul dreptunghic AME avem: $AM = 10$ cm, $ME = 20\sqrt{3}$ cm și putem afla AE: $AE = 10\sqrt{13}$ cm. Pe $[BD]$ îl calculăm din triunghiul dreptunghic DMB cu ajutorul teoremei lui



Pitagora și obținem: $BD = 10\sqrt{7}$ cm. Aria paralelogramului se poate calcula luînd ca bază oricare din laturi (aria este aceeași). Atunci:

$$AB \cdot DM = BC \cdot DN$$

de unde $DN = 15\sqrt{3}$ cm. Pentru a calcula lungmea $[MN]$ trebuie observat că patrulaterul $MBND$ este inscriptibil ($m(\hat{M}) + m(\hat{N}) = 180°$). Pentru a putea aplica teorema lui Ptolomeu aflăm întîi BN din triunghiul dreptunghic NDB: $BN = 5$ cm. Din patrulaterul inscriptibil $MBND$ avem deci:

$$MN = \frac{DN \cdot MB + DM \cdot BN}{BD} \text{ cm}^2 = 5\sqrt{21} \text{ cm}.$$

b) dr. AD fiind paralelă cu dr. EC, patrulaterul $AECD$ este trapez. Aria trapezului va fi:

$$\mathcal{S} = \frac{(60 + 20) \cdot 15\sqrt{3}}{2} = 600\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

c) Pentru verificarea relației $DE^2 - AC^2 = \frac{EB^2}{2}$ avem nevoie de AC pe care-l calculăm din triunghiul dreptunghic PCA și obținem: $AC = 10\sqrt{19}$ cm. Verificăm relația:

$$(30\sqrt{3})^2 - (10\sqrt{19})^2 = \frac{40^2}{2}$$

sau :

$$2700 - 1900 = 800.$$

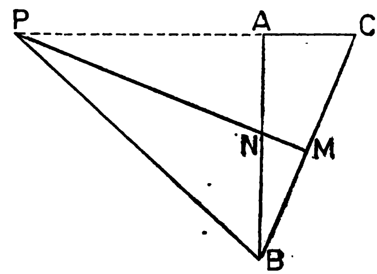
Deci valoarea logică a relației este 1.

IV. 30 PO. Triunghiul dreptunghic ABC are lungimile catetelor: $AB = 12$ cm și $AC = 5$ cm. În mijlocul M al ipotenuzei $[BC]$ „ridicăm" o perpendiculară care intersectează dr. AB în punctul N iar dr. AC în punctul P. Aflați: perimetrul triunghiului MNB; aria triunghiului ANP; lungimea segmentului $[BP.]$

R. Ipotenuza triunghiului ABC este $[BC]$ și are lungimea de 13 cm. Din asemănarea triunghiurilor ABC și MBN avem:

$$\frac{NM}{CA} = \frac{MB}{AB} = \frac{NB}{CB}.$$

De aici, $NM = \frac{65}{24}$ cm și $NB = \frac{169}{24}$ cm. Perimetrul triunghiului MNB este egal cu 16,25 cm, iar pentru a putea calcula aria triunghiului ANP aflăm întîi lungimile catetelor $[AP]$ și $[AN]$ ale triunghiului. Din asemănarea triunghiurilor ANP și MCP avem:



$$\frac{AN}{MC} = \frac{AP}{MP} = \frac{NP}{CP}.$$

De aici $AP = 11{,}9$ cm și $AN = \frac{119}{24}$ cm. Aria triunghiului ANP este deci egală cu $29\frac{241}{480}$ cm^2.

Patrulaterul $APBM$ este inscriptibil. Aflăm PB cu ajutorul teoremei lui Ptolemeu:

$$PB = (AB \cdot MP - PA \cdot BM) : AM.$$

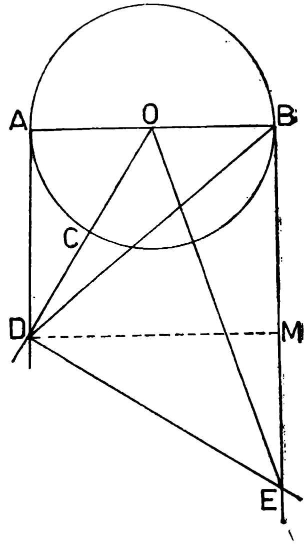
Cum $NP = 12\frac{107}{120}$ cm (din triunghiul PAN), iar $AM = 6{,}5$ cm $\left(\frac{BC}{2} \text{ în } \Delta ABC\right)$ avem:

$$PB = \left[12 \cdot \left(\frac{1547}{120} + \frac{65}{24}\right) - 11{,}9 \cdot 6{,}5\right] : 6{,}5 = 16{,}9 \text{ cm}.$$

VI. 31 PO. Demonstrați că interiorul unui cerc nu poate fi „acoperit" complet cu două cercuri mai mici.

R. Fie $\mathscr{C}(O, r)$ cercul mare și $\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$, $\mathscr{C}_2(O_2, r_2)$ cercurile mai mici. Dacă O_1 și O_2 coincid cu O, problema este rezolvată. Putem presupune deci că $O_1 \neq O$. Fie $[AB]$ diametrul lui $\mathscr{C}$ perpendicular pe dr. OO_1. Vom arăta că cel puțin unul din punctele A, B nu este „acoperit" de $\mathscr{C}_1$ și $\mathscr{C}_2$. În adevăr, punctele A și B sînt exterioare lui $\mathscr{C}_1$ pentru că $O_1A = O_1B > OB = r > r_1$, iar cercul $\mathscr{C}_2$ nu poate acoperi și pe A și pe B, deoarece, în caz contrar, ar rezulta $AB \leqslant 2r_2 < 2r = AB$, absurd.

VI. 32 PO. În capetele A și B ale diametrului $[AB]$ se construiesc, de aceeași parte a diametrului, două tangente la cercul $\mathscr{C}(O, R)$. Luăm, de aceeași parte cu tangentele, raza $[OC]$ astfel ca $m(\widehat{AOC}) = 60°$. „Prelungirea" razei $[OC$ intersectează tangenta în A la cerc în punctul D. Perpendiculara în D pe dr. OD intersectează tangenta în B la cerc în punctul E. Aflați : a) perimetrul patrulaterului $ADEB$; b) diagonalele patrulaterului $ODEB$ în funcție de R, lungimea razei cercului ; c) ce fel de patrulater este patrulaterul $ODEB$?



R. a) Perimetrul patrulaterului $ADEB$ este suma lungimilor laturilor AD, DE, EB și BA. Cunoaștem latura $AB=2R$. triunghiul dreptunghic OAD, unghiul AOD avînd măsura de $60°$, latura $AD = R\sqrt{3}$.
Triunghiurile OAD și EMD fiind asemenea $((m(\hat{A}) = m(\hat{M}) = 90°, m(\widehat{ADO}) = m(\widehat{MDE}) = 30°)$, avem :

$$\frac{AD}{MD} = \frac{DO}{DE}$$

de unde $DE = \dfrac{4R^2}{R\sqrt{3}}$ sau încă $DE = \dfrac{4\sqrt{3}\,R}{3}$.

Observăm că :

$$BM + ME = \frac{5\sqrt{3}\,R}{3}.$$

Perimetrul patrulaterului $ADEB$ este :

$$\mathcal{P} = R\sqrt{3} + \frac{4\sqrt{3}\,R}{3} + \frac{5\sqrt{3}\,R}{3} + 2R = 2R\cdot(2\sqrt{3} + 1).$$

b) Diagonala OE a patrulaterului $ODEB$ o aflăm din triunghiul dreptunghic ODE cu teorema lui PITAGORA :

$$OE^2 = OD^2 + DE^2$$

de unde $OE = \dfrac{2}{3}R\sqrt{21}$. Diagonala $[BD]$ o putem afla din triunghiul dreptunghic BAD cu teorema lui PITAGORA sau observînd că patrulaterul $ODEB$ este inscriptibil, cu teorema lui PTOLEMEU și obținem $BD = R\sqrt{7}$.

c) Deoarece în patrulaterul $ODEB$ avem : $m(\widehat{ODE}) + m(\widehat{OBE}) = 90° + 90° = 180°$, patrulaterul este inscriptibil.

IV. 33 PO. Aflați $\sin 15°$ cu ajutorul triunghiului echilateral înscris în cercul cu raza de lungime R.

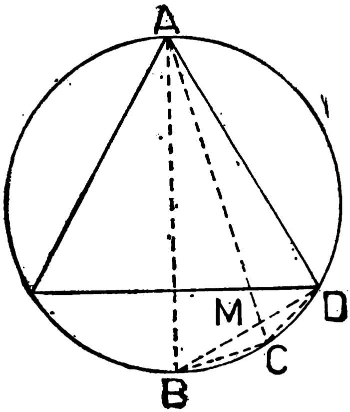
R. În triunghiul dreptunghic ABC (înscris într-un semicerc) avem :

$$\sin 15° = \frac{BC}{AB}$$

de unde $BC = 2R\cdot\sin 15°$ ($[AC$ bisectoarea unghiului $\widehat{BAD}$). Aflăm AC cu teorema lui PITAGORA :

$$AC = \sqrt{4R^2(1 - \sin^2 15°)}.$$

În patrulaterul inscriptibil $ABCD$ aplicăm teorema lui **Ptolomeu**:



$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = BD \cdot AC.$$

Mai știm că $BC = CD$, deoarece $[AC$ este bisectoare. Rezultă:

$$2R \cdot 2R \cdot \sin 15^\circ + R\sqrt{3} \cdot 2R \sin 15^\circ = R \cdot 2R\sqrt{1 - \sin^2 15^\circ}$$

și efectuînd calculele, obținem:

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{4}.$$

Observație. Cunoscînd $\sin 15^\circ$ putem afla $\cos 15^\circ$, $\sin 75^\circ$, $\cos 75^\circ$. Astfel, din relația $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, pentru $x = 15^\circ$ se obține:

$$\cos 15^\circ = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Cum $\sin x = \cos (90^\circ - x)$, rezultă:

$$\cos 75^\circ = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}; \quad \sin 75^\circ = \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

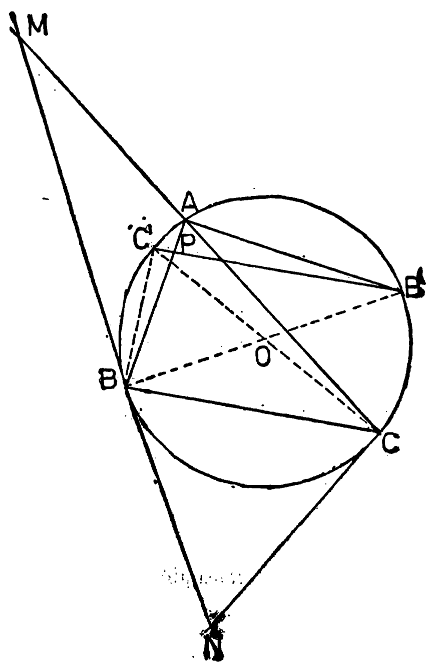
IV. 34 ^{PO}. Măsurile unghiurilor triunghiului ABC sînt invers proporționale cu numerele $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ și $\frac{1}{3}$. B' și C' sînt puncte pe cercul circumscris triunghiului, diametral opuse vîrfurilor B și C. Tangentele duse la cerc în punctele B și C se intersectează în în punctul N, iar dreptele AB și $B'C'$ se intersectează în punctul P.

a) Aflați: măsurile unghiurilor triunghiului ABC și măsura unghiului format de „prelungirile" dreptelor AC și BN;

b) Demonstrați că triunghiul BNC este echilateral și calculați aria în funcție de raza cercului și apoi arătați că relația:

$$R \cdot (\sqrt{3}\, AC - 2\, AB') = AC \cdot C'P$$

are loc, oricît ar fi R, lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC.



R. a) Aflăm măsurile unghiurilor triunghiului ABC. Avem:

$$\frac{m(\hat{A})}{3} = \frac{m(\hat{B})}{4} = \frac{m(\hat{C})}{2} = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ$$

de unde $m(\hat{A}) = 60°$, $m(\hat{B}) = 80°$ și $m(\hat{C}) = 40°$. dr. BN fiind tangenta cercului, măsura unghiului NMC este semidiferența măsurilor arcelor $\overset{\frown}{BC}$ și $\overset{\frown}{BA}$. Cum $m(\overset{\frown}{BC}) = 120°$ și $m(\overset{\frown}{AB}) = 80°$, unghiul NMC are măsura 20°.

b) Unghiurile $C'BA$ și $C'CA$ subîntind același arc, $C'A$ de 20°, deci unghiul $C'CA$ este de 10°. Atunci unghiul BCC' are măsura de 30° iar unghiul BCN de 60°. Dar triunghiul OBC este isoscel. Înseamnă că și unghiul CBN este de 60°, iar triunghiul care are două unghiuri de 60° este echilateral. Arcul $\overset{\frown}{BC}$ are măsura de 120°, lungimea coardei $[BC]$ este $R\sqrt{3}$ și atunci aria triunghiului echilateral BNC este $\dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

Triunghiul APB' este asemenea cu triunghiul $AC'C$, pentru că au cîte un unghi drept și cîte un unghi cu măsura de 10°. Avem :

$$\frac{AB'}{AC} = \frac{PB'}{C'C}$$

de unde

$$AB' \cdot C'C = PB' \cdot AC; \quad AB' \cdot 2R = (C'B' - C'P) \cdot AC.$$

Observăm că $C'B'$ este egal cu BC pentru că $BCB'C'$ este dreptunghi. Atunci :

$$AB' \cdot 2R = R\sqrt{3} \cdot AC - C'P \cdot AC$$

sau :

$$AB' \cdot 2R - R\sqrt{3} \cdot AC = -C'P \cdot AC$$

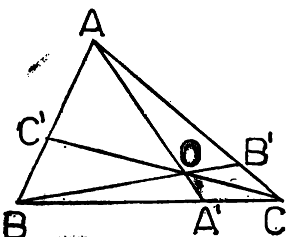
și deci :

$$R \cdot (\sqrt{3}\,AC - 2\,AB') = AC \cdot C'P.$$

IV.35^MPO. Demonstrați, prin arii, teorema lui Ceva.

R. Fie, în triunghiul ABC, $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ trei ceviene și O punctul lor de intersecție. Avem :

$$\frac{\mathcal{S}_{AA'B}}{\mathcal{S}_{AA'C}} = \frac{A'B}{A'C}; \quad \frac{\mathcal{S}_{BB'C}}{\mathcal{S}_{BB'A}} = \frac{B'C}{B'A}; \quad \frac{\mathcal{S}_{CC'A}}{\mathcal{S}_{CC'B}} = \frac{C'A}{C'B} \qquad (*)$$



Apoi :

$$\frac{\mathcal{S}_{AA'B}}{\mathcal{S}_{AOB}} = \frac{AA'}{AO}; \quad \frac{\mathcal{S}_{AA'C}}{\mathcal{S}_{AOC}} = \frac{AA'}{AO}; \quad \frac{\mathcal{S}_{BB'A}}{\mathcal{S}_{AOB}} = \frac{BB'}{OB};$$

$$\frac{\mathcal{S}_{BB'C}}{\mathcal{S}_{BOC}} = \frac{BB'}{OB}; \quad \frac{\mathcal{S}_{CC'B}}{\mathcal{S}_{BOC}} = \frac{CC'}{OC}; \quad \frac{\mathcal{S}_{CC'A}}{\mathcal{S}_{COA}} = \frac{CC'}{OC}.$$

Înmulțind convenabil ultimele relații se obține :

$$\frac{\mathcal{S}_{AA'B}}{\mathcal{S}_{AOB}} \cdot \frac{\mathcal{S}_{AOC}}{\mathcal{S}_{AA'C}} \cdot \frac{\mathcal{S}_{AOB}}{\mathcal{S}_{BB'A}} \cdot \frac{\mathcal{S}_{BB'C}}{\mathcal{S}_{COB}} \cdot \frac{\mathcal{S}_{BOC}}{\mathcal{S}_{CC'B}} \cdot \frac{\mathcal{S}_{CC'A}}{\mathcal{S}_{AOC}} =$$

$$= \frac{AA'}{AO} \cdot \frac{AO}{AA'} \cdot \frac{OB}{BB'} \cdot \frac{BB'}{OB} \cdot \frac{OC}{CC'} \cdot \frac{CC'}{OC} = 1$$

deci :

$$\frac{\mathcal{S}_{AA'B}}{\mathcal{S}_{AA'C}} \cdot \frac{\mathcal{S}_{BB'C}}{\mathcal{S}_{BB'A}} \cdot \frac{\mathcal{S}_{CC'A}}{\mathcal{S}_{CC'B}} = 1 \cdot$$

Folosind relațiile (*) rezultă :

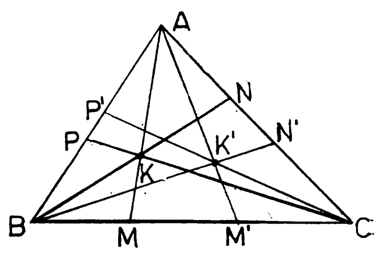
$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

adică tocmai teorema lui CEVA.

IV.36[PO]. Pe laturile $[BC,][CA,][AB]$ ale unui triunghi se consideră punctele M, N, P astfel încît dr.AM, dr.BN, dr.CP să fie concurente. Fie M', N', P' simetricele lui M, N, P față de mijloacele lui $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Demonstrați că dr.AM', dr. BN', dr.CP' sînt concurente.

R. Considerînd dr. $AM \cap$ dr. $BN \cap$ dr. $CP = \{K\}$, deci

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1.$$



Pentru ca dreptele AM', BN' și CP' să fie concurente, va trebui să arătăm că punctele M', N', P' determină pe laturile triunghiului ABC segmente care satisfac reciproca teoremei lui CEVA. Calculăm

$$M'B = \left(\frac{CB}{2} - MB\right) \cdot 2 + MB = CB - MB;$$

$$M'C = \frac{BC}{2} - \left(\frac{BC}{2} - BM\right) = BM;$$

$$N'C = \frac{AC}{2} - \left(\frac{AC}{2} - AN\right) = AN; \quad N'A = CA - NA; \quad P'B = \left(\frac{AB}{2} - PB\right) \cdot 2 + PB =$$

$$= AB - PB; \quad P'A = BP.$$

Calculăm :

$$\frac{M'B}{M'C} \cdot \frac{N'C}{N'A} \cdot \frac{P'A}{P'B} = \frac{CB - MB}{BM} \cdot \frac{AN}{CA - NA} \cdot \frac{BP}{AB - PB} =$$

$$= \frac{CM}{BM} \cdot \frac{AN}{CN} \cdot \frac{BP}{AP} = 1$$

și obținem că dreptele AM', BN', CP' sînt concurente conform reciprocei teoremei lui CEVA.

IV.37[MPO]. Ce devine teorema lui STEWART într-un triunghi ABC cînd M este mijlocul lui $[BC]$?

R. Dacă M este mijlocul lui $[BC]$, avem $[BM] \equiv [MC]$ și $BM = \frac{BC}{2}$. Aplicăm teorema lui STEWART:

$$AM^2 \cdot BC = AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot BM - BC \cdot BM \cdot MC.$$

Înlocuim MC și BM cu $\frac{BC}{2}$ și obținem:

$$AM^2 \cdot BC = AB^2 \cdot \frac{BC}{2} + AC^2 \cdot \frac{BC}{2} - BC \cdot \frac{BC}{2} \cdot \frac{BC}{2}.$$

Înmulțim relația cu $\frac{2}{BC}$:

$$2AM^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2}.$$

sau:

$$AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}.$$

Aceasta este tocmai pătratul lungimii medianei. În general avem:

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \quad \text{adică} \quad m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2};$$

$$m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} \quad \text{adică} \quad m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2};$$

$$m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \quad \text{adică} \quad m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$

IV. 38.[PO]. Calculați lungimile bisectoarelor unui triunghi cunoscînd lungimile laturilor sale.

R. Considerăm triunghiul ABC cu laturile: $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ și bisectoarele $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$.
Aplicăm teorema lui STEWART:

$$AA'^2 \cdot BC = AB^2 \cdot A'C + AC^2 \cdot BA' - BC \cdot BA' \cdot A'C$$

sau:

$$AA'^2 \cdot a = c^2 \cdot A'C + b^2 \cdot BA' - a \cdot BA' \cdot A'C. \tag{1}$$

Din teorema bisectoarei avem $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B}{A'C}$ sau $\frac{c}{b} = \frac{A'B}{A'C}$ de unde $\frac{c+b}{b} = \frac{A'B + A'C}{A'C} =$

$= \frac{a}{A'C}$. De aici, $A'C = \frac{a \cdot b}{c+b}$ iar $A'B = a - \frac{ab}{c+b} = \frac{ac + ab - ab}{c+b} = \frac{ac}{c+b}$.

Înlocuind în relația (1) obținem :

$$AA'^2 \cdot a = c^2 \cdot \frac{ab}{c+b} + b^2 \cdot \frac{ac}{c+b} - a \cdot \frac{ab}{c+b} \cdot \frac{ac}{c+b}$$

sau echivalent :

$$AA'^2 = \frac{c^2b}{c+b} + \frac{b^2c}{c+b} - \frac{a^2\,bc}{(c+b)^2}$$

de unde :

$$AA'^2 = \frac{bc}{c+b}\left(c + b - \frac{a^2}{c+b}\right)$$

sau :

$$AA'^2 = \frac{bc\,[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2}.$$

La fel se obține :

$$BB'^2 = \frac{ac\,[(a+c)^2 - b^2]}{(a+c)^2}; \quad CC'^2 = \frac{ab\,[(a+b)^2 - c^2]}{(a+b)^2}.$$

IV.39. Să se demonstreze că dacă într-un triunghi cu laturile de lungimi a, b, c avem $a = 1$ și $b, c \in \mathbb{N}^*$, atunci triunghiul este isoscel.

R. Evident $b \neq 0$, $c \neq 0$. Pentru a face o alegere, să presupunem $b \leqslant c$. Deoarece $a = 1$, și $b, c \in \mathbb{N}^*$, vom avea :

$$a \leqslant b \leqslant c.$$

Dar, cum $b \leqslant c$, avem :

$$c - b \geqslant 0$$

deci :

$$0 \leqslant c - b \leqslant 1.$$

Dar b și c fiind numere naturale, diferența lor va fi zero sau tot un număr natural. Prin urmare, pentru ca ultima relație să fie îndeplinită, trebuie ca :

$$c - b = 0$$

sau $b = c$, ceea ce înseamnă că triunghiul considerat este isoscel.

IV.40[PO]. Găsiți un triunghi dreptunghic astfel încît lungimile laturilor, lungimea înălțimii și lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză să fie toate numere întregi pozitive.

R. Pentru a determina un triunghi dreptunghic cu măsurile laturilor exprimabile prin numere întregi pozitive, va trebui să rezolvăm în numere întregi pozitive ecuația :

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Soluțiile acestei ecuații sînt de forma :

$$x = m(a^2 - b^2)\,; \; y = 2mab\,; \; z = m(a^2 + b^2)$$

unde m, a, b sînt numere naturale, $a > b$, a și b prime între ele, unul par și celălalt impar.
Astfel pentru $m = 1$, $a = 2$ și $b = 1$, se obține :

$$x = 3\,; \; y = 4\,; \; z = 5$$

şi $x^2 + y^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 = z^2$.

Fie ABC triunghiul dreptunghic ($m(\hat{A}) = 90°$) cu $AB = 3$ u.l. $AC = 4$ u.l., $BC = 5$ u.l. Fie D piciorul perpendicularei din A pe $[BC]$. Atunci mărimile proiecţiilor $[BD]$ şi $[DC]$ ale catetelor pe ipotenuză sînt:

$$BD = \frac{AB^2}{BC} = \frac{9}{5}; \quad DC = \frac{AC^2}{BC} = \frac{16}{5}$$

iar înălţimea $[AD]$ are mărimea:

$$AD = \sqrt{BD \cdot DC} = \frac{12}{5}.$$

Deci triunghiul ABC are măsurile laturilor exprimate în numere naturale, dar măsura înălţimii şi a proiecţiilor catetelor nu. Să construim triunghiul dreptunghic $A_1B_1C_1$ ($m(\hat{A}_1) = 90°$) asemenea cu ABC, astfel încît raportul de asemănare să fie:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{1}{5}.$$

Fie D_1 piciorul perpendicularei din A_1 pe $[B_1C_1]$. Se obţine:

$$B_1D_1 = 5 \cdot BD = 9 \text{ u.l.}, \quad D_1C_1 = 5 \cdot DC = 16 \text{ u.l.}, \quad A_1D_1 = 5 \cdot AD = 12 \text{ u.l.},$$

deci triunghiul $A_1B_1C_1$ satisface enunţul problemei.

IV.41[PO]. Să se determine lungimile a, b, c ale laturilor unui triunghi ştiind că sînt numere naturale, dintre care a şi b sînt numere prime şi $a^b = a + b$.

R. Deoarece $a^b = a + b$, avem $a = 2$ sau $b = 2$. Într-adevăr, dacă nu este aşa, adică $a, b \neq 2$, atunci $a = 2k + 1$, $b = 2p + 1$, şi deci $a + b = 2(p + k + 1)$ care este multiplu de 2, pe cînd a^b este impar, şi deci egalitatea $a^b = a + b$ este imposibilă.

Dacă $a = 2$, atunci $a^b = a + b$ devine $2^b = b + 2$ sau $2(2^{b-1} - 1) = b$ şi deci sau $b = 1$ sau $b = 2$. Dar $b = 1$ este imposibil deoarece ar însemna $b = 0$, absurd. Prin urmare, din $a = 2$, avem $b = 2$.

Dacă $b = 2$, atunci din $a^b = a + b$, avem $a^2 = a + 2$, adică $a(a - 1) = 2$, deci $a = 2$ sau $a - 1 = 2$. Pentru $a = 2$, avem $a - 1 = 1$ şi deci egalitatea $a^b = a + b$ se verifică. Pentru $a - 1 = 2$, avem $a = 3$, de unde $3^2 = 3 + 2$, absurd. Deci, $a = b = 2$.

Dar, într-un triunghi lungimea unei laturi este mai mare decît diferenţa celorlalte două şi mai mică decît suma lor, ceea ce implică $c \in \{1, 2, 3\}$.

Prin urmare, triunghiurile care satisfac enunţul, au lungimile laturilor în mulţimea:

$$\{(2, 2, 1); (2, 2, 2); (2, 2, 3)\}.$$

IV.42[PO]. Să se arate că în orice triunghi ABC cu laturile de lungimi a, b, c există inegalitatea:

$$(a + b + c)^3 > 3(a + b)(b + c)(c + a) - (a - b)(b - c)(c - a).$$

R. Avem de demonstrat:

$$(a + b + c)^3 > 3(a + b)(b + c)(c + a) - (a - b)(b - c)(c - a)$$

adică:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a) > 3(a + b)(b + c)(c + a) - (a - b)(b - c)(c - a)$$

sau:

$$a^3 + b^3 + c^3 > -(a - b)(b - c)(c - a)$$

sau încă:

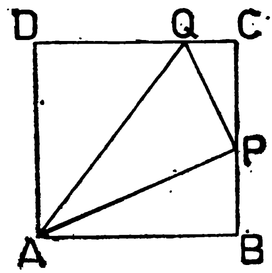
$$a^3 + b^3 + c^3 > a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$$

de unde:

$$a^2(a + c - b) + b^2(b + a - c) + c^2(c + b - a) > 0,$$

inegalitate evidentă, ținînd seama că în orice triunghi ABC cu laturile de lungimi a, b, c avem $a > 0$; $b > 0$; $c > 0$; $a + b > c$; $b + c > a$; $a + c > b$.

IV.43, În pătratul $ABCD$ de latură a, se înscrie triunghiul APQ cu $m(\widehat{QAP}) = 30°$, (Q pe segmentul (DC) și P pe segmentul (BC)) și cu $m(\widehat{APQ}) = 90°$. Se cer lungimile laturilor acestui triunghi.



R. Notînd AQ cu x, rezultă că PQ este $\frac{x}{2}$, iar AP este $\frac{x}{2}\sqrt{3}$. Dacă notăm BP cu y, atunci din asemănarea triunghiurilor QCP și PBA avem:

$$\frac{AP}{PQ} = \frac{BP}{CQ} = \frac{AB}{PC}$$

adică:

$$\frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{y}{CQ} = \frac{a}{a - y}$$

de unde $y = \frac{a(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3}}$ sau $y = \frac{a(3 - \sqrt{3})}{3}$. Din triunghiul dreptunghic ABP, avem:

$$AP^2 = AB^2 + BP^2$$

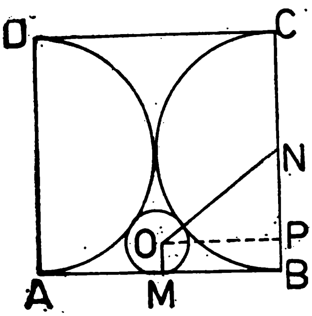
adică:

$$\frac{3x^2}{4} = a^2 + \frac{a^2(3 - 2\sqrt{3} + 1)}{3}$$

de unde $x = \frac{2a}{3}\sqrt{7 - 2\sqrt{3}}$.

Deci $AQ = \frac{2a}{3}\sqrt{7 - 2\sqrt{3}}$, $PQ = \frac{a}{3}\sqrt{7 - 2\sqrt{3}}$ și $AP = \frac{a}{3}\sqrt{21 - 6\sqrt{3}}$.

IV.44. Într-un pătrat $ABCD$ sînt înscrise două semicercuri cu diametrele $[AD]$ și $[BC]$. Un cerc mai mic este tangent la ambele semicercuri și la latura $[AB]$. Să se calculeze lungimea razei acestui cerc în funcție de a, lungimea laturii $[AB]$.



R. Notăm lungimea razei cercului mic cu x. Dimensiunile triunghiului dreptunghic OPN sînt:

$$OP = \frac{a}{2}, \quad ON = \frac{a}{2} + x \quad \text{și} \quad PN = \frac{a}{2} - x.$$

Aplicind teorema lui PITAGORA obținem:

$$ON^2 = OP^2 + PN^2$$

sau:

$$\left(\frac{a}{2} + x\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 \tag{1}$$

Rezolvînd ecuația (1) obținem $x = \frac{a}{8}$.

IV.45. Se dă triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\hat{A}) = 90°$, $AB = 3$, $AC = 4$.

Să se găsească lungimea laturii pătratului $AMNP$, unde $M \in AB$, $N \in BC$, $P \in AC$. Catetele fiind de lungime b și c, aceeași întrebare.

R. Notăm lungimea laturii pătratului cu x. Deoarece dr. $MN \parallel$ dr. AC avem $\Delta BMN \sim \Delta BAC$ deci:

$$\frac{MN}{AC} = \frac{BM}{BA}.$$

Înlocuind se obține:

$$\frac{x}{4} = \frac{3 - x}{3},$$

deci $x = \frac{12}{7}$.

Dacă catetele sînt de lungime b și c atunci proporția devine $\frac{x}{b} = \frac{c - x}{c}$, de unde $x = \frac{bc}{b + c}$.

Problema se poate rezolva și folosind ariile figurilor:

$$\mathcal{S}_{ABC} = \mathcal{S}_{APNM} + \mathcal{S}_{PCN} + \mathcal{S}_{MNB}.$$

Înlocuind obținem:

$$\frac{3 \cdot 4}{2} = x^2 + \frac{(4 - x) \cdot x}{2} + \frac{(3 - x) \cdot x}{2}$$

sau:

$$\frac{b \cdot c}{2} = x^2 + \frac{(b - c) \cdot x}{2} + \frac{(c - x) \cdot x}{2}$$

de unde rezultă ecuația $7x = 12$ sau $(b + c)x = bc$. De aici $x = \frac{12}{7}$ sau $x = \frac{bc}{b + c}$.

SECŢIUNEA A VI – A

CLASA a VIII-a

ALGEBRA

CAPITOLUL I

NUMERE REALE

I.1. Arătaţi că fracţiile: a) $\frac{2n+1}{5n+3}$, b) $\frac{5n+3}{8n+5}$, c) $\frac{33n+4}{22n+3}$ sînt ireductibile oricare-ar fi $n \in \mathbb{N}$.

R. a) Fie d divizorul comun al numerelor $2n+1$ şi $5n+3$. Rezultă: $2n+1 = dq_1$, $q_1 \in \mathbb{N}^*$ şi $5n+3 = dq_2$, $q_2 \in \mathbb{N}^*$. Înmulţind prima egalitate cu 5 şi a doua cu 2, obţinem: $10n+5 = 5\,dq_1$ şi $10n+6 = 2dq_2$ şi scăzîndu-le obţinem $1 = d(2q_2 - 5q_1)$. Din ultima egalitate, avînd produsul a două numere naturale egal cu 1, rezultă $d = 1$ şi $2q_2 - 5q_1 = 1$. Aşadar $d = 1$, de unde rezultă că fracţia $\frac{2n+1}{5n+3}$ este ireductibilă pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

b) Fie d divizorul comun al numerelor $5n+3$ şi $8n+5$. Rezultă d divide şi pe $5(8n+5) - 8(5n+3)$, adică d divide pe 1, deci $d = 1$.

c) Dacă d divide pe $33n+4$ şi pe $22n+3$, atunci d divide şi pe $3(22n+3) - 2(33n+4)$, adică d divide pe 1, deci $d = 1$.

I.2. Determinaţi k întreg astfel încît fracţia $\frac{1980k+1}{1981k+2}$ să fie ireductibilă.

R. Fie d un divizor comun al numărătorului şi numitorului fracţiei. Atunci d divide numărul $1981(1980k+1) - 1980(1981k+2)$, adică divide pe 1979. Deci d poate fi 1 sau 1979. Dacă $d = 1$, atunci problema este rezolvată. Dacă $d = 1979$, atunci 1979 divide $1980k+1 - (1981k+2)$, adică 1979 divide pe $k+1$. Deci $k+1 = 1979p$, $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, de unde rezultă $k = 1979\,p - 1$. Aşadar, fracţia este ireductibilă pentru orice $k \neq 1979p - 1$, $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

I.3. Arătaţi că numerele:

$$\text{a) } \sqrt{n^2+2n+1}, \quad \text{b) } \sqrt{n(n+2)+1}, \quad \text{c) } \sqrt{\frac{n^3+n^2}{n+1}}$$

sînt raţionale pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

R. a) $\sqrt{n^2+2n+1} = \sqrt{(n+1)^2} = n+1 \in \mathbb{N}$.

b) $\sqrt{n(n+2)+1} = \sqrt{n^2+2n+1} = \sqrt{(n+1)^2} = n+1 \in \mathbb{N}$.

c) $\sqrt{\dfrac{n^3+n^2}{n+1}}=\sqrt{\dfrac{n^2(n+1)}{n+1}}=\sqrt{n^2}=n\in\mathbb{N}.$

I.4. Arătați că numărul $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ este irațional.

R. Presupunem că $\sqrt{5}+\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$. Atunci $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2\in\mathbb{Q}$, adică $8+2\sqrt{15}\in\mathbb{Q}$, de unde $\sqrt{15}\in\mathbb{Q}$, ceea ce este fals. Deci $\sqrt{5}+\sqrt{3}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

I.5. Găsiți condițiile în care numerele $\sqrt{m}+\sqrt{n}$ și $\sqrt{m}-\sqrt{n}$ sînt raționale, m și n fiind naturale.

R. $\sqrt{m}-\sqrt{n}$ este rațional dacă m și n sînt pătrate perfecte sau dacă $m=n$.

$\sqrt{m}+\sqrt{n}$ este rațional dacă m și n sînt pătrate perfecte.

I.6. Raționalizați numitorii fracțiilor următoare:

$$\text{a) } \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}};\quad \text{b) } \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1};\quad \text{c) } \frac{6}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}};$$

R. a) Amplificăm fracția cu $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, „conjugata" expresiei $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=$

$$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1}=\sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt{5}+\sqrt{1}}{\sqrt{5}-\sqrt{1}}=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{1})(\sqrt{5}+\sqrt{1})}{(\sqrt{5}+\sqrt{1})(\sqrt{5}-\sqrt{1})}=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{2(3+\sqrt{5})}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2};$$

$$\text{c) } \frac{6}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}=\frac{6(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}=\frac{6(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{18-12}=3\sqrt{2}+2\sqrt{3};$$

I.7. Se dau mulțimile:

$$M=\left\{x\in\mathbb{Z}\ \Big/\ \frac{13}{\sqrt{3}-4}<x<\frac{\sqrt{13}-\sqrt{11}}{\sqrt{13}+\sqrt{11}}\right\},$$

$$N=\left\{y\in\mathbb{Z}\ \Big/\ \sqrt{5}(\sqrt{45}-10)<y<\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{18}}\right\}.$$

Calculați: a) $M\cup N$; b) $M\cap N$; c) $M\setminus N$; d) $N\setminus M$; e) $(M\setminus N)\cap(N\setminus M)$; f) $(M\setminus N)\cup(N\setminus M)$.

R. $\dfrac{13}{\sqrt{3}-4}=\dfrac{13(\sqrt{3}+4)}{(\sqrt{3}-4)(\sqrt{3}+4)}=\dfrac{13(\sqrt{3}+4)}{-13}=-\sqrt{3}-4;$

$$\frac{\sqrt{13}-\sqrt{11}}{\sqrt{13}+\sqrt{11}}=\frac{(\sqrt{13}-\sqrt{11})^2}{(\sqrt{13}+\sqrt{11})(\sqrt{13}-\sqrt{11})}=\frac{24-2\sqrt{143}}{2}=12-\sqrt{143},$$

deci $-4-\sqrt{3}<x<12-\sqrt{143}$. Deci $M=\{-5,-4,-3,-2,-1,0\}$.

La fel $15-10\sqrt{5}<y<2$; $N=\{-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1\}$.

a) $M\cup N=N$; b) $M\cap N=M$; c) $M\setminus N=\emptyset$;

d) $N\setminus M=\{-7,-6,1\}$; e) $(M\setminus N)\cap(N\setminus M)=\emptyset$;

f) $(M\setminus N)\cup(N\setminus M)=\{-7,-6,1\}$.

I.8. Arătați că numărul:

$$N=\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} \text{ este rațional.}$$

R. Raționalizînd numitorii fiecărei fracții obținem:

$$N=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{(\sqrt{4}+\sqrt{3})(\sqrt{4}-\sqrt{3})}=$$

$$=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}=-1+\sqrt{4}=-1+2=1\in\mathbb{Q}.$$

I.9. Dintre perechile de numere următoare decideți care este mai mare:

a) $3\sqrt{2}$ sau $\sqrt{27}$;

b) $\sqrt{11}-\sqrt{5}$ sau $\sqrt{19}-\sqrt{11}$.

R. a) $\sqrt{27}=3\sqrt{3}$ care este mai mare decît $3\sqrt{2}$.

b) Vom arăta că $\sqrt{11}-\sqrt{5}>\sqrt{19}-\sqrt{11}$. Într-adevăr, ridicînd la pătrat numerele pozitive, obținem: $16-2\sqrt{5\cdot 11}>30-2\sqrt{19\cdot 11}$, $2\sqrt{19\cdot 11}-2\sqrt{5\cdot 11}>14$, $\sqrt{11}(\sqrt{19}-\sqrt{5})>7$; ridicînd din nou la pătrat, avem: $11(24-2\sqrt{95})>49$ sau $264-49>22\sqrt{95}$, $215>22\sqrt{95}$. Ridicăm încă o dată la pătrat: $215^2>22^2\cdot 95$ ceea ce este evident.

I.10. Fie x, y două numere reale. Notăm $\max(x,y)$ cel mai mare dintre numerele x și y și $\min(x,y)$ cel mai mic dintre numerele x și y. Determinați:

a) $\max(2, 1+\sqrt{2})$

b) $\min\left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}, \sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

c) $\max(3, \pi)$

d) $\min\left(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{5}\right)$

e) $\max(1, x)$

f) $\min(3, 3+x)$

g) $\min(-x, x)$

h) $\max(x, x^2)$

i) $\max\left(x, \frac{1}{x}\right)$, $x>0$

j) $\min(x^{-1}, x^{-2})$, $x>0$

R. a) $1+\sqrt{2}>2$ implică $\max(2, 1+\sqrt{2}) = 1+\sqrt{2}$;

b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$, deci $\min\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}, \sqrt{3}-\sqrt{2}\right) = \sqrt{3}-\sqrt{2}$;

c) $\pi \approx 3{,}14$, deci $\max(3, \pi) = \pi$;

d) $-\dfrac{1}{9} > -\dfrac{1}{5}$, deci $\min\left(-\dfrac{1}{9}, -\dfrac{1}{5}\right) = -\dfrac{1}{5}$;

e) Se impune discuţie după x. Dacă $x \geqslant 1$, atunci $\max(1, x) = x$, iar dacă $x < 1$ atunci $\max(1, x) = 1$;

f) $\min(3, 3+x) = \begin{cases} 3, & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ 3+x, & \text{dacă } x > 0; \end{cases}$

g) $\min(-x, x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ -x, & \text{dacă } x > 0; \end{cases}$

h) Pentru $x < 0$, avem $x^2 > 0$ şi deci $x < x^2$. Dacă $0 \leqslant x \leqslant 1$, $x \geqslant x^2$. Dacă $x > 1$, $x < x^2$. Aşadar

$$\max(x, x^2) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x<0 \text{ sau } x>1 \\ x, & \text{dacă } 0 \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$$

i) Dacă $x > 1$, rezultă $\max\left(x, \dfrac{1}{x}\right) = x$ şi dacă $x \leqslant 1$, $\max\left(x, \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x}$;

j) $\min(x^{-1}, x^{-2}) = \min\left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{x^2}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2}, & \text{dacă } x \geqslant 1. \end{cases}$

1.11. Determinaţi x astfel încît:

a) $\max(5-x, 5+x) = 5$; b) $\min(5-x, 5+x) = 1$;

c) $\max(5-x, 5+x) = 10$; d) $\min(5-x, 5+x) = 0$;

e) $\max(5-x, 5+x) = \min(5-x, 5+x)$.

R. a) $x = 0$; b) Presupunînd că $5-x$ este min., rezultă $x = 4$. Presupunînd că $5+x$ este min., rezultă $x = -4$; c) Dacă $5-x$ este max., atunci $x = -5$, iar dacă $5+x$ este max., atunci $x = 5$; d) $x_1 = -5$ şi $x_2 = 5$. e) Trebuie ca $5-x = 5+x$, de unde rezultă $x = 0$.

1.12. a, b fiind numere reale oarecare demonstraţi că:

$$\max(a, b) = \min(a, b) \text{ dacă şi numai dacă } a = b.$$

R. Dacă $a = b$, atunci $\max(a, a) = \min(a, a) = a$. Reciproc, dacă $a = \max(a, b) = \min(a, b)$, rezultă $a \geqslant b$, respectiv $a \leqslant b$, două inegalităţi care au loc numai dacă $a = b$.

I.13. Demonstrați că: $[x+k]=[x]+k$, oricare-ar fi $x \in \mathbb{R}$ și $k \in \mathbb{Z}$.

R. Fie $p=[x]$, rezultă $x=p+r$, $0 \leqslant r < 1$. Atunci $[x+k]=[p+r+k]=$ $=p+k=[x]+k$.

I.14. Calculați:

a) $[1]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\ldots+[\sqrt{8}]$;

b) $[1+\sqrt{2}]+[1+\sqrt{3}]+[1+\sqrt{4}]$;

c) $[1+\sqrt{2}]+[1-\sqrt{2}]$.

R. a) $[1]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]=1+1+1=3$. Numerele de la $\sqrt{4}$ la $\sqrt{8}$ au partea întreagă 2. Deci $[1]+\ldots+[\sqrt{8}]=3+5\cdot 2=13$; b) Folosind rezultatul de la exercițiul I.13., $[1+\sqrt{2}]+[1+\sqrt{3}]+[1+\sqrt{4}]=1+[\sqrt{2}]+1+[\sqrt{3}]+1+[\sqrt{4}]=7$; c) $[1+$ $+\sqrt{2}]+[1-\sqrt{2}]=1+[\sqrt{2}]+1+[-\sqrt{2}]=1+1+1-2=1$.

I.15. Demonstrați că:

a) $[x+y] \leqslant [x]+[y]+1$;

b) $\{x+y\} \geqslant \{x\}+\{y\}-1$.

R. a) Fie $p=[x]$ și $q=[y]$. $x=p+r_1$, $y=q+r_2$, $r_1, r_2 \in [0,1)$; $[x+y]=$ $=[p+q+r_1+r_2]=p+q+[r_1+r_2] \leqslant p+q+1=[x]+[y]+1$; b) Înlocuind în a) $[x]=x-\{x\}$ rezultă c.c.t.d.

I.16. Arătați că $[x]\cdot[y] \geqslant [xy]$ pentru orice $x, y \in (0,+\infty)$. Studiați ce se întîmplă pentru $x, y \in \mathbb{R}$.

R. $x=[x]+r_1$, $y=[y]+r_2$ cu $r_1, r_2 \in [0,1)$. Obținem: $[xy]=[[x]\cdot[y]+r_1[y]+$ $+r_2[x]+r_1r_2]=[x][y]+[r_1[y]+r_2[x]+r_1r_2]$ unde am folosit rezultatul de la exercițiul I.13. Cum $[r_1[y]+r_2[x]+r_1r_2] \geqslant 0$ în condițiile exercițiului rezultă că: $[xy] \geqslant [x][y]$.

Presupunem $x<0$ și $y<0$. În mod analog, obținem: $[xy] \leqslant [x][y]$.

Dacă $x>0$ și $y<0$ nu se poate stabili o relație între $[xy]$ și $[x][y]$. De exemplu, pentru $x=1{,}1$ și $y=-2{,}9$, avem $[xy]<[x][y]$, iar pentru $x=1{,}1$ și $y=-21$, avem $[xy]>$ $>[x][y]$.

I.17. Fie a și b numere reale oarecare. Efectuați:

a) $(-\infty, a] \cap (b, +\infty)$; b) $(-\infty, a] \cup (b, +\infty)$;

c) $[0,3] \cap [a, +\infty)$; d) $[0, a] \cap [3, +\infty)$;

e) $[a, 3] \cap (0, +\infty)$; f) $[a, b] \cap (3, +\infty)$;

g) $[-1, 1] \cup [-a, a]$; h) $[a, 1] \cap [0, a^2]$;

i) $(0, a] \cup \left(\frac{1}{a}, 1\right]$, $a \neq 0$; j) $(0, a] \cap \left(\frac{1}{a}, 1\right]$, $a \neq 0$.

R. a) Sînt mai multe cazuri: I. Dacă $a < b$, atunci $(-\infty, a] \cap (b, +\infty) = \emptyset$, II. Dacă $a = b$, $(-\infty, a] \cap (b, +\infty) = \{\emptyset\}$, III. Dacă $a > b$, $(-\infty, a] \cap (b, +\infty) = (b, a]$;

b) I. $a < b$, $(-\infty, a] \cup (b, +\infty)$, II. $a \geqslant b$, $(-\infty, a] \cup (b, +\infty) = (-\infty, +\infty)$;

c) I. $a \leqslant 0$, $[0, 3] \cap [a, +\infty) = [0, 3]$, II. $0 < a < 3$, $[0, 3] \cap [a, +\infty) = [a, 3]$, III. $a = 3$, $[0, 3] \cap [a, +\infty) = \{3\}$, IV. $a > 3$, $[0, 3] \cap [a, +\infty) = \emptyset$;

d) I. $a < 3$, $[0, a] \cap [3, +\infty) = \emptyset$, II. $a = 3$, $[0, a] \cap [3, +\infty) = \{3\}$, III. $a > 3$, $[0, a] \cap [3, +\infty) = [3, a]$;

e) I. $a < 0$, $[a, 3] \cap (0, +\infty) = (0, 3]$ II. $a = 0$, $[a, 3] \cap (0, +\infty) = (0, 3]$, III. $0 < a \leqslant 3$, $[a, 3] \cap (0, +\infty) = [a, 3]$;

f) I. $b \leqslant 3$, $[a, b] \cap (3, +\infty) = \emptyset$, II. $a < 3 < b$, $[a, b] \cap (3, +\infty) = (3, b]$, III. $a > 3$, $[a, b] \cap (3, +\infty) = [a, b]$, IV. $a = 3$, $[a, b] \cap (3, +\infty) = (a, b]$;

g) Din definiția intervalului $[-a, a]$, rezultă că $a > 0$. I. $0 < a < 1$, $[-1, 1] \cup [-a, a] = [-1, 1]$, II. $a = 1$, $[-1, 1] \cup [-a, a] = [-1, 1]$, III. $a > 1$, $[-1, 1] \cup [-a, a] = [-a, a]$;

h) I. $a \leqslant -1$, $[a, 1] \cap [0, a^2] = [0, 1]$, II. $-1 < a < 0$, $[a, 1] \cap [0, a^2] = [0, a^2]$, III. $0 < a < 1$, $[a, 1] \cap [0, a^2] = \emptyset$;

i) Din definiția intervalului $\left(\frac{1}{a}, 1\right]$ rezultă $\frac{1}{a} < 1$, adică $a > 1$, iar pentru $[0, a]$ rezultă $a > 0$. Atunci $(0, a] \cup \left(\frac{1}{a}, 1\right] = (0, a]$;

j) Analog cu i), avem $(0, a] \cap \left(\frac{1}{a}, 1\right] = \left(\frac{1}{a}, 1\right]$.

I.18PO. Scrieți intervalele deschise determinate pe axa numerelor reale, de numerele:

a) $\frac{1}{\sqrt{2} + 1}$ și $\sqrt{2} - 1$;

b) 1; a; a^2, $a \in \mathbb{R}$;

c) 2; $a + \frac{1}{a}$, $a \in (0, +\infty)$.

R. a) Observăm că $\frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1$, deci există intervalele deschise:

$$(-\infty, \sqrt{2} - 1) \text{ și } (\sqrt{2} - 1, +\infty);$$

b) I. $a < -1$, avem $a < 1 < a^2$ și deci intervalele sînt: $(-\infty, a)$, $(a, 1)$, $(1, a^2)$ și $(a^2, +\infty)$,

II. $-1 < a < 0$, avem $a < a^2 < 1$ și intervalele sînt: $(-\infty, a)$, (a, a^2), $(a^2, 1)$ și $(1, +\infty)$,

III. $0 < a < 1$, $a^2 < a < 1$ și deci: $(-\infty, a^2)$, (a^2, a), $(a, 1)$ și $(1, +\infty)$,

IV. $a > 1$, $1 < a < a^2$, $(-\infty, 1)$, $(1, a)$, (a, a^2), $(a^2 + \infty)$.

V. $a = -1$, $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$.

VI. $a = 1$, $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$.

VII. $a = 0$, $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$.

c) Demonstrăm că $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$. Într-adevăr $a^2 + 1 \geqslant 2a$, $a^2 - 2a + 1 \geqslant 0$, $(a - 1)^2 \geqslant 0$, evident; deci intervalele sînt: $(-\infty, 2)$, $\left(2, a + \frac{1}{a}\right)$ și $\left(a + \frac{1}{a}, +\infty\right)$.

CAPITOLUL II

INECUAȚII. SISTEME DE INECUAȚII.

II.1. Rezolvați inecuațiile:

a) $\frac{x}{2} - 1 \geqslant \frac{x}{3}$

b) $3(x - 1) < 2(2x + 5) - 3$

c) $(x - 2)(2x + 1) - (2x - 1)^2 < -2(x + 1)(x - 1)$

d) $\sqrt{2}x - 1 \geqslant \sqrt{8}x$

e) $\sqrt{3}x - 2 < 2x - \sqrt{3}$

f) $\sqrt{18}x - \sqrt{11} < \sqrt{32}x - \sqrt{99}$

g) $\sqrt{18}x + \sqrt{72} \geqslant \sqrt{27}x - \sqrt{108}$

h) $\frac{x - 2}{4} + \frac{2x - 1}{2} \geqslant \frac{3x - 1}{10} + 0{,}9x$

i) $2(3x - 5) + 2x - 1 < 4(2x - 1)$

j) $\frac{(x - 1)^2}{2} - \frac{(x - 2)^2}{4} + \frac{1}{2} \geqslant 0.$

R. a) Inecuația este echivalentă cu $3x - 6 \geqslant 2x$ sau $x \geqslant 6$. Deci $x \in [6, +\infty)$.

b) Obținem $3x - 3 < 4x + 10 - 3$ sau $-x < 10$ sau $x > -10$, adică $x \in (-10, +\infty)$.

c) Obținem $x \in (-\infty, 5)$.

d) Inecuația este echivalentă cu $\sqrt{2}\,x - 1 \geqslant 2\sqrt{2}\,x$ sau $-\sqrt{2}\,x \geqslant 1$ sau $x \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Deci $x \in \left(-\infty, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

e) Obținem: $(\sqrt{3} - 2)x < 2 - \sqrt{3}$ sau $x > -1$, după înmulțirea ambilor membri ai inecuației cu numărul negativ $\frac{1}{\sqrt{3} - 2}$. Deci $x \in (-1, +\infty)$.

f) Inecuaţia se mai scrie: $3\sqrt{2}x-\sqrt{11}<4\sqrt{2}x-3\sqrt{11}$ sau $-\sqrt{2}x<-2\sqrt{11}$ sau $x>\frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{2}}$ sau $x>\sqrt{22}$. Deci $x\in(\sqrt{22},+\infty)$.

g) Obţinem: $3\sqrt{2}x+6\sqrt{2}\geqslant 3\sqrt{3}x-6\sqrt{3}$ şi, mai departe, $(\sqrt{3}-\sqrt{2})x\leqslant 2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. Înmulţind ambii membri cu $\sqrt{3}+\sqrt{2}$, obţinem $x\leqslant 2(5+2\sqrt{6})$. Deci $x\in(-\infty, 2(5+2\sqrt{6})]$.

h) Obţinem: $12x-9\geqslant 12x-1$, adică $-9\geqslant -1$. Deci, nu există x astfel încît să fie satisfăcută inecuaţia.

i) Obţinem: $8x-11<8x-4$ sau $-11<-4$, ceea ce este adevărat oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

j) Obţinem $x^2\geqslant 0$, deci o inegalitate, adică o inecuaţie satisfăcută pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

II.2PO. Rezolvaţi inecuaţiile următoare, m fiind un număr real oarecare:

a) $mx-3\leqslant x$

b) $mx+1\leqslant x+m$

c) $2-mx>m-2x$

d) $\sqrt{2}x+m>mx+\sqrt{2}$

e) $m\sqrt{3}x-3m<-\sqrt{3}m$.

R. a) Inecuaţia este echivalentă cu inecuaţia $(m-1)x\leqslant 3$. Sînt mai multe situaţii: I. $m-1>0$ adică $m>1$, ceea ce implică $x\in\left(-\infty, \frac{3}{m-1}\right]$. II. $m<1$. Rezultă $x\in\left[\frac{3}{m-1}, +\infty\right)$. III. $m=1$ cînd obţinem $x-3\leqslant x$ sau $-3\leqslant 0$, deci $x\in\mathbb{R}$.

b) Obţinem: $(m-1)x\leqslant m-1$. I. $m>1$ implică $x\in(-\infty, 1]$. II. $m<1$, $x\in[1,+\infty)$. III. $m=1$, $x\in\mathbb{R}$.

c) Obţinem: $(m-2)x<2-m$. I. $m>2$, $x\in(-\infty,-1)$, II. $m<2$, $x\in(-1,+\infty)$. III. $m=2$ implică $2-2x>2-2x$, deci $x\in\emptyset$.

d) În cazul inecuaţiei: $(m-\sqrt{2})x<m-\sqrt{2}$ apar situaţiile: I. $m>\sqrt{2}$ $x\in(-\infty,1)$. II. $m<\sqrt{2}$, $x\in(1,+\infty)$, III. $m=\sqrt{2}$, $x\in\emptyset$.

e) Obţinem $m\sqrt{3}x<m(3-\sqrt{3})$. I. $m>0$ implică $x\in(-\infty,\sqrt{3}-1)$, II. $m<0$, $x\in(\sqrt{3}-1,+\infty)$, III. $m=0$, $x\in\emptyset$.

II.3. Determinaţi soluţiile următoarelor sisteme de inecuaţii:

a) $\begin{cases} x-3\geqslant 0 \\ 2x-1<7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x}{2}-3x<\frac{x-1}{2} \\ 2(x-1)\geqslant x+2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt{3}x-4\leqslant\sqrt{48}x+5 \\ \sqrt{8}x-3\geqslant\sqrt{72}x-11 \end{cases}$

d) $\begin{cases}(x-2)^2+(x-1)^2 \leqslant 2(x-1)(x-2)+x\\ \dfrac{3x-2}{2} > \dfrac{5x+1}{3}\end{cases}$

e) $\begin{cases}\sqrt{5}x \geqslant \sqrt{20}x-5\\ \sqrt{45}x-2 \leqslant \sqrt{80}x-7\end{cases}$

R. a) $x-3 \geqslant 0$ implică $x \in [3, +\infty)$, (1); $2x-1 < 7$ implică $x < 4$ sau $x \in (-\infty, 4)$, (2). Intersectînd (1) cu (2) rezultă intervalul $[3, 4)$, soluţie a sistemului.

b) Rezolvînd cele două inecuaţii obţinem $x \in \left(\dfrac{1}{6}, +\infty\right)$, respectiv $x \in [4, +\infty)$. Sistemul este, deci, satisfăcut pentru $x \in \left(\dfrac{1}{6}, +\infty\right) \cap [4, +\infty) = [4, +\infty)$.

c) Inecuaţiile sînt satisfăcute pentru $x \in [-\sqrt{3}, +\infty)$, respectiv $x \in (-\infty, \sqrt{2}]$. Soluţiile sistemului sînt $[-\sqrt{3}, +\infty) \cap (-\infty, \sqrt{2}] = [-\sqrt{3}, \sqrt{2}]$.

d) Obţinem $x \in [1, +\infty) \cap (-\infty, -8) = \emptyset$.

e) Rezultă $x \in (-\infty, \sqrt{5}] \cap [\sqrt{5}, +\infty) = \{\sqrt{5}\}$.

II.4. Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi, sistemele de inecuaţii:

a) $\begin{cases}\dfrac{x+1}{2} - \dfrac{x+1}{3} \geqslant 0\\ (x-1)(x+1) \leqslant (x-1)^2\end{cases}$

b) $\begin{cases}\dfrac{(\sqrt{2}-x)^2}{2} \geqslant x(0{,}5x-\sqrt{8})\\ (x-2)^2-1 \geqslant (x-1)^2-5\end{cases}$

c) $\begin{cases}(x^2-1)(x^2+1) > (x^2-1)^2 + x(2x-1)\\ \dfrac{x^3-6}{4} < \dfrac{0{,}5x^3-x+2}{2}\end{cases}$

R. a) Obtinem $x \in [-1, +\infty) \cap (-\infty, 1] \cap \mathbb{Z} = [-1, 1] \cap \mathbb{Z} = \{-1, 0, 1\}$.

b) Rezultă $x \in \left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right) \cap (-\infty, 2] \cap \mathbb{Z} = \left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 2\right] \cap \mathbb{Z} = \{0, 1, 2\}$.

c) Obţinem: $x \in (2, +\infty) \cap (-\infty, 5) \cap \mathbb{Z} = (2, 5) \cap \mathbb{Z} = \{3, 4\}$.

II.5. Rezolvaţi inecuaţiile:

a) $\dfrac{x}{5-x} \geqslant 0$ b) $\dfrac{1+x}{1-x} > 0$

c) $\dfrac{2x-1}{x+3} \leqslant 0$ d) $(x-2)(3-x) \geqslant 0$

e) $(2x-3)(x+5) < 0$ f) $x(1+2x) > 0$

g) $\dfrac{1-\sqrt{2}x}{\sqrt{2}-2x} \geqslant 0$ h) $x^2+x \geqslant 0$

i) $x^2-4 \leqslant 0$

R. a) I. Fracția $\dfrac{x}{5-x} \geqslant 0$ dacă (1): $x \geqslant 0$ și $5-x > 0$ sau dacă (2): $x \leqslant 0$ și $5-x < 0$. Reunind soluțiile sistemelor (1) și (2) obținem soluția inecuației date. Deci, sistemul (1) este satisfăcut pentru $x \in [0, +\infty) \cap (-\infty, 5) = [0, 5)$. Sistemul (2) este staisfăcut pentru $x \in (-\infty, 0] \cap (5, +\infty) = \emptyset$. Deci soluțiile inecuației sînt $x \in \emptyset \cup [0, 5) = [0, 5)$.

II. Studiem semnul funcțiilor de la numărător și numitor, întocmim tabloul, combinăm semnele și obținem semnul funcției definite prin $\dfrac{x}{5-x}$, de unde obținem soluția inecuației date. Deci:

x	$-\infty$			0			5			$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$5-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$\dfrac{x}{5-x}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	|	$-$	$-$	$-$

Rezultă din tablou că $\dfrac{x}{5-x} \geqslant 0$ pentru $x \in [0, 5)$.

Notă: Amintim că pentru stabilirea semnului unei funcții liniare determinăm rădăcina ecuației atașate și avem semnul coeficientului lui x pentru valori ale lui x mai mari decît rădăcina și semnul contrar coeficientului lui x pentru valori mai mici decît rădăcina. Ținem cont, de asemenea, că o fracție nu este definită pentru valorile lui x pentru care se anulează numitorul fracției.

b) Tabloul cu semnul funcției este următorul:

x	$-\infty$			-1			1			$+\infty$
$1+x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$\dfrac{1+x}{1-x}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	|	$-$	$-$	$-$

Deci, inecuația este satisfăcută pentru $x \in (-1, 1)$.

c) Obținem:

x	$-\infty$			-3			$\frac{1}{2}$			$+\infty$
$2x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{2x-1}{x+3}$	$+$	$+$	$+$	|	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

Deci: $x \in \left(-3, \dfrac{1}{2}\right]$.

d) I. $(x-2)(3-x) \geqslant 0$ dacă: (1); $x-2 \geqslant 0$ şi $3-x \geqslant 0$ sau dacă (2): $x-2 \leqslant 0$ şi $3-x \leqslant 0$. Sistemele (1) şi (2) au soluţiile $x \in [2, 3]$, respectiv $x \in \emptyset$ şi deci, inecuaţia este satisfăcută pentru $x \in [2, 3] \cup \emptyset = [2, 3]$.

II. Stabilim tabloul cu semnul funcţiei definite prin $(x-2)(3-x)$ astfel:

x	$-\infty$			2			3			$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$3-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$(x-2)(3-x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$

Deci, inecuaţia este satisfăcută pentru $x \in [2, 3]$.

e) Ca la punctul d), obţinem:

x	$-\infty$			-5			$\frac{3}{2}$			$+\infty$
$2x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+5$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(2x-3)(x+5)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

Deci $x \in \left(-5, \frac{3}{2}\right)$.

f) Obţinem:

x	$-\infty$			$-\frac{1}{2}$			0			$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$1+2x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x(1+2x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

Deci $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty)$.

g) Avem:

x	$-\infty$					$\frac{1}{\sqrt{2}}$					$+\infty$
$1-\sqrt{2}x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$\sqrt{2}-2x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$\frac{1-\sqrt{2}x}{\sqrt{2}-2x}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\vert$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Deci: $x \in \left(-\infty, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$.

Se putea observa că: $\frac{1-\sqrt{2}x}{\sqrt{2}-2x}=\frac{1-\sqrt{2}x}{\sqrt{2}(1-\sqrt{2}x)}=\frac{1}{\sqrt{2}}>0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

h) $x^2+x \geqslant 0$ este echivalentă cu $x(x+1) \geqslant 0$ care se rezolvă ca mai sus şi obţinem $x \in (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$.

i) $x^2-4 \leqslant 0$ este echivalentă cu $(x-2)(x+2) \leqslant 0$, deci $x \in [-2, 2]$.

II.6. Rezolvaţi inecuaţiile:

a) $|x-2| \geqslant 0$ b) $|3x+2| \leqslant 0$

c) $|x|(|x|-1) \leqslant 0$ d) $\frac{1}{x-3}<0$

e) $\frac{x+1}{|x+1|} \geqslant 0$ f) $\frac{x+2}{x^2} \geqslant 0$

g) $\frac{|x|+2}{2-x} \leqslant 0$ h) $\frac{x^2-4x+4}{x-1}>0$

i) $\frac{x}{3+x}<1$ j) $\frac{4-4x}{1-x}>3$.

R. a) Aplicînd definiţia modulului rezultă că inecuaţia este satisfăcută pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Analog, rezultă că inecuaţia este satisfăcută numai pentru $x=-\frac{2}{3}$.

c) Cum $|x| \geqslant 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rezultă că e necesar ca $|x|-1 \leqslant 0$ adică $|x| \leqslant 1$, de unde $-1 \leqslant x \leqslant +1$.

d) Se impune $x-3<0$ deci $x \in (-\infty, 3)$.

e) Cum $|x+1| \geqslant 0$, oricare-ar fi $x \in \mathbb{R}$, rezultă necesar $x+1 \geqslant 0$, adică $x \in [-1, +\infty)$. Cum se impune $|x+1| \neq 0$, rezultă $x \in (-1, +\infty)$.

f) $x^2 \geqslant 0$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$, deci este necesar $x+2 \geqslant 0$ adică $x \in [-2, +\infty)\setminus\{0\}$.

g) $|x|+2>0$ deci se impune ca $2-x<0$ adică $x \in (2, +\infty)$.

h) $x^2-4x+4=(x-2)^2 \geqslant 0$; Se impune $x-1>0$, deci $x \in (1, +\infty)$.

i) Avem, succesiv, $\frac{-3}{3+x}<0$ sau $3+x>0$, deci $x \in (-3, +\infty)$.

j) Rezultă $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

II.7[PO]. Rezolvaţi inecuaţiile următoare, *m* fiind un număr real oarecare:

a) $\frac{x-m}{3-x} \geqslant 0$ b) $(m-2x)(x+2)<0$

c) $\dfrac{m}{2-7x} \leqslant 0$ d) $\dfrac{mx-1}{2-x} \leqslant 0$

e) $\dfrac{x-m}{x-2} \geqslant 1$ f) $|mx - m\sqrt{3}| < m$

g) $\dfrac{m^2x-1}{mx-1} > 0$ h) $m^2x^2 - 2mx + 1 \geqslant 0$

i). $(m^2+1)x^2 - 2x + 1 > 0$ j) $mx^2 + m^2x - m - x > 0$

R. a) Stabilind semnul funcției definite prin $\dfrac{x-m}{3-x}$, se impune discuție după poziția numerelor m față de 3. Rezultă:

I. $m < 3$. Tabloul cu semnul funcției indică:

x	$-\infty$			m			3			$+\infty$
$x-m$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$3-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$\dfrac{x-m}{3-x}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$\vert$	$-$	$-$	$-$

Deci $x \in [m, 3)$.

II. Dacă $m > 3$ rezultă, analog $x \in (3, m]$.

III. Pentru $m = 3$, rezultă $-1 \geqslant 0$. Deci $x \in \emptyset$.

b) Sint mai multe situații, comparînd $\dfrac{m}{2}$ cu -2.

I. Pentru $\dfrac{m}{2} > -2$, adică pentru $m > -4$ rezultă $x \in (-\infty, -2) \cup \left(\dfrac{m}{2}, +\infty\right)$.

II. Pentru $m < -4$ rezultă $x \in \left(-\infty, +\dfrac{m}{2}\right) \cup (-2, +\infty)$.

III. Pentru $m = -4$; obținem $-2(x+2)^2 < 0$, inecuație satisfăcută pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

c) I. Pentru $m > 0$ este necesar ca $2 - 7x < 0$. Deci $x \in \left(\dfrac{2}{7}, +\infty\right)$.

II. Pentru $m < 0$ se impune $2 - 7x > 0$, deci $x \in \left(-\infty, \dfrac{2}{7}\right)$.

III. Dacă $m = 0$, rezultă $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{2}{7}\right\}$.

d) Comparînd poziția numerelor $\frac{1}{m}$ cu numărul 2, rezultă situațiile:

I. $\frac{1}{m} > 2$ sau $\frac{1-2m}{m} > 0$, inecuație cu soluția $m \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. În acest caz obținem tabloul:

x	$-\infty$			2			$\frac{1}{m}$			$+\infty$
$mx-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$\frac{mx-1}{2-x}$	$-$	$-$	$-$	$\vert$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$

Deci $x \in (-\infty, 2) \cup \left[\frac{1}{m}, +\infty\right)$.

II. Pentru $m = 0$, inecuația devine $\frac{-1}{2-x} \leqslant 0$ sau $\frac{1}{x-2} \leqslant 0$ satisfăcută, pentru $x \in (-\infty, 2)$.

III. Pentru $m = \frac{1}{2}$ inecuația devine: $\frac{x-2}{2(2-x)} \leqslant 0$ echivalentă, pentru $x \neq 2$ cu $-\frac{1}{2} \leqslant 0$, deci satisfăcută pentru orice $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$.

IV. Pentru $m \in (-\infty, 0)$ cînd $\frac{1}{m} < 2$, rezultă tabloul:

x	$-\infty$			$\frac{1}{m}$			2			$+\infty$
$mx-1$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$2-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$\frac{mx-1}{2-x}$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$\vert$	$+$	$+$	$+$

Deci $x \in \left[\frac{1}{m}, 2\right)$.

V. Pentru $m \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ cînd $\frac{1}{m} < 2$, rezultă tabloul:

x	$-\infty$			$\frac{1}{m}$			2			$+\infty$
$mx-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$\frac{mx-1}{2-x}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$\vert$	$-$	$-$	$-$

Deci $x \in \left(-\infty, \frac{1}{m}\right] \cup (2, +\infty)$.

e) $\frac{x-m}{x-2} \geq 1$ este echivalentă cu $\frac{2-m}{x-2} \geq 0$. Rezultă:

I. Pentru $m > 2$, $x-2 < 0$, deci $x \in (-\infty, 2)$.

II. Pentru $m < 2$ trebuie ca $x-2 > 0$, deci $x \in (2, +\infty)$.

III. $m = 2$ implică $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

f) Folosind $|x| < c$ echivalent cu $-c < x < c$, rezultă sistemul:

$$-m < mx - m\sqrt{3} < m.$$

Inecuaţia $mx - m\sqrt{3} < m$ este echivalentă cu $m(x - \sqrt{3} - 1) < 0$ iar inecuaţia $mx - m\sqrt{3} > -m$ este echivalentă cu inecuaţia: $m(x - \sqrt{3} + 1) > 0$. Sînt trei situaţii:

I. $m > 0$. În acest caz este necesar ca $x - \sqrt{3} - 1 < 0$ şi $x - \sqrt{3} + 1 > 0$. Rezultă $x \in (-\infty, \sqrt{3} + 1) \cap (-1 + \sqrt{3}, +\infty) = (-1 + \sqrt{3}, \sqrt{3} + 1)$ soluţiile sistemului.

II. $m < 0$ impune $x - \sqrt{3} + 1 < 0$ şi $x - \sqrt{3} - 1 > 0$. Rezultă $x \in (-\infty, \sqrt{3} - 1) \cap (1 + \sqrt{3}, +\infty) = \emptyset$.

III. $m = 0$. În acest caz sistemul nu are soluţii.

g) Apar mai multe situaţii după poziţia numerelor $\frac{1}{m^2}$ şi $\frac{1}{m}$.

I. $\frac{1}{m^2} > \frac{1}{m}$ dacă $\frac{1}{m^2} - \frac{1}{m} > 0$ sau $\frac{1-m}{m^2} > 0$, adică $1 - m > 0$ deci, pentru $m \in (-\infty, 1)$. Necesitatea comparării cu zero a coeficienţilor m şi m^2 ai lui x, pentru stabilirea semnului funcţiilor de la numărător şi numitor implică trei subcazuri:

I_1: $m \in (0, 1)$. În acest caz rezultă $x \in \left(-\infty, \frac{1}{m}\right) \cup \left(\frac{1}{m^2}, +\infty\right)$.

I_2: $m \in (-\infty, 0)$ cînd $x \in \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m^2}\right)$ şi

I_3: $m = 0$ cînd inecuaţia devine $1 > 0$ deci satisfăcută pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

II: $m \in (1, +\infty)$. În acest caz $\frac{1}{m^2} < \frac{1}{m}$ şi, deci, rezultă $x \in \left(-\infty, \frac{1}{m^2}\right) \cup \left(\frac{1}{m}, +\infty\right)$ soluţiile inecuaţiei.

III: $m = 1$. În acest caz inecuaţia devine, pentru $x \neq 1$, $1 > 0$, deci este satisfăcută pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

h) $m^2x^2 - 2mx + 1 \geq 0$ este echivalentă cu $(mx - 1)^2 \geq 0$ deci satisfăcută pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

i) Inecuaţia poate fi scrisă echivalent astfel: $m^2x^2 + (x-1)^2 > 0$, satisfăcută pentru orice x real, fiind sumă de numere pozitive (pătrate).

FUNCȚII

III.1. Verificați dacă există funcții $f: A \to B$ prin formulele indicate în cazurile următoare:

a) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+1}$;

b) $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{0, 1\}$, $f(x) = x^2$;

c) $A = \{-1, 0, 1)$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$;

d) $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = (0, +\infty)$, $f(x) = x^2$;

e) $A = \left\{-2, -\dfrac{3}{2}, -1{,}6\right\}$, $B = \{-2\}$, $f(x) = [x]$, unde prin $[x]$ am notat partea întreagă a numărului x;

f) $A = \left\{-2, -\dfrac{3}{5}, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right\}$, $B = (0, 1]$, $f(x) = \{x\} = x - [x]$;

g) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$;

h) $A = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$;

R. a) Există $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+1}$, deoarece pentru orice $x \in \mathbb{R}$, există $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+1} \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1$ fiind întotdeauna nenul;

b) $f(-1) = f(1) = 1$, $f(0) = 0$, deci oricărui $x \in A$ îi corespunde un element și numai unul din B;

c) Imaginile elementelor -1, 0, 1 prin f aparțin lui $\mathbb{R}$, deci există funcția: $f: \{-1, 0, 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$;

d) $f(0) = 0 \notin (0, +\infty)$ deci nu există funcția indicată;

e) Avem $[-2] = -2$, $\left[-\dfrac{3}{2}\right] = -2$, $[-1, 6] = -2$ deci orice element din A are imaginea în mulțimea B, deci există f;

f) $\{-2\} = 0 \notin (0, 1]$ deci nu există f;

g) Pentru $x = -1$, $f(x)$ nu este definită, deci f nu există;

h) Valorile lui x pentru care $f(x)$ nu este definită sînt -1 și $+1$ (cele care anulează numitorul). Cum $A = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ rezultă că f există;

III.2. Determinați domeniul maxim D_f pe care pot fi definite funcții prin formulele următoare:

a) $f(x) = \dfrac{x}{2x-5}$; b) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x-2}$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ d) $f(x) = \dfrac{1}{[x]-2}$;

e) $f(x) = \dfrac{1}{|x|-1}$; f) $f(x) = \dfrac{1}{2^x}$.

R. a) Trebuie ca numitorul $2x - 5$ să nu se anuleze. $2x - 5 \neq 0$ implică $x \neq \dfrac{5}{2}$. Deci: $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{5}{2}\right\}$, b) $x - 1 \neq 0$ şi $x - 2 \neq 0$ implică $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$; c) $\sqrt{x} \neq 0$ şi $x \geq 0$ implică $D_f = (0, +\infty)$; d) $[x] - 2 \neq 0$ sau $[x] \neq 2$. Dar $[x] = 2$ pentru toate numerele din intervalul $[2,3)$, deci $D_f = \mathbb{R} \setminus [2, 3)$; e) $|x| - 1 \neq 0$ implică $|x| \neq 1$. Avem $|x| = 1$ pentru $x = -1$ şi $x = 1$, deci $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; f) $2^x > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Deci $D_f = \mathbb{R}$.

III.3. Determinaţi mulţimea valorilor V_f a funcţiilor următoare:

a) $f: \left\{-1, -\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}, 1\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$;

b) $f: [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$;

c) $f: [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 1$;

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 2| + 1$;

e) $f: [-3, 2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$;

f) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}$;

g) $f: \left\{-1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 1\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \max\left(x, \dfrac{1}{x}\right)$

h) $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \in \{-2, -1, 0, 1\} \\ x - 2, & x \in \{2\} \end{cases}$

i) $f: [1, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + 1$, $a \in \mathbb{R}_+$;

j) $f: [-3, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + 1$, $a \in \mathbb{R}$.

R. a) $f(-1) = \dfrac{2\cdot(-1)}{1 + (-1)^2} = \dfrac{-2}{1+1} = \dfrac{-2}{2} = -1$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2\left(-\dfrac{1}{2}\right)}{1 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2} = -\dfrac{4}{5}$, $f(0) = \dfrac{2 \cdot 0}{1 + 0} = 0$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{4}{5}$, $f(1) = 1$; Deci $V_f = \left\{-1, -\dfrac{4}{5}, 0, \dfrac{4}{5}, 1\right\}$.

b) Observăm, mai întîi, că $x_1 < x_2$ implică $x_1 - 1 < x_2 - 1$ adică $f(x_1) < f(x_2)$. Deci f ia cea mai mică valoare pentru $x = -2$ şi cea mai mare valoare pentru $x = 2$. $f(-2) = -3$, $f(2) = 1$. Deci $V_f = [-3, 1]$.

c) $x_1 < x_2$ implică $-x_1 > -x_2$ sau $-x_1 + 1 > -x_2 + 1$, adică $f(x_1) > f(x_2)$. Deci $f(-2) = 3$ este cea mai mare valoare iar $f(2) = -1$ este cea mai mică valoare a lui f. Deci $V_f = [-1, 3]$.

d) Cum $|x - 2| \geq 0$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ rezultă că $|x - 2| + 1 \geq 1$ şi deci $V_f = [1, +\infty)$.

e) Pentru $x \in [-3, -2)$, $[x] = -3$. Pentru $x \in [-2, -1)$, $[x] = -2$ ş.a.m.d., rezultă $V_f = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$.

f) $\{x\} = x - [x] \in [0, 1)$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, deci $V_f = [0, 1)$.

g) $f(-1) = \max(-1, -1) = -1$; $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \max\left(-\frac{1}{2}, -2\right) = -\frac{1}{2}$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = \max\left(\frac{1}{2}, 2\right) = 2$; $f(1) = \max(1, 1) = 1$. Deci $V_f = \left\{-1, -\frac{1}{2}, 1, 2\right\}$.

h) $f(-2) = -(-2)^2 = -4$, $f(-1) = -(-1)^2 = -1$, $f(0) = 0$; $f(1) = -1$, $f(2) = 2 - 2 = 0$. Deci $V_f = \{-4, -1, 0\}$.

i) $a > 0$ şi $x_1 < x_2$ implică $ax_1 < ax_2$ şi $ax_1 + 1 < ax_2 + 1$. Rezultă că $f(1)$ este cea mai mică valoare a lui f şi $f(3)$ cea mai mare valoare a lui f. Deci $V_f = [a + 1, 3a + 1]$.

j) Sînt două cazuri: I. $a < 0$ cînd $V_f = [a + 1, -3a + 1]$ şi II. $a > 0$ cînd rezultă ca la i) $ax_1+1<ax_2+1$ dacă $x_1<x_2$ şi deci $V_f = [-3a + 1, a + 1]$.

III.4. Studiaţi monotonia funcţiilor:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 3$;

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$;

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax - b$, $a, b \in \mathbb{R}_+$;

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (-1)^n x + n$, $n \in \mathbb{N}$;

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (2m - 1)x + n$, $m, n \in \mathbb{R}$;

g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = [x]$;

h) $f : [1, +\infty) \to [-1, +\infty)$, $f(x) = x^2 - 2x$;

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (5 - m)x + n$, $m \in \mathbb{N} \cap [0, 10]$, $n \in \mathbb{R}$.

R. a) Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$. Rezultă $2x_1 < 2x_2$ sau $2x_1 - 3 < 2x_2 - 3$, adică $f(x_1) < f(x_2)$. Deci f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ implică $-x_1 > -x_2$ sau $-x_1 + 3 > -x_2 + 3$, adică $f(x_1) > f(x_2)$ şi deci f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) $x_1 < x_2$ implică $ax_1 < ax_2$ sau $ax_1 > ax_2$ după cum $a > 0$ respectiv $a < 0$. Aşadar sînt mai multe cazuri: I. $a > 0$ implică f strict crescătoare. II. $a < 0$ cînd f este strict descrescătoare; III. $a = 0$ implică f este funcţia constantă (ia valoarea b, oricare ar fi x real);

d) Pentru $a \neq 0$ f este strict crescătoare fiind o funcţie de gradul I cu coeficientul lui x pozitiv (vezi punctul c)). Dacă $a = 0$ atunci f este constantă;

e) Monotonia depinde de semnul coeficientului lui x. Sînt două cazuri: I. n par implică f strict crescătoare şi II. n impar implică f strict descrescătoare;

f) I. Dacă $2m - 1 > 0$ adică $m > \frac{1}{2}$, atunci f este strict crescătoare; II. $m < \frac{1}{2}$ atunci f este strict descrescătoare; III. $m = \frac{1}{2}$, atunci f este constantă.

g) $x_1 < x_1$ implică, prin definiția părții întregi a unui număr, $[x_1] \leqslant [x_2]$, deci f este strict crescătoare;

h) Fie $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, $x_1 < x_2$. Demonstrăm că $f(x_1) < f(x_2)$. $x_1^2 - 2x_1 < x_2^2 - 2x_2$ este echivalent cu $x_1^2 - x_2^2 - 2(x_1 - x_2) < 0$ echivalent cu $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2) < 0$ ceea ce este adevărat deoarece: $x_1 > 1$, $x_2 > 1$ implică $x_1 + x_2 - 2 > 0$ și $x_1 < x_2$ implică $x_1 - x_2 < 0$. Așadar f este strict crescătoare.

i) I. Dacă $5 - m > 0$ sau $m < 5$ sau $m \in (-\infty, 5) \cap \mathbb{N} \cap [0, 10] = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, atunci f este strict crescătoare. II. Dacă $m > 5$ sau $m \in (5, +\infty) \cap \mathbb{N} \cap [0, 10] = \{6, 7, 8, 9, 10\}$, atunci f este strict descrescătoare, III. Pentru $m = 5$, f este o constantă.

III.5PO. Arătați că următoarele funcții liniare sînt strict monotone pe $\mathbb{R}$ oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}_+$, $a \neq b$.

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (2ab - a^2 - b^2)x + c$;

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (a^2 + b^2 - 2a - 2b + 2)x + c$;

3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\sqrt{ab} - \dfrac{a+b}{2}\right)x + c$,

4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\dfrac{2ab}{a+b} - \sqrt{ab}\right)x + c$,

5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} - 2\right)x + c$.

R. În toate cazurile vom analiza semnul coeficientului lui x.

1) $2ab - a^2 - b^2 = -(a - b)^2 < 0$, deci f este strict descrescătoare.

2) $a^2 + b^2 - 2a - 2b + 2 = (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) = (a - 1)^2 + (b - 1)^2 > 0$, deci f este strict crescătoare,

3) $\sqrt{ab} - \dfrac{a+b}{2} = m_g - m_a < 0$, așadar f este strict descrescătoare;

4) $\dfrac{2ab}{a+b} - \sqrt{ab} = m_h - m_g < 0$, deci f este strict descrescătoare;

5) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} > 2$ după cum am văzut, deci $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} - 2 > 0$ ceea ce implică f strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

III.6. Studiați monotonia funcției:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in (-\infty, 0) \\ 1, & x \in [0, +2] \\ x - 1, & x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

R. Pe intervalul $(-\infty, 0)$ f este strict crescătoare fiind funcție liniară cu coeficientul lui x pozitiv. În plus $f(x) \leqslant f(0) = 1$. Analog pe $(2, +\infty)$ f este strict crescătoare: în plus $1 = f(2) \leqslant f(x)$. Deci f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

III.7PO. Dintre funcțiile:

$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_a(x) = \begin{cases} -x - 2, & x \in (-\infty, 1) \\ ax, & x \in [1, +\infty),\ a \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

determinați-le pe cele strict monotone.

R. Pe intervalul $(-\infty, 1)$ funcția f liniară cu coeficientul lui x negativ, este strict descrescătoare. Rezultă că pe intervalul $[1, +\infty)$ f trebuie să fie strict descrescătoare și $f(1) < f(x)$, oricare ar fi $x \in (-\infty, 1)$. Aceste condiții impun $a < 0$ și $a < f(x)$, pentru orice $x \in (-\infty, 1)$. Cum $f(x) > -3$, oricare-ar fi $x \in (-\infty, 1)$ rezultă că funcțiile căutate se obțin pentru $a < -3$.

III.8. Într-un sistem de axe ortogonal xOy, trasați graficul funcțiilor:

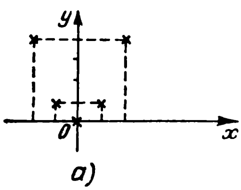
a) $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$

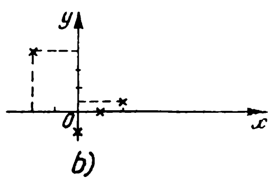
b) $f : \{-2, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

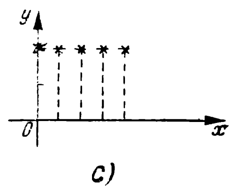
c) $f : \left\{0, \dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{3}{2}, 2\right\} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2.$

R. Reprezentăm în sistemul xOy punctele $(x, f(x))$ obținute pentru fiecare x din domeniul de definiție al funcțiilor:

a) Obținem: $(-2, 4)$; $(-1, 1)$; $(0, 0)$; $(1, 1)$; $(2, 4)$.







b) Graficul este format din punctele: $(-2, 3)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $\left(2, \dfrac{1}{3}\right)$.

c) Obținem punctele $(0, 2)$, $\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$, $(1, 2)$, $\left(\dfrac{3}{2}, 2\right)$, $(2, 2)$.

III.9. Trasați graficul funcțiilor:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x - 2$;

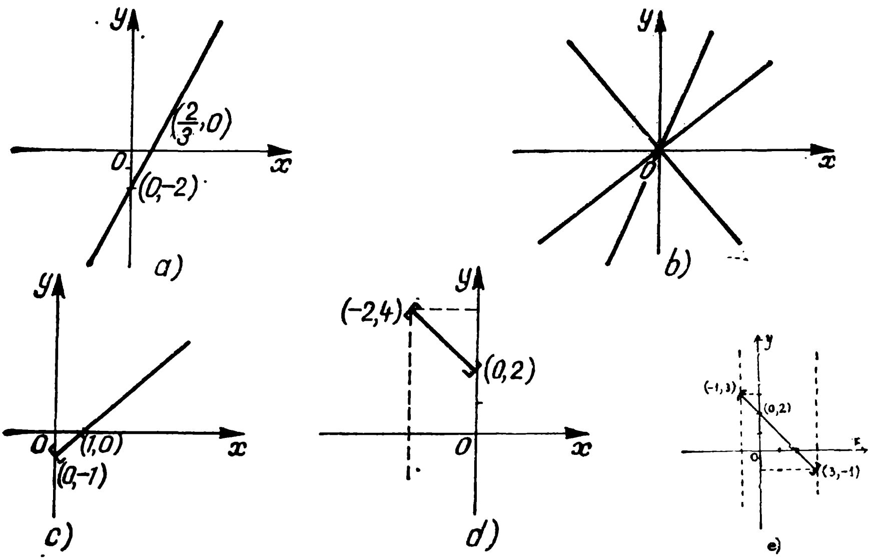
b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax,\ a \in \mathbb{R}$;

c) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x - 1$;

d) $f : [-2, 0] \to \mathbb{R},\ f(x) = -x + 2$;

e) $f : (-1, 3] \to \mathbb{R},\ f(x) = -x + 2.$

R. a) Ținînd cont că graficul unei funcții liniare este o dreaptă, este suficient să determinăm două puncte ale graficului. Obținem, de exemplu $f(0) = -2$ și $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = 0$. Punctele $(0, -2)$ și $\left(\dfrac{2}{3}, 0\right)$ determină dreapta; b) Avem $f(0) = 0$, $f(1) = a$. Pentru fiecare a obținem cîte o dreaptă. Toate dreptele trec prin punctul fix $(0, 0)$; c) $f(0) = -1$, $f(1) = 0$ ș.a.m.d.; d) $f(-2) = 4$, $f(0) = 2$ etc.; e) $f(0) = 2$, $f(3) = -1$.



III.10. Trasați graficul funcțiilor:

a) $f : [-4, 4] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} -x + 1, & x \in [-4, 0] \\ 2, & x \in (0, 2) \\ x, & x \in [2, 4]; \end{cases}$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} -2x + 5, & x \in (-\infty, 2) \\ \frac{1}{2}x, & x \in [2, +\infty); \end{cases}$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$;

d) $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$;

e) $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}$;

f) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0) \\ 1, & x \in (0, +\infty); \end{cases}$

g) $f : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}, \ f(x) = \text{signum } x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0; \end{cases}$

h) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \max(2x - 1, \ 4x - 2)$;

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \min(x - 4, \ 3x - 2)$;

j) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 1| \text{sign} x$.

R. a) Obținem $f(-4) = -(-4) + 1 = 5$. $f(0) = 1$, $f(1) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 2$, $f(2) = 2$, $f(4) = 4$;

b) $f(1) = -2 \cdot 1 + 5 = 3$, $f(0) = 5$, $f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$, $f(4) = 2$;

c) Prin definiția modulului avem: $|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ 0, & x = 0, \\ x, & x > 0 \end{cases}$ $f(-1) = +1,$

$f(0) = 0,\ f(1) = 1$;

d) Pentru $x \in [-2, -1)$, $[x] = -2$, pentru $x \in [-1, 0)$, $[x] = -1$, pentru $x \in [0, 1)$, $[x] = 0$, pentru $x \in [1, 2)$, $[x] = 1$, pentru $x = 2$, $[x] = 2$;

e) $\{x\} = x - [x]$ și ținînd cont de exercițiul precedent obținem:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \in [-2, -1) \\ x + 1, & x \in [-1, 0) \\ x, & x \in [0, 1) \\ x - 1, & x \in [1, 2) \\ x - 2, & x = 2. \end{cases}$$

f) Se obțin două semidrepte în cazul acestei funcții (numită funcția „treaptă");

h) Determinăm x pentru care $2x - 1 \geqslant 4x - 2$. Obținem $2x - 4x \geqslant 1 - 2$ sau $-2x \geqslant -1$, adică $x \leqslant \frac{1}{2}$. Deci $\max(2x - 1, 4x - 2) = \begin{cases} 2x - 1, & x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \\ 4x - 2, & x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right]. \end{cases}$

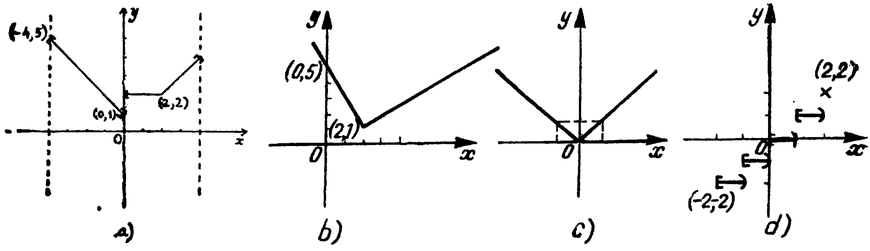
i) $x - 4 \leqslant 3x - 2$ echivalent cu $-2x \leqslant 2$ sau $x \geqslant -1$.

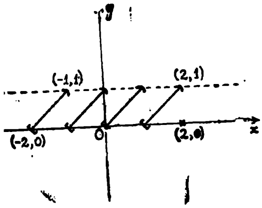
Deci $\min(x - 4, 3x - 2) = \begin{cases} x - 4, x \in [-1, +\infty) \\ 3x - 2, x \in (-\infty, -1). \end{cases}$

j) $|x - 1| = \begin{cases} -x + 1, & x - 1 \leqslant 0 \\ x - 1, & x - 1 > 0 \end{cases}$ sau $|x - 1| = \begin{cases} -x + 1, & x \leqslant 1 \\ x - 1, & x > 1. \end{cases}$

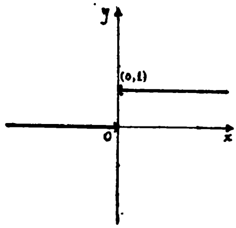
Ținînd cont și de definiția funcției signum, efectuînd produsul indicat de f obținem:

$$|x - 1| \operatorname{sign} x = \begin{cases} x - 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x + 1, & 0 < x \leqslant 1 \\ x - 1, & x > 1. \end{cases}$$

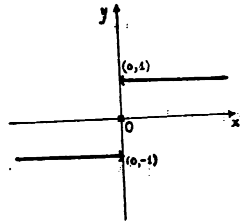




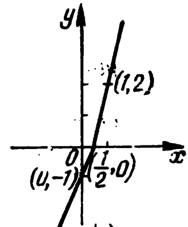
e)



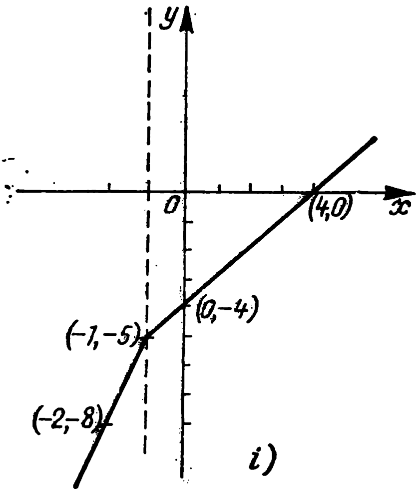
f)



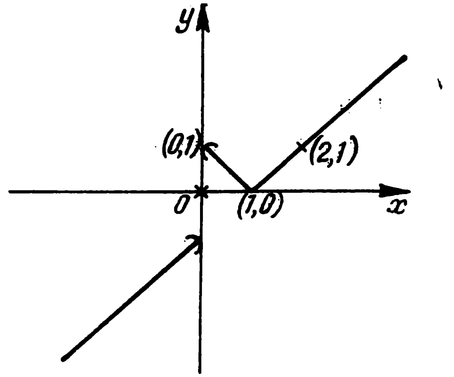
g)



h)



i)



j)

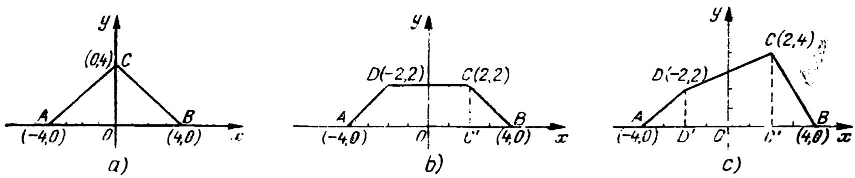
III.11. Calculați aria poligoanelor mărginite de axa absciselor Ox și de graficul funcțiilor următoare:

a) $f : [-4, 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x + 4, & x \in [-4, 0) \\ -x + 4, & x \in [0, 4], \end{cases}$

b) $f : [-4, 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x + 4, & x \in [-4, -2) \\ 2, & x \in [-2, 2] \\ -x + 4, & x \in (2, 4], \end{cases}$

c) $f : [-4, 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x + 4, & x \in [-4, -2) \\ \dfrac{x}{2} + 3, & x \in [-2, 2] \\ -2x + 8, & x \in (2, 4]. \end{cases}$

R. a) Trasînd graficul obținem triunghiul isoscel ABC. $A(-4, 0)$, $B(4, 0)$, $C(0, 4)$.



Pentru calculul ariei triunghiului ABC folosim formula cunoscută

$$S = \frac{AB \cdot OC}{2}, \quad S = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16.$$

b) Obținem, după trasarea graficului, trapezul isoscel $ABCD$ cu baza mare $AB = 8$, baza mică $DC = 4$ și înălțimea $CC' = 2$.

$$S = \frac{(AB + DC)CC'}{2} = \frac{(8 + 4) \cdot 2}{2} = 12.$$

c) Pentru calculul ariei poligonului $ABCD$, folosim, de exemplu, relația:

$S(ABCD) = S(ADD') + S(DD'C'C) + S(CC'B)$. Deci $S(ABCD) = \dfrac{AD' \cdot DD'}{2} +$

$$+ \frac{(CC' + DD')C'D'}{2} + \frac{C'B \cdot CC'}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{(4 + 2) \cdot 4}{2} + \frac{2 \cdot 4}{2} = 18.$$

III.12. Determinați funcțiile liniare $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ știind că graficul lor trece prin punctele:

a) $(0, 2)$ și $(1, 2)$; b) $(-2, 0)$ și $(0, 2)$; c) $(-1, -2)$ și $(2, 5)$.

R. a) Funcția liniară va fi de forma $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. În condițiile date vom determina pe a și b. Dacă punctul $(0, 2)$ aparține graficului, atunci $f(0) = 2$ sau $2 = f(0) = a \cdot 0 + b$, de unde $b = 2$. La fel $f(1) = 2$ implică $2 = f(1) = a + b$, de unde rezultă $a = 0$. Deci funcția căutată este $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2$. b) $f(-2) = 0$ este echivalent cu $-2a + b = 0$, (1); $f(0) = 2$ conduce la $a \cdot 0 + b = 2$, (2). Din relațiile (1) și (2) rezultă $b = 2$ și $a = 1$. Deci $f(x) = x + 2$; c) $f(-1) = -2$ implică $-a + b = -2$, (1); $f(2) = 5$ implică $2a + b = 5$, (2).

Din (1) și (2) rezultă $a = \dfrac{7}{3}$ și $b = \dfrac{1}{3}$ și deci $f(x) = \dfrac{7}{3}x + \dfrac{1}{3}$.

III.13. Determinați punctele de intersecție ale dreptelor:

a) $d_1: 2x - y + 3 = 0$ și $d_2: x + y = 0$

b) $d_1: x - 3y + 1 = 0$ și $d_2: -2x + 6y + 1 = 0$

c) $d_1: 2x - y + 1 = 0$ și $d_2: 4x - 2y + 2 = 0$.

R. a) Fie (x_0, y_0) punctul de intersecție al dreptelor d_1 și d_2. $(x_0, y_0) \in d_1$ implică $2x_0 - y_0 + 3 = 0$, (1); $(x_0, y_0) \in d_2$ implică $x_0 + y_0 = 0$, (2). Sistemul în x_0, y_0 format din ecuațiile (1) și (2) conduce la $x_0 = -1$, $y_0 = 1$.

b) Ca mai sus, punctul de intersecţie al dreptelor d_1 şi d_2 este soluţia sistemului format din ecuaţiile $x_0 - 3y_0 + 1 = 0$, (1) şi $-2x_0 + 6y_0 + 1 = 0$, (2). Sistemul nu are însă soluţie (înmulţind ecuaţia (1) cu -2 obţinem $-2x_0 + 6y_0 = 2$ iar din ecuaţia (2) rezultă $-2x_0 + 6y_0 = -1$.) Rezultă că dreptele d_1 şi d_2 sînt paralele.

c) Observăm că $4x - 2y + 2 = 2(2x - y + 1)$ de unde rezultă că punctele (x_0, y_0) care verifică d_2, verifică şi d_1. Aşadar cele două ecuaţii reprezintă aceeaşi dreaptă.

III.14. Fie dreptele $d_m : x - my + 1 - m = 0$, $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Arătaţi că dreptele d_m trec prin punctul „fix" $(-1, -1)$.

Determinaţi punctul fix al dreptelor:

a) $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$

b) $2x - (m + 1)y + m = 0$, $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

c) $(m - 2)x - (m - 1)y + m - 2 = 0$, $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

R. Într-adevăr, făcînd $x = -1$ în ecuaţiile dreptelor d_m, obţinem: $-1 - my + 1 - m = 0$, $-m(y + 1) = 0$, de unde $y + 1 = 0$, $y = -1$, m fiind, prin ipoteză, nenul.

a) Pentru $x = 0$ rezultă $y = 0$, deci $(0, 0)$ este punctul fix al dreptelor date.

b) Ecuaţiile dreptelor se mai scriu astfel:

$$m(1 - y) + 2x - y = 0.$$

Pentru a determina punctele independente de m care verifică aceste ecuaţii trebuie ca coeficientul lui m să se anuleze.

Deci $1 - y = 0$, $y = 1$, din ecuaţie rezultă apoi $x = \dfrac{1}{2}$. Deci punctul fix este $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$

c) Ca mai sus ecuaţiile se mai scriu $m(x - y + 1) - 2x + y - 2 = 0$. Trebuie ca: $x - y + 1 = 0$ şi $-2x + y - 2 = 0$ sistem care conduce la punctul fix $(-1, 0)$.

III.15[PO]**.** Determinaţi intersecţia graficelor funcţiilor următoare cu axele Ox şi Oy ale unui sistem de axe ortogonal xOy.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x + 1) = x - 1$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(2x) = x + 2$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(2x + 1) = x$.

R. Determinăm mai întîi relaţia funcţională $f(x)$. Notăm $x + 1 = t$. Rezultă $x = t - 1$. Deci $f(t) = (t - 1) - 1$ sau $f(t) = t - 2$ sau $f(x) = x - 2$. Punctele de intersecţie cu axa Oy au abscisa $x = 0$. Din relaţia funcţională determinată rezultă $y = f(0) = 0 - 2 = -2$. Deci punctul de intersecţie al graficului funcţiei f cu axa Oy este $(0, -2)$.

Punctele de intersecţie cu axa Ox au ordonata $y = 0$. În acest caz $y = f(x) = 0$ implică $x - 2 = 0$ sau $x = 2$ şi am obţinut deci punctul $(2, 0)$.

b) Analog $2x = t$ implică $x = \dfrac{t}{2}$ şi $f(t) = \dfrac{t}{2} + 2$ sau $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 2$. Fie $x = 0$. Rezultă $y = f(0) = 2$. Deci punctul $(0, 2)$ este punctul de intersecţie al graficului lui f cu axa Oy. Fie $y = 0$, adică $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 2 = 0$. Rezultă $x = -4$. Deci $(-4, 0)$ este punctul de intersecţie al graficului lui f cu axa Ox.

c) $2x + 1 = t$ implică $x = \dfrac{t - 1}{2}$ şi $f(t) = \dfrac{t - 1}{2}$, adică $f(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$. Cele două puncte de intersecţie sînt $\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$ şi $(1, 0)$.

III.16^PO. Determinați toate funcțiile $f, g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relațiile:

a) $2f(x) + 3f(1-x) = 4x - 1$;

b) $g(x+2) + 2g(3-x) = x$;

c) $mh(x+a) + nh(b-x) = x$, $a, b, m, n \in \mathbb{R}$, $m^2 \neq n^2$

oricare ar fi x real.

R. a) În relația (1): $2f(x) + 3f(1-x) = 4x - 1$ valabilă pentru orice x real, înlocuim x cu $1-x$ și obținem relația (2): $2f(1-x) + 3f(x) = 3 - 4x$. Cu (1) și (2) formăm un sistem cu necunoscutele $f(x)$ și $f(1-x)$. Rezolvînd sistemul obținem: $f(x) = -4x + \frac{11}{5}$.

b) În relația (1): $g(x+2) + 2g(3-x) = x$ căutăm să-l înlocuim pe x astfel încît să transformăm $x+2$ în $3-x$. Înlocuim x cu $1-x$. Obținem relația (2): $g(3-x) + 2g(x+2) = 1 - x$. (1) și (2) formează un sistem cu necunoscutele $g(3-x)$ și $g(x+2)$, pe care rezolvîndu-l, obținem $g(x+2) = -x + \frac{2}{3}$. Procedînd acum ca la exercițiul III.15. obținem

$$g(x) = -x + \frac{8}{3}.$$

c) Înlocuim x cu $b - a - x$ care va transforma $x + a$ în $b - x$. Obținem sistemul format din ecuațiile (1): $m\,h(x+a) + n\,h(b-x) = x$ și (2): $m\,h(b-x) + n\,h(x+a) = b - a - x$, care conduce la $h(x+a) = \frac{(m+n)x + n(a-b)}{m^2 - n^2}$ și mai departe

$$h(x) = \frac{(m+n)x - ma - nb}{m^2 - n^2}.$$ Se observă că h există în ipoteza $m^2 - n^2 \neq 0$.

III.17^PO. Determinați funcțiile $f, g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relațiile:

a) $2xf(x) = f^2(x) + x^2$

b) $g(x)\,g(y) + 1 = g(x) + g(y)$

c) $\frac{1}{2}[h^2(x) + h^2(y)] + 1 = h(x) + h(y)$, oricare ar fi x și y numere reale.

R. a) Relația din enunț se mai scrie $[f(x) - x]^2 = 0$, (1) de unde rezultă $f(x) - x = 0$ sau $f(x) = x$. Funcția f determinată este unică. Într-adevăr, dacă ar exista g, $g(x) \neq x$, $g(x) \neq f(x)$ cu proprietatea din enunț, adică cu $[g(x) - x]^2 = 0$, (2). Scăzînd (1) cu (2), rezultă $f(x) = g(x)$. sau $g(x) = x$. Contradicție.

b) Relația avînd loc pentru orice x și y reali, facem $y = x$ și obținem: $g^2(x) + 1 = 2g(x)$, (1) sau $[g(x) - 1]^2 = 0$, de unde $g(x) = 1$. Demonstrăm că aceasta este singura funcție cu proprietatea din enunț. Într-adevăr, fie $f(x) \neq g(x)$ și $f(x) \neq 1$ cu proprietatea $f^2(x) + 1 = 2f(x)$, (2). Scăzînd (1) și (2) obținem $g^2(x) - f^2(x) = 2[g(x) - f(x)]$ sau $[g(x) - f(x)][f(x) + g(x) - 2] = 0$. Cum $f(x) \neq g(x)$ și $g(x) = 1$, obținem $1 + f(x) - 2 = 0$, adică $f(x) = 1$. Absurd. Deci g este unică.

c) Relația se mai scrie: $[h(x) - 1]^2 + [h(y) - 1]^2 = 0$, de unde rezultă $h(x) = 1$. Unicitatea se demonstrează ca mai sus.

III.18^PO. Determinați funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică inegalitățile:

$$f(x+1) \leqslant x \leqslant f(x) + 1, \text{ pentru orice } x \text{ real.}$$

R. Din inegalitatea $x \leqslant f(x) + 1$ rezultă $f(x) \geqslant x - 1$, (1). Din inegalitatea $f(x+1) \leqslant x$, punînd în locul lui x, $x - 1$ obținem $f(x) \leqslant x - 1$, (2). Din (1) și (2) rezultă $f(x) = x - 1$.

III.19^{PO}. Demonstrați că funcțiile liniare verifică relația (Jensen):

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}, \text{ oricare ar fi } x, y \text{ reali.}$$

R. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}$, o funcție liniară oarecare. Avem:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = a\frac{x+y}{2} + b = \frac{a(x+y)+2b}{2} = \frac{(ax+b)+(ay+b)}{2} = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

III.20^{PO}. Determinați funcțiile liniare care verifică relația:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ oricare ar fi } x \text{ și } y \text{ reali.}$$

R. Fie $f(x) = ax + b$. Avem: $f(x+y) = a(x+y) + b$, (1) și $f(x) + f(y) = ax + b + ay + b = a(x+y) + 2b$, (2). Trebuie deci ca $a(x+y) + b = a(x+y) + 2b$. Rezultă $b = 2b$ care este adevărată numai dacă $b = 0$. Așadar funcțiile cu proprietatea cerută sînt funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$.

III.21^{PO}. Demonstrați că nu există nici o funcție care să verifice relația:

$$f(x) + f(1-x) = x, \text{ oricare-ar fi } x \text{ real.}$$

R. Relația avînd loc pentru orice x real, considerăm $x = 0$ și obținem $f(0) + f(1) = 0$, (1). Luînd $x = 1$, obținem $f(1) + f(0) = 1$, (2). Relațiile (1) și (2) sînt contradictorii, deci nu există funcții cu proprietatea enunțată.

III.22^{PO}. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, satisfăcînd relația:

$$mf(x-1) + nf(-x) = 2x + 1, \text{ pentru orice } x \text{ real.}$$

Determinați m și n reali astfel încît $f(-2) = 5$ și $f(1) = 1$.

R. Punem în relația dată $x = -1$ și obținem: $mf(-2) + nf(1) = -1$, (1). Pentru $x = 2$ obținem: $mf(1) + nf(-2) = 5$, (2). Înlocuind $f(-2) = 5$ și $f(1) = 1$, obținem sistemul în m și n format din ecuațiile: $5m + n = -1$ și $m + 5n = 5$. După rezolvarea sistemului obținem: $m = \frac{13}{12}$ și $n = -\frac{5}{12}$.

III.23^{PO}. Fie funcțiile $f_m: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, descrise de formula:

$$f_m(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (-\infty, 2] \\ mx - 3, & x \in (2, +\infty), \end{cases} \quad m \in \mathbb{R}.$$

a) Determinați funcția al cărei grafic trece prin punctul $A(3,3)$.
b) Cercetați dacă funcția găsită este crescătoare.

R. a) Faptul că punctul $A(3, 3)$ aparține graficului revine la existența relației $f(3) = 3$ ceea ce implică $3m - 3 = 3$, adică $m = 2$.

b) Pe intervalul $(-\infty, 2]$, funcția liniară cu coeficientul lui x pozitiv este strict crescătoare, cea mai mare valoare a ei fiind $f(2) = 3$, (1). Analog, pe intervalul $(2, +\infty)$ funcția (pentru $m = 2$) este strict crescătoare, valorile ei $f(x) > f(2) = 3$, (2). Rezultatele (1) și (2) conduc la concluzia că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

CAPITOLUL IV

POLINOAME

IV.1. Fie polinomul : $P(X, Y) = X^4Y - 5X^2Y^3 + X^2Y$.

a) Determinați : $P(-\sqrt{2}, 0)$, $P(0, -1)$, $P(-2, 2)$, $P(-1, -1)$,

$$P(x, x),\ x \in \mathbb{R}.$$

b) Arătați că : $P(-x, y) = P(x, y)$ și $P(-x, -y) = -P(x, y) = P(x, -y)$.

R. a) Obținem : $P(-\sqrt{2}, 0) = 0 = P(0, -1)$, $P(-2, 2) = -120$, $P(-1, -1) = 3$, $P(x, x) = x^5 - 5x^5 + x^3 = -4x^5 + x^3$.

b) $P(-x, y) = (-x)^4y - 5(-x)^2y^3 + (-x)^2y = x^4y - 5x^2y^3 + x^2y = P(x, y)$.

$$P(-x, -y) = (-x)^4(-y) - 5(-x)^2(-y)^3 + (-x)^2(-y) = -x^4y + 5x^2y^3 - x^2y =$$

$$= -P(x, y).$$

$P(x, -y) = x^4(-y) - 5x^2(-y)^3 + x^2(-y) = -x^4y + 5x^2y^3 - x^2y = -P(x, y)$.

IV.2. Determinați suma coeficienților polinoamelor :

a) $P_1(X) = X^3 - 5X^2 + X + 3$

b) $P_2(X) = X^{100} - X^{99} + X^{98} - \ldots - X + 1$

c) $$P_3(X) = X^6 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}X^5 + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}X^4 + \frac{1}{2+\sqrt{3}}X^3 + \frac{1}{\sqrt{5}+2}X^2 + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}X - \sqrt{6}$$

d) $P_4(X) = (1 - 2X)^{1982} + (2 - 3X)^{1983} + (3 - 4X)^{1984} + (4 - 5X)^{1985}$.

e) $P_5(X) = (1 - 2X)^{k-1} + (2 - 3X)^k + (3 - 4X)^{k+1}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

R. Pentru orice polinom, $P(1)$ reprezintă suma coeficienților polinomului.

a) $P_1(1) = 1 - 5 + 1 + 3 = 0$

b) $P_2(1) = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots - 1 + 1 = 1$, fiind 101 coeficienți;

c) $P_3(1) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+2} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} - \sqrt{6}$.

Raționalizînd numitorii fracțiilor, rezultă:

$$P_3(1) = 1 + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + 2 - \sqrt{3} + \sqrt{5} - 2 + \sqrt{6} - \sqrt{5} - \sqrt{6} = 0.$$

d) $P_4(1) = (-1)^{1982} + (-1)^{1983} + (-1)^{1984} + (-1)^{1985} = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$;

e) $P_5(1) = (-1)^{k-1} + (-1)^k + (-1)^{k+1} = (-1)^k(-1)^{-1} + (-1)^k + (-1)^k(-1) = -(-1)^k + (-1)^k - (-1)^k = -(-1)^k$.

Rezultă că pentru k natural par, $P_5(1) = -1$, iar pentru k natural impar $P_5(1) = 1$.

IV.3. Fie polinoamele:

$$P(X, Y) = X^3 - 3X^2Y + XY^2 - Y^3$$

$$Q(X, Y) = X^5 - X^4Y + X^3Y^2 - 3X^2Y^3 - 5XY^4 - Y^5.$$

Arătați că există polinoamele p și q astfel încît:

$$P(x, tx) = x^3p(t) \text{ și } Q(x, tx) = x^5q(t),$$

oricare ar fi x, t numere reale.

R. Avem:

$$P(x, tx) = x^3 - 3x^3t + x^3t^2 - x^3t^3 = x^3(1 - 3t + t^2 - t^3) = x^3p(t).$$

Deci, există polinomul $p(T) = -T^3 + T^2 - 3T + 1$ care verifică relația dată.

Analog, există $q(T) = -T^5 - 5T^4 - 3T^3 + T^2 - T + 1$.

Observație: Polinoamele de tipul polinoamelor P și Q se numesc polinoame omogene în X și Y (cu gradul fiecărui monom același).

IV.4. Fie polinomul:

$$P(X, Y, Z) = X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XYZ.$$

a) Determinați $P(1, 2, 3)$, $P(1, 0, -1)$, $P(x, y, -x-y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Verificați că:

$$P(x, y, z) = P(y, z, x) = P(z, x, y) = P(x, z, y) = P(y, x, z) = P(z, y, x),\ x, y, z \in \mathbb{R}.$$

R. a) $P(1, 2, 3) = 1 + 8 + 27 - 18 = 18$; $P(1, 0, -1) = 0$;

$$P(x, y, -x-y) = x^3 + y^3 - (x+y)^3 + 3xy(x+y) = 0.$$

b) $P(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = y^3 + z^3 + x^3 - 3xyz = P(y, z, x) = z^3 + x^3 + y^3 - 3zxy = P(z, x, y)$. Am folosit comutativitatea adunării și înmulțirii în $\mathbb{R}$.

Observație: Polinoamele care au proprietatea b) se numesc polinoame simetrice.

IV.5. Arătați că polinoamele:

$S_1(X, Y) = X + Y$ $\qquad$ $S_1'(X, Y, Z) = X + Y + Z$

$S_2(X, Y) = XY$ $\qquad$ $S_2'(X, Y, Z) = XY + YZ + ZX$

$S_3'(X, Y, Z) = XYZ$

$$S_1''(X, Y, Z, T) = X + Y + Z + T$$
$$S_2''(X, Y, Z, T) = XY + XZ + XT + YZ + YT + ZT$$
$$S_3''(X, Y, Z, T) = XYZ + XYT + XZT + YZT$$
$$S_4''(X, Y, Z, T) = XYZT$$

sînt simetrice.

R. Rezultă imediat aplicînd comutativitatea şi asociativitatea adunării şi înmulţirii în $\mathbb{R}$.

Observaţie: Aceste polinoame se numesc simetrice fundamentale. Ele au proprietatea că orice alt polinom simetric cu aceleaşi nedeterminate se scrie în funcţie de acestea. Exemplu: $P(X, Y, Z) = X^2 + Y^2 + Z^2$ care se verifică uşor că este simetric, se poate scrie:

$$P(X, Y, Z) = (X + Y + Z)^2 - 2(XY + XZ + YZ) = S_1'^2 - 2S_2'.$$

IV.6. Fie polinomul: $P(X, Y, Z) = X^2(Y - Z) + Y^2(Z - X) + Z^2(X - Y)$. Verificaţi că: $P(x, y, z) = -P(y, x, z)$, $P(x, y, z) = -P(z, y, x)$, $P(x, y, z) = -P(x, z, y)$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

R. $P(y, x, z) = y^2(x - z) + x^2(z - y) + z^2(y - x) = -[y^2(z - x) + x^2(y - z) + z^2(x - y)] = -P(x, y, z)$.

Observaţie: Polinoamele cu această proprietate se numesc antisimetrice în X, Y, respectiv X, Z, respectiv Y, Z.

IV.7. Fie polinoamele:

$$P_1(X, Y, Z) = X^2(Y - Z) + Y^2(Z - X) + Z^2(X - Y),$$
$$P_2(X, Y, Z) = X^3(Y - Z) + Y^3(Z - X) + Z^3(X - Y).$$

Verificaţi că: $P_i(x, x, z) = P_i(x, y, y) = P_i(x, z, z) = 0$, $i \in \{1, 2\}$, oricare ar fi x, y, z numere reale.

R. De exemplu: $P_1(x, x, z) = x^2(x - z) + x^2(z - x) + z^2(x - x) = x^2(x - z) - x^2(x - z) + z^2(x - x) = 0$.

IV.8. Fie polinoamele:

$$P_1(X, Y) = (X + Y)^3 - X^3 - Y^3$$
$$P_2(X, Y) = (X + Y)^5 - X^5 - Y^5$$
$$P_3(X, Y) = (X + Y)^7 - X^7 - Y^7.$$

Arătaţi că: $P_i(x, -x) = P_i(-x, x) = P_i(x, 0) = P_i(0, x) = 0$, oricare ar fi x număr real şi $i \in \{1, 2, 3\}$.

R. De exemplu:

$$P_1(x, -x) = (x - x)^3 - x^3 - (-x)^3 = 0 \text{ şi } P(x, 0) = x^3 - x^3 = 0.$$

IV.9. Determinaţi polinomul P de grad minim, cunoscînd:

a) $P(0) = 2$, $P(2) = 0$

b) $P(-1) = P(1) = 0$ şi $P(0) = 3$.

R. a) Polinoame constante nu pot fi deoarece pentru 0 şi 2 se obţin valori distincte. Căutăm polinoame de gradul I. $P(X) = aX + b$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Punînd condiţiile din ipoteză rezultă sistemul format din ecuaţiile $b = 2$ şi $2a + b = 0$ care conduce la $a = -1$ şi $b = 2$. Deci polinomul căutat este $P(X) = -X + 2$.

b) Ca la punctul a) se obţine polinomul de gradul al II-lea $P(X) = -X^2 + 3$.

IV.10. Fie polinoamele: $P(X) = X^2 - 5X + 4$, $Q(X) = 2X + 1$, $R(X) = 2X - 1$. Arătaţi că:

a) $(P + Q) + R = P + (Q + R)$.

b) $(P \cdot Q) \cdot R = P(Q \cdot R)$.

c) $P + Q = Q + P$, $P + R = R + P$, $Q + R = R + Q$.

d) $PQ = QP$, $PR = RP$, $QR = RQ$.

e) există un polinom E, astfel încît $P + E = E + P = P$, $Q + E = E + Q = Q$, $R + E = E + R = R$.

f) există un polinom E', astfel încît $PE' = E'P = P$, $QE' = E'Q = Q$, $RE' = E'R = R$.

g) P fiind dat, există P', astfel încît $P + P' = P' + P = E$, Q fiind dat, există Q', astfel încît $Q + Q' = Q' + Q = E$ şi R fiind dat, există R', astfel încît $R + R' = R' + R = E$.

h) $P \cdot (Q + R) = P \cdot Q + P \cdot R$.

R. a) $(P + Q) + R = [(X^2 - 5X + 4) + (2X + 1)] + 2X - 1 = (X^2 - 3X + 5) + (2X - 1) = X^2 - X + 4.$

$P + (Q + R) = (X^2 - 5X + 4) + [(2X + 1) + (2X - 1)] = (X^2 - 5X + 4) + 4X = X^2 - X + 4.$

b) $(P \cdot Q)R = [(X^2 - 5X + 4)(2X + 1)](2X - 1) = (2X^3 - 9X^2 + 3X + 4) \cdot (2X - 1) = 4X^3 + 15X^2 + 5X - 4.$

$P \cdot (Q \cdot R) = (X^2 - 5X + 4)[(2X + 1)(2X - 1)] = (X^2 - 5X + 4)(4X^2 - 1) = 4X^3 + 15X^2 + 5X - 4.$

c) $P + Q = (X^2 - 5X + 4) + (2X + 1) = X^2 - 3X + 5 = (2X + 1) + (X^2 - 5X + 4) = Q + P.$

Analog se verifică celelalte egalităţi.

d) $QR = (2X + 1)(2X - 1) = 4X^2 - 1 = (2X - 1)(2X + 1) = RQ.$

e) $P + E = P$ implică $X^2 - 5X + 4 + E(X) = X^2 - 5X + 4$,

de unde rezultă $E(X) = 0$.

Şi în celelalte cazuri se găseşte $E(X) = 0$.

f) $P \cdot E' = P$ implică $(X^2 - 5X + 4) E'(X) = X^2 - 5X + 4$, de unde rezultă că $E'(X) = 1$.

Acelaşi rezultat se obţine şi în celelalte cazuri.

g) $P + P' = 0$ implică $P' = -P$.

Analog $Q' = -Q$ şi $R' = -R$.

h) $P \cdot (Q + R) = (X^2 - 5X + 4)[(2X + 1) + (2X - 1)] = (X^2 - 5X + 4)(4X) = 4X^3 - 20X^2 + 15X.$

$$PQ + PR = (X^2 - 5X + 4)(2X + 1) + (X^2 - 5X + 4)(5X - 1) =$$
$$= (2X^3 - 9X^2 + 3X + 4) + (2X^3 - 11X^2 + 13X - 4) = 4X^3 - 20X^2 + 16X$$

Observație: Se poate demonstra că aceste proprietăți au loc pentru orice polinoame P, Q, R cu coeficienți reali.

IV.11. 1) Calculați $P + Q$ dacă:

a) $P(X) = X^4 - \sqrt{2}X^3 + \sqrt{3}X^2 - 2X + \sqrt{5}$

și:

$$Q(X) = -X^4 + \frac{2}{\sqrt{2}}X^3 - \frac{3}{\sqrt{3}}X^2 + 2X - \frac{5}{\sqrt{5}}.$$

b) $P(X) = (2 - \sqrt{3})X^3 - (1 - \sqrt{2})X + 1$

și:

$$Q(X) = (2 + \sqrt{3})X^3 - (1 + \sqrt{2})X + 1.$$

2) Determinați relația dintre gradele a două polinoame oarecare și gradul sumei lor.

R. 1) a) $P(X) + Q(X) = 0$, observînd că $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ și la fel $\frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ și $\frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

b) $P(X) + Q(X) = 4X^3 - 2X + 2$.

2) Ținînd cont de definiția adunării polinoamelor rezultă că gradul sumei este cel mult egal cu cel mai mare dintre gradele polinoamelor care se însumează (așa cum rezultă și din exemplul de la punctul 1)).

VI.12. Fie polinomul: $P(X) = X^3 - 2X^2 - 3X + 4$.
Determinați polinoamele Q, astfel încît:

a) $P(X) + Q(X) = X^4$

b) $P(X) + Q(X) = X^3 + 4$

c) $P(X) + Q(X) = X + 1$

d) $P(X) + Q(X) = 1$

e) $P(X) + Q(X) = 0$.

R. a) Adunînd în ambii membri ai egalității pe $-P(X)$, rezultă $Q(X) = X^4 - P(X)$, deci $Q(X) = X^4 - X^3 + 2X^2 + 3X - 4$.

Analog, se obțin polinoamele:

b) $2X^2 + 3X$, c) $-X^3 + 2X^2 + 4X - 3$,
d) $-X^3 + 2X^2 + 3X - 3$, e) $-X^3 + 2X^2 + 3X - 4$.

IV.13. 1) Efectuați următoarele produse de polinoame:

a) $[X^2 + (1 - \sqrt{2})X - \sqrt{2}](X + \sqrt{2})$

b) $[X^3 + (2 - \sqrt{2})X + (1 - \sqrt{2})][(2 + \sqrt{2})X + (1 + \sqrt{2})]$

c) $(X - Y)(Y - Z)(Z - X)$

d) $(X + Y - Z)(X - Y + Z)(-X + Y + Z)$

e) $(X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$

f) $(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$

g) $(X - 1)(X^{99} + X^{98} + \ldots + X + 1)$

h) $(X - 1)(X^{99} + X^{98} + \ldots + X + 1)$

i) $(X^4 - X^3Y + X^2Y^2 - XY^3 + Y^4)(X + Y)$

j) $(X^5 + X^4Y + X^3Y^2 + X^2Y^3 + XY^4 + Y^5)(X - Y)$.

2) Determinaţi relaţia dintre gradele a două polinoame oarecare şi gradul produsului lor.

R. 1) Obţinem: a) $X^3 + X^2 - 2X - 2$, b) $(2 + \sqrt{2})X^4 + (1 + \sqrt{2})X^3 + 2X^2 + \sqrt{2}X - 1$, c) $XY^2 - X^2Y + YZ^2 - Y^2Z + ZX^2 - Z^2X$, d) $-X^3 - Y^3 - Z^3 + X^2Y + XY^2 + Y^2Z + Z^2X + ZX^2 - 2XYZ$, e) $X^4 + 1$, f) $X^4 + X^2 + 1$, g) $X^{100} - 1$, h) $X^{100} + 1$, i) $X^5 + Y^5$, j) $X^6 - Y^6$.

2) În general, dacă înmulţim un polinom de gradul m cu un polinom de gradul n, atunci produsul lor va avea gradul $m + n$.

VI.14. Fie polinomul: $P(X) = X^2 + 2X + 4$.

Determinaţi polinoamele Q, astfel încît:

a) $P(X) \cdot Q(X) = X^3 - 8$;

b) $P(X) \cdot Q(X) = X^4 + 4X^2 + 16$;

c) $P(X) \cdot Q(X) = 0$.

R. a) Gradul polinomului fiind trei, rezultă că polinomul Q trebuie să aibă gradul întîi, deci să fie de forma $aX + b$. Ţinînd cont de faptul că coeficientul lui X^2 al polinomului P este 1 şi coeficientul lui X^3 al produsului, deasemenea, 1, rezultă că coeficientul lui X al polinomului Q trebuie să fie 1. Deci căutăm $Q(X)$ de forma $X + a$, $a \in \mathbb{R}$. Avem: $(X^2 + 2X + 4)(X + a) = X^3 - 8$ sau $X^3 + (a + 2)X^2 + (2a + 4)X + 4a = X^3 - 8$, de unde prin identificarea coeficienţilor nedeterminatelor de acelaşi grad, rezultă $a = -2$.

b) Analog, căutăm $Q(X)$ de forma $X^2 + aX + b$. Obţinem succesiv $(X^2 + 2X + 4)(X^2 + aX + b) = X^4 + 4X^2 + 16$, $X^4 + (a + 2)X^3 + (b + 4 + 2a)X^2 + (2b + 4a)X + 4b = X^4 + 4X^2 + 16$, deci $a = -2$ şi $b = 4$ care rezultă din sistemul format de ecuaţiile: $a + 2 = 0$, $b + 4 + 2a = 4$, $2b + 4a = 0$ şi $4b = 16$. Aşadar $Q(X) = X^2 - 2X + 4$.

c) Polinomul Q este în acest caz polinomul nul.

IV.15. Efectuaţi:

a) $(X + 2)^2 - (X - 2)^2$; b) $(X + 1)^3 - (X - 1)^3$;

c) $(X - 1)^4 - (X + 1)^4$; d) $[(X - 1)^2 - 4(X - 1) + 4] - (X - 3)^2$

e) $(X - Y - Z)^2 + 2X(Y + Z) - 2YZ$.

R. a) Punînd $A = X + 2$ şi $B = X - 2$, avem $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ şi rezultă $(X + 2)^2 - (X - 2)^2 = (X + 2 + X - 2)(X + 2 - X + 2) = 8X$.

b) Punînd $A = X + 1$ şi $B = X - 1$, avem $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$ deci $(X + 1)^3 - (X - 1)^3 = 2(3X^2 + 1)$.

c) $A = X - 1$ şi $B = X + 1$ implică $A^4 - B^4 = (A^2 - B^2)(A^2 + B^2)$. Deci $(X - 1)^4 - (X + 1)^4 = -8X(X^2 + 1)$.

d) În paranteza pătrată $A = X - 1$ implică $A^2 - 4A + 4 = (A - 2)^2$, deci $(X - 1 - 2)^2 - (X - 3)^2 = (X - 3)^2 - (X - 3)^2 = 0$.

e) $(X - Y - Z)^2 + 2X(Y + Z) - 2YZ = X^2 + Y^2 + Z^2 - 2XY - 2XZ + 2YZ + 2XY + 2XZ - 2YZ = X^2 + Y^2 + Z^2$.

IV.16. Fie polinoamele :

$P(X) = X^2 + 3X + 2$ şi $Q(X) = 2X - 3$.

Determinaţi : $P[Q(X)]$, $Q[P(X)]$, $P[P(X)]$, $Q[Q(X)]$.

R. $P[Q(X)] = [Q(X)]^2 + 3Q(X) + 2 = (2X - 3)^2 + 3(2X - 3) + 2 = 4X^2 + 2.$

$Q[P(X)] = 2P(X) - 3 = 2(X^2 + 3X + 2) - 3 = 2X^2 + 6X + 1.$

$$P[P(X)] = [P(X)]^2 + 3P(X) + 2 = (X^2 + 3X + 2)^2 + 3(X^2 + 3X + 2) + 2 =$$
$$= X^4 + 6X^3 + 14X^2 + 21X + 12.$$

$$Q[Q(X)] = 2Q(X) - 3 = 2(2X - 3) - 3 = 4X - 9.$$

IV.17[PO]. Fie polinoamele :

$P(X) = 3X + m$ şi $Q(X) = 9X + 4$, $m \in \mathbb{R}$.

Determinaţi m, astfel încît $P[Q(X)] = Q[P(X)]$.

R. $P[Q(X)] = Q[P(X)]$ implică $3Q(X) + m = 9P(X) + 4$ sau $3(9X + 4) + m = 9(3X + m) + 4$ sau $27X + m + 12 = 27X + 9m + 4$, ceea ce implică $m + 12 = 9m + 4$, de unde $m = 1$.

IV. 18. Fie polinomul : $P(X) = X^2 + aX + 1$, $a \in \mathbb{R}$.

Arătaţi că dacă $P(1 + x) = P(1 - x)$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, atunci P este pătratul unui polinom.

R. $P(1 + x) = P(1 - x)$ implică $4x + 2ax = 0$, de unde $a = -2$ şi deci $P(X) = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$.

IV. 17. Fie polinoamele :

a) $P(X, Y) = X^2 + Y^2, Q(X, Y) = X^3 + Y^3, R(X, Y) = X^4 + Y^4,$ $S(X, Y) = X^5 + Y^5$.

Determinaţi valorile lui P, Q, R, S pentru valorile x şi y ale lui X şi Y pentru care $s_1 = x + y$ şi $s_2 = xy$.

b) $P(X, Y, Z) = X^2 + Y^2 + Z^2$, $Q(X, Y, Z) = X^3 + Y^3 + Z^3$, $R(X, Y, Z) = X^4 + Y^4 + Z^4$.

Determinaţi valorile lui P, Q, R pentru valorile x, y şi z ale lui X, Y, Z pentru care $s_1 = x + y + z$, $s_2 = xy + yz + zx$ şi $s_3 = xyz$.

R. a) $P(X, Y) = X^2 + Y^2 = (X + Y)^2 - 2XY$ şi se obţine pentru P valoarea $s_1^2 - 2s_2$

$Q(X, Y) = (X + Y)^3 - 3XY(X + Y)$, de unde rezultă valoarea $s_1^3 - 3s_1s_2$.

$R(X, Y) = (X^2)^2 + (Y^2)^2 = (X^2 + Y^2)^2 - 2(XY)^2$ şi rezultă valoarea $s_1^4 - 4s_1^2s_2 + 2s_2^2$.

$S(X, Y) = (X + Y)(X^4 - X^3Y + X^2Y^2 - XY^3 + Y^4) = (X + Y)[X^4 + Y^4 - XY(X^2 - XY + Y^2)]$, rezultă valoarea $s_1[s_1^4 - 4s_1^2s_2 + 2s_2^2 - s_2(s_1^2 - 3s_2)] = s_1^5 - 4s_1^3s_2 + 2s_2^2s_1 - s_1^3s_2 + 3s_1s_2^2 = s_1^5 - 5s_1^3s_2 + 5s_1s_2^2$.

b) Valorile respective rezultă observind că :

$$P(X, Y, Z) = (X + Y + Z)^2 - 2(XY + YZ + ZX),$$
$$Q(X, Y, Z) = (X + Y + Z)^3 - 3XYZ(XY + YZ + ZX);$$

$$R(X, Y, Z) = (X^2 + Y^2 + Z^2)^2 - 2(X^2Y^2 + Y^2Z^2 + Z^2X^2) =$$
$$= (X^2 + Y^2 + Z^2)^2 - 2\,[(XY + YZ + ZX)^2 - 2XYZ(X + Y + Z)].$$

IV. 20. Se consideră polinomul:

$$P(X, Y, Z) = X^4 + Y^4 + Z^4 - 2X^2Y^2 - 2X^2Z^2 - 2Y^2Z^2.$$

Determinaţi $P(x, y, z)$ ştiind că: $x + y + z = -9$, $xy + yz + zx = -\frac{4}{9}$ şi $xyz = 4$.

R. $P(X, Y, Z) = (X^2 + Y^2 + Z^2)^2 - 2(X^2Y^2 + Y^2Z^2 + Z^2X^2) - 2X^2Y^2 - 2X^2Z^2 - 2Z^2Y^2 = [(X + Y + Z)^2 - 2(XY + YZ + ZX)]^2 - 4[(XY + YZ + ZX)^2 - 2XYZ(X + Y + Z)]$.

Deci

$$P(x, y, z) = \left[(-9)^2 - 2\left(-\frac{4}{9}\right)\right]^2 - 4\left[\left(-\frac{4}{9}\right)^2 - 2\cdot 4(-9)\right].$$

IV. 21. Efectuaţi:

a) $(X^4 - 2X^2 + 2) : (X^2 - 2X + 2)$

b) $(X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1) : (X^2 - 2X + 1)$

c) $(X^4 + 1) : (X^2 - \sqrt{2}X + 1)$

d) $(X^4 - Y^4) : (X - Y)$

e) $(X^4 - X^3Y + 2X^2Y^2 - XY^3 + Y^4) : (X^2 - XY + Y^2)$.

R. Obţinem: a) $X^2 + 2X$ rest $-4X + 2$, b) $X^2 + 1$, c) $X^2 + \sqrt{2}X + 1$, d) $X^3 + X^2Y + XY^2 + Y^3$, e) $X^2 + Y^2$.

IV. 22. Împărţind un polinom P la polinomul $X^2 + 1$, obţinem cîtul $X - 1$ şi restul $2X - 1$.

Determinaţi polinomul P.

R. Scriem teorema împărţirii cu rest a polinomului P la $X^2 + 1$. Obţinem: $P(X) = (X^2 + 1)(X - 1) + (2X - 1)$, de unde rezultă $P(X) = X^3 - X^2 - 3X - 2$.

IV. 23. 1) Demonstraţi că restul împărţirii unui polinom P la binomul $X - a$, $a \in \mathbb{R}$, este $P(a)$.

2) Determinaţi restul împărţirii polinomului $P(X) = 3X^3 - 2X^2 - X + 4$ la: a) $X - 1$, b) $X + 1$, c) $X - \sqrt{2}$.

R. 1) Din teorema împărţirii cu rest rezultă $P(X) = (X - a)\,C(X) + R(X)$, $R(X)$ fiind un polinom constant r. Făcînd în relaţia obţinută $X = a$, rezultă $P(a) = r$

2) Aplicînd rezultatul de la punctul 1), avem:

a) $r = P(1) = 4$, b) $X + 1 = X - (-1)$, deci $r = P(-1) = 0$, c) $r = P(\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} - 4 - \sqrt{2} + 4 = 5\sqrt{2}$.

IV. 24. 1) Demonstraţi că restul împărţirii unui polinom P la $(X - a)(X - b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, este:

$$\frac{P(a) - P(b)}{a - b}X + \frac{aP(b) - bP(a)}{a - b}.$$

2) Determinați restul împărțirii polinomului

$P(X) = X^4 - 2X^2 + 2$ la : a) $(X - 1)(X + 1)$, b) $X^2 - 3X + 2$.

R. 1) Ca la exercițiul precedent avem: $P(X) = (X - a)\cdot(X - b)\cdot C(X) + R(X)$, unde $R(X)$ trebuie să fie un polinom de grad cel mult 1, deci de forma $mX + n$, $n \in \mathbb{R}$. Avem:

$$P(X) = (X - a)(X - b)\cdot C(X) + mX + n.$$

Facem $X = a$ și apoi $X = b$ și obținem sistemul în m și n format din ecuațiile: $P(a) = ma + n$ și $P(b) = mb + n$, de unde rezultă:

$$m = \frac{P(a) - P(b)}{a - b} \text{ și } n = \frac{aP(b) - bP(a)}{a - b}.$$

2) Aplicînd rezultatul de la 1) pentru $a = 1$ și $b = -1$, obținem: $R(X) = \frac{1 - 1}{2} X + \frac{1 + 1}{2} = 1$.

Pentru a evita memorarea rezultatului de la 1), scriem teorema împărțirii cu rest a lui P la $(X - 1)(X + 1)$ și facem $X = 1$ și $X = -1$. Avem: $P(X) = (X - 1)(X + 1)\cdot C(X) + mX + n$, $m, n \in \mathbb{R}$, de unde rezultă sistemul în m și n: $1 = m + n$, $1 = -m + n$ cu $m = 0$ și $n = 1$.

b) $X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$, se procedează ca mai sus și avem $R(X) = 9X - 8$.

IV. 25. Aflați restul împărțirii polinomului $P(X) = 3X^3 - mX^2 + 15$ la $X - 4$, știind că împărțit la $X - 2$ dă restul -3.

R. Restul împărțirii la $X - 2$ este $P(2)$. Deci $P(2) = -3$, adică: $24 - 4m + 15 = -3$, de unde $m = 9$. Restul împărțirii polinomului $P(X)$ la $X - 4$ este $P(4) = 63$.

IV. 26. Împărțind polinomul $P(X) = 2X^3 - mX^2 + nX - 16$ la $X - 3$ și $X + 1$, obținem în ambele cazuri restul -2. Ce rest obținem dacă-l împărțim la $X - 1$?

R. Sistemul în m și n fiind format din $P(3) = -2 = P(-1)$ implică $m = -\frac{2}{3}$ și $n = -\frac{46}{3}$. Cu m și n determinați obținem restul împărțirii lui P la $X - 1$, $P(1) = -\frac{86}{3}$.

IV. 27. 1) Arătați că restul împărțirii polinomului $P(X)$ la $X - \frac{a}{b}$ și la $bX - a$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, este același.

2) Determinați restul împărțirii polinomului

$P(X) = 2X^2 + X - 1$ la : a) $2X - 1$, b) $2X + 1$, c) $5X$.

R. 1) Teorema împărțirii cu rest conduce la: $P(X) = \left(X - \frac{a}{b}\right)\cdot C_1(X) + r_1$ respectiv $P(X) = (bX - a)\cdot C_2(X) + r_2$, presupunînd că resturile sînt diferite.

Făcînd în ambele egalităţi $X = \frac{a}{b}$ obţinem $P\left(\frac{a}{b}\right) = r_1$, respectiv $P\left(\frac{a}{b}\right) = r_2$.

Deci $r_1 = r_2 = P\left(\frac{a}{b}\right)$.

2) Aplicînd observaţia de la punctul 1) obţinem:

a) $r = P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, b) $r = P\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$, c) $P(0) = -1$.

IV.28. Determinaţi numerele reale m, n astfel încît restul împărţirii polinomului $P(X)$ la $Q(X)$ să fie $R(X)$ în cazurile următoare:

a) $P(X) = 2X^4 - mX^3 + X^2 - 7$, $Q(X) = X - 2$, $R(X) = 4$

b) $P(X) = X^2 - mX + 5n$, $Q(X) = X$, $R(X) = 90$

c) $P(X) = X^3 + 2mX^2 - 3$, $Q(X) = X + 1$, $R(X) = m$

d) $P(X) = X^4 + X - m$, $Q(X) = 2X + 1$, $R(X) = 0$

e) $P(X) = X^2 - mX + 2m$, $Q(X) = X - m$, $R(X) = 2m$

f) $P(X) = mX^{15} - X^7 + m$, $Q(X) = X + 1$ $R(X) = 3$

g) $P(X) = mX^2 - nX + 5$, $Q(X) = X - 2$, $R(X) = 4m$

h) $P(X) = mX^3 + nX^2 + 2$, $Q(X) = X^2 - 1$, $R(X) = X$.

i) $P(X) = X^3 - mX^2 + nX + 1$, $Q(X) = X^2 - 3X + 2$, $R(X) = X - 1$

j) $P(X) = X^3 + mX^2 + nX + 1$, $Q(X) = X^2 + 1$, $R(X) = 0$.

R. *a*) Trebuie ca $P(2) = 4$, de unde $m = \frac{25}{8}$.

b) $P(0) = 90$ implică $5n = 90$, $n = 18$.

h) Scriem teorema împărţirii cu rest $P(X) = (X - 1)(X + 1) \cdot C(X) + X$ şi facem $X = -1$ şi $X = 1$. Rezultă $m = 1$ şi $n = -2$.

i) $X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$ şi $P(X) = (X - 1)(X - 2) \cdot C(X) + X - 1$. Făcînd $X = 1$ şi $X = 2$ rezultă $m = 2$ şi $n = 0$.

j) Efectuăm împărţirea şi identificăm restul cu zero $(X^3 + mX^2 + nX + 1) : (X^2 + 1) = X + m$ şi rest $(n - 1)X + 1 - m$. Rezultă $n = m = 1$.

IV.29[PO]. Fie $P(X)$ un polinom de grad minim 2 care îndeplineşte simultan condiţiile:

1) $P(X)$ împărţit la $X - 1$ dă restul 3

2) $(X - 1)P(X) + XP(X + 2) = 1$.

Determinaţi restul împărţirii lui $P(X)$ la $X^2 - 4X + 3$.

R. Polinomul va fi de forma $P(X) = aX^2 + bX + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Condiţia 1) implică $P(1) = 3$. În relaţia 2) punînd $X=1$ obţinem $P(3)=1$. Pentru a determina restul împărţirii lui P la $X^2 - 4X + 3$ scriem teorema împărţirii cu rest în acest caz: $P(X) = (X - 1)(X - 3) C(X) + mX + n$, $m, n \in \mathbb{R}$ şi facem $X = 1$ şi $X = 3$. Obţinem sistemul în m şi n format din ecuaţiile: $P(1) = m + n$ şi $P(3) = 3m + n$, sau ţinînd cont de 1) şi 2): $3 = m + n$ şi $1 = 3m + n$, de unde rezultă $m = -1$ şi $n = 4$. Restul căutat este: $-X + 4$.

IV. 30[PO]**.** Un polinom de grad minim 2 verifică relația:

$$X\cdot P(X-1)+(X+1)\cdot P(X)=1.$$

Determinați restul împărțirii lui P la:

a) X^2+2X, b) X^2+2X-3.

R. a) Avem $P(X)=(X^2-X)C(X)+mX+n$, $m, n\in\mathbb{R}$ sau $P(X)=X(X+2)C(X)+mX+n$. Punînd $X=0$ și $X=-1$, rezultă sistemul în m și n format din ecuațiile: $P(0)=n$ și $P(-2)=-2m+n$. $P(0)$ și $P(-2)$ se obțin făcînd în relația din enunț $x=0$, respectiv $X=-1$. $P(0)=1=n$ și $P(-2)=-1=-m+n$, de unde $m=n=1$.

b) $X^2+2X-3=(X-1)(X+3)$.

Procedînd analog, trebuie determinat $P(1)$ și $P(-3)$. Făcînd în relația din enunț $X=1$, obținem: $P(0)+2P(1)=1$ și ținînd cont că $P(0)=1$, rezultă $P(1)=0$. Pentru $X=-2$ relația din enunț devine:

$$-2P(-3)-P(-2)=1.\ \text{Dar}\ P(-2)=-1.\ \text{Deci}\ P(-3)=0.$$

În relația $P(X)=(X^2+2X-3)C(X)+mX+n$, $m, n\in\mathbb{R}$, $X=1$ și $X=-3$ implică sistemul $m+n=0$, $-m+n=0$ de unde rezultă $m=n=0$.

IV. 31. Arătați că dacă polinoamele f și g dau prin împărțire la h resturile r_1 respectiv r_2, atunci pentru orice $a, b\in\mathbb{R}$, polinomul $af+bg$ dă prin împărțirea la h restul ar_1+br_2.

R. Teorema împărțirii cu rest implică $f=hc_1+r_1$ (1) respectiv $g=hc_2+r_2$, (2). Înmulțind relația (1) cu a și relația (2) cu b și adunîndu-le, obținem $af+bg=h(ac_1+bc_2)+(ar_1+br_2)$, de unde rezultă ceea ce trebuia demonstrat.

IV. 32. Verificați dacă polinoamele Q_i divid polinoamele

$$P_i:\ i\in\{1, 2, 3\}.$$

a) $P_1(X)=X^3-X-2$ $\qquad Q_1(X)=X^2+X+2$

b) $P_2(X)=X^3-X+2$ $\qquad Q_2(X)=X+2$

c) $P_3(X)=(X-1)^n-(X+3)^n$, $n\in\mathbb{N}^*$ $\qquad Q_3(X)=X+1$.

R. a) Prin definiție, Q_1 divide P_1 dacă, există C, astfel încît: $P_1(X)=Q_1(X)\cdot C(X)$, adică dacă P_1 se împarte exact la Q_1. Efectuînd împărțirea obținem: $X-1$ și rest $-X$, deci Q_1 nu divide P_1.

b) Obținem: $X^3-X+6=(X+2)(X^2-2X+3)$, deci Q_2 divide P_2. Altfel: Restul $P_2(-2)=0$. c) Obținem restul $P_3(-2)=(-2)^n+2^n$. Dacă n este par $P_3(-1)=2^{n+1}=0$ deci Q_3 nu divide P_3 iar dacă n este impar $P_3(-2)=0$, deci Q_3 divide P_3.

IV. 33. Determinați un polinom de gradul al IV-lea care să se dividă la $X-1$.

R. De exemplu, scriem un polinom cu coeficienții lui X^4, X^3, X^2, X oarecari și luăm termenul liber astfel încît valoarea polinomului în punctul 1 să fie zero. $P(X)=X^4+2X^3-X^2-X-1$ poate constitui un exemplu.

IV. 34. Determinați numerele reale m, n astfel încît polinoamele Q_i să dividă polinoamele P_i, $i\in\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

a) $P_1(X)=X^3-mX^2+X-3$, $\qquad Q_1(X)=2X+1$

b) $P_2(X)=2X^3-mX^2+nX-5$, $\qquad Q_2(X)=X^2-9$

c) $P_3(X)=X^n-nX^n+(n-1)$, $n\in\mathbb{N}$, $\qquad Q_3(X)=X-1$.

d) $P_4(X) = X^3 - X^2 - mX - n$, $\quad Q_4(X) = X^2 + X + 1$

e) $P_5(X) = X^4 + X^2 + 1$, $\quad Q_5(X) = X^2 + mX + n$

f) $P_6(X) = X^4 + mX^2 + n$. $\quad Q_6(X) = X^2 + mX + n$

g) $P_7(X) = (X^2 + X + 1)^{2n} - mX^{2n}$ $\quad Q_7(X) = X^2 + 1$

h) $P_8(X) = (X - 1)^{n+3} + mX^{2n+6}$, $\quad Q_8(X) = X^2 - X + 1$

R. a) Restul $P_1\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ implică $m = -\frac{29}{2}$. b) m şi n rezultă, de exemplu, din sistemul $P_2(-3) = 0 = P_2(3)$. Rezultă $m = -\frac{5}{9}$ şi $n = -18$. c) $P_3(1) = 1 - n + n - 1 = 0$ deci Q_3 divide P_3 oricare ar fi n. d) Efectuăm împărţirea $P_4(X) : Q_4(X)$ şi identificăm restul cu zero. $R(X) = (-m + 1)X - n + 2$. Rezultă $m = 1$ şi $n = 2$.
e) Trebuie ca : $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + mX + n)(X^2 + cX + d)$ de unde rezultă : $X^4 + X^2 + 1 = X^4 + (c + m) X^3 + (d + mc + n)(X^2 + (md + nc)X + nd$. Rezultă $m = n = 1$ sau $m = -1$ şi $n = 1$. f) $X^4 + mX^2 + n = (X^2 + mX + n)(X^2 + cX + d)$ sau $X^4 + mX^2 + n = X^4 + (c + m)X^3 + (d + n + mc)X^2 + (md + nc)X + nd$. Sistemul format din ecuaţiile: $c + m = 0$, $n + d + mc = m, md + nc = 0$, $nd = n$ implică : $m_1 = n_1 = 0$; $m_2 = -1$, $n_2 = 0$; $m_3 = n_3 = 1$; $m_4 = -2$, $n_4 = 1$; $m_5 = 0$, $n_5 = -1$.
Rezultă următoarele perechi de polinoame :
X, X^2 ; $X^4 - X^2$; $X^2 - X$; $X^4 + X^2 + 1$, $X^2 + X + 1$; $2X - X^2 + 1$, $X^2 - 2X + 1$; $X^4 - 1$, $X^2 - 1$. g) Trebuie ca : $P_7(X) = (X^2 + 1) C(X)$, de unde rezultă că valorile lui X care anulează polinomul $X^2 + 1$ anulează şi polinomul $P(X)$. Fie $\alpha \in R$, astfel încît $\alpha^2 + 1 = 0$. Rezultă $\alpha^2 = -1$ şi $P(\alpha) = (\alpha^2 + \alpha + 1)^{2n} - m\alpha^{2n} = \alpha^{2n} - m\alpha^{2n}$. $P(\alpha) = 0$ implică $m = 1$.
h) $Q_8(\alpha) = \alpha^2 - \alpha + 1$ implică $\alpha^2 = \alpha - 1$. $P_8(\alpha) = (\alpha - 1)^{n+3} + m\alpha^{2n+6} = (\alpha^2)^{n+3} + m\alpha^{2n+6}$ implică $m = -1$.

IV. 35PO. Arătaţi că polinomul $XY^2 + X^2Y$ divide polinomul $P(X, Y) = (X + Y)^n - X^n - Y^n$, $n \in \mathbb{N}$.

R. Observăm că : $P(x, 0) = P(0, y) = 0$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$. Altfel spus, considerînd $P(X, Y)$ ca un polinom în X, respectiv Y, şi dînd lui X, respectiv Y, valoarea zero, polinomul se anulează .Teorema lui Bezout implică faptul că X divide $P(X, Y)$, respectiv Y divide $P(X, Y)$, deci XY divide $P(X, Y)$. Considerînd polinomul în nedeterminata X şi luînd pentru X, $-Y$ polinomul se anulează .Rezultă că $X + Y$ divide $P(X, Y)$. Deci $XY(X + Y) = X^2Y + XY^2$ divide $P(X, Y)$.

IV. 36. Arătaţi că polinomul : $(X - Y)(Y - Z)(Z - X)$ divide polinomul $P(X, Y, Z) = X^2(Y - Z) + Y^2(Z - X) + Z^2(X - Y)$.

R. Avem $P(y, y, z) = 0$ (vezi exerciţiul IV.6) sau considerînd $P(X, Y, Z)$ polinom în X şi înlocuind X cu y obţinem $P(y) = 0$. Deci $X - y$ divide $P(X)$ sau $X - Y$ divide $P(X, Y, Z)$. Analog $Y - Z$ şi $Z - X$ divid polinomul $P(X, Y, Z)$ şi deci $(X - Y)(Y - Z)(Z - X)$ divide polinomul P.

Observaţie :

În general un polinom P antisimetric în X şi Y se divide cu $X - Y$.

IV. 37. Descompuneţi în factori ireductibili, polinoamele :

a) $X^2 Y + XY^2 - 2XY$

b) $(2X - 3)(X - 3) - (X - 3)^2$

c) $(X - 2)^2 + (2 - X)(X + 1)$

d) $XY(X + Y)^3 + Y^2(X + Y)^2 (2X - Y)$

e) $(X - 1)^2 - (X - 2)(X - 1) - (1 - X)X$.

R. a) Scoatem factor comun XY și obținem : $XY(X + Y - 2)$. b) Analog, obținem : $(X - 3)(2X - 3 - X + 3) = (X - 3)X$. c) $(X - 2)^2 + (2 - X)(X + 1) = =(X - 2)^2 - (X - 2)(X + 1) = (X - 2)(X - 2 - X - 1) = = -3(X - 2)$. d) Obținem $Y(X + Y)^2[[X(X + Y) + Y(2X - Y)] = Y(X + Y)^2 (X^2 + 3XY - Y^2)$.

e) Avem : $(X - 1)[X - 1 - (X - 2) + X] = (X - 1)(X + 1)$.

IV. 38. Descompuneți în factori ireductibili, polinoameele :

a) $X^3 + X^2Y + X Y^2 + Y^3$.

b) $XY - aY - bX + ab,\ a, b \in \mathbb{R}$

c) $X^3 + 2X^2 + 2X + 4$

d) $X^3 + X^2Y + 2XY^2 + 2\tau Y^3$

e) $(X - 1)(Y - 1) + (X - 1)(2 - Y) + (2 - X)(Y - 1) + + (X - 2)(Y - 2)$

R. Folosind proprietățile sumei și produsului monoamelor și polinoamelor, obținem : a) $X^3 + X^2Y + XY^2 + Y^3 = (X^3 + X^2Y) + (XY^2 + Y^3) = X^2(X + Y) + Y^2 (X + + Y) = (X + Y)(X^2 + Y^2)$. b) $XY - aY - bX + ab = = Y(X - a) - b(X - a) = (X - a)(Y - b)$. c) $X^3 + 2X^2 + 2X + 4 = (X^3 + 2X^2) + (2X + 4) = X^2(X + 2) + 2(X + 2) = (X + 2)(X^2 + 2)$. d) $X^3 + X^2Y + 2XY^2 + 2Y^3 = X^2(X + Y) + 2Y^2(X + Y) = =(X + Y)(X^2 + 2Y^2)$. e) Obținem : $(X - 1)(Y - 1 + 2 - Y) + (X - 2)(Y - 2 - Y + + 1) = X - 1 - X + 2 = 1$.

IV. 39. Descompuneți polinoamele :

a) $X^2 - 2Y^2$; b) $X^{2n} - Y^{2n}$; c) $X^{2n+1} + Y^{2n+1}$;

d) $(2X + 1)^2 - (2X - 1)^2$; e) $(X - Y)^3 - (X + Y)^3$;

f) $4X^2 - Y^2 - 4X + 1$; g) $X^2 - 9Y^2 - 2X + 6Y$;

h) $X^2 - 4X + 3$; i) $X^5 + X^3 - 2$; j) $X^5 - 2X^3 + 1$.

R. a) Folosim formula $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Obținem :

$X^2 - 2Y^2 = (X - \sqrt{2}\,Y)(X + \sqrt{2}\,Y)$. b) $X^{2n} - Y^{2n} = (X - Y)\cdot (X^{2n-1} + X^{2n-2}Y + \ldots + XY^{2n-2} + Y^{2n-1})$

c) $X^{2n+1} + Y^{2n+1} = (X + Y)(X^{2n} - X^{2n-1}Y + X^{2n-2}Y^2 - \ldots - XY^{2n-1} + Y^{2n})$

d) $(2X + 1)^2 - (2X - 1)^2 = (2X + 1 - 2X + 1)(2X + 1 + 2X - 1) = 8X$.

e) Aplicăm formula $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ și obținem : $(X - Y)^3 - -(X + Y)^3 = (X - Y - X - Y)\cdot[(X - Y)^2 + (X - Y)(X + Y) + (X + Y)^2] = = -2Y(X^2 - 2XY + Y^2 + X^2 + Y^2 + X^2 + 2XY + Y^2) = -2Y(3X^2 + Y^2)$

f) $4X^2 - Y^2 - 4X + 1 = (4X^2 - 4X + 1) - Y^2 = (2X - 1)^2 - Y^2 = (2X + Y - 1)(2X - Y - 1)$.

g) $X^2 - 9Y^2 - 2X + 6Y = (X^2 - 2X + 1) - (9Y^2 - 6Y + 1) = (X - 1)^2 - (3Y - 1)^2 = = (X - 1 - 3Y + 1)(X - 1 + 3Y - 1) = (X - 3Y)(X + 3Y - 2)$

h) $X^2 - 4X + 3 = (X^2 - 4X + 4) - 1 = (X - 2)^2 - 1 = (X - 2 + 1)\cdot(X - 2 - 1) = (X - 3)(X - 1)$

i) $X^5 + X^3 - 2 = (X^5 - 1) + (X^3 - 1) = (X - 1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1) + (X - 1)\cdot \cdot(X^2 + X + 1) = (X - 1)\cdot(X^4 + X^3 + 2X^2 + 2X + 2)$.

j) $X^5 - 2X^3 + 1 = (X^5 - X^3) - (X^3 - 1) = X^3(X^2 - 1) - (X - 1)(X^2 + X + 1) = = (X - 1)(X^4 + X^3 - X^2 - X + 1)$.

IV. 40. Descompuneţi în polinoame ireductibile cu coeficienţi în $\mathbb{Q}$, respectiv $\mathbb{R}$, polinoamele :

a) $X^2 + 3X + 2$

b) $X^3 - 3X^2 + 3X - 1$

c) $X^5 - X^4 - 2X + 2$.

R. a) $X^2 + 3X + 2 = X^2 + 2X + X + 2 = X(X+2) + (X+2) = (X+2)(X+1)$ reprezintă descompunerea polinomului în polinoame cu coeficienţi în $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

b) $X^3 - 3X^2 + 3X - 1 = (X^3 - 1) - (3X^2 - 3X) = (X-1)(X^2 + X + 1) -$

$- 3X(X-1) = (X-1)(X^2 + X + 1 - 3X) = (X-1)(X^2 - 2X + 1) =$

$= (X-1)(X-1)^2 = (X-1)^3$ este descompunerea în polinoame cu coeficienţi în $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{R}$.

c) $X^5 - X^4 - 2X + 2 = X^4(X-1) - 2(X-1) = (X-1)(X^4 - 2)$. este descompunerea polinomului în polinoame cu coeficienţi în $\mathbb{Q}$. cu coeficienţi în $\mathbb{R}$ polinomul se descompune astfel :

$$(X-1)(X^2 - \sqrt{2})\ (X^2 + \sqrt{2})$$

IV. 41. Descompuneţi cu coeficienţi în $\mathbb{R}$, polinoamele :

a) $X^4 + Y^4$; b) $X^4 + 1$; c) $X^4 + X^2 + 1$

R. a) $X^4 + Y^4 = (X^2 + Y^2)^2 - 2X^2Y^2 = (X^2 + Y^2)^2 - (\sqrt{2}XY)^2 =$

$$= (X^2 + Y^2 - \sqrt{2}XY)(X^2 + Y^2 + \sqrt{2}XY).$$

b) $X^4 + 1 = (X^2)^2 + 1 = (X^2 + 1)^2 - 2X^2 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)\cdot(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$.

c) $X^4 + X^2 + 1 = (X^4 + 1) + X^2 = [(X^2+1)^2 - 2X^2] + X^2 = (X^2 + 1)^2 - X^2 =$

$$= (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1).$$

IV. 42. Descompuneţi în factori ireductibili următoarele polinoame (omogene şi simetrice) :

a) $(X + Y)^3 - X^3 - Y^3$

b) $(X + Y)^5 - X^5 - Y^5$

c) $(X + Y)^7 - X^7 - Y^7$.

R. a) Metoda I : Avem $P(x, 0) = P(0, y) = 0$ (vezi exerciţiul IV.35), deci XY divide $P(X, Y)$. Polinomul fiind de gradul III, omogen şi simetric, va conţine un factor omogen de gradul I şi simetric în X şi Y, adică de forma $aX + aY$.

Deci : $(X + Y)^3 - X^3 - Y^3 = XY\,(aX + aY)$. Efectuînd calculele, obţinem : $3X^2Y + 3XY^2 = aX^2Y + aXY^2$, de unde rezultă $a = 3$. Aşadar : $(X + Y)^3 - X^3 - Y^3 = 3XY(X + Y)$, (1).

Altfel : Metoda a II-a : Avem $(X + Y)^3 - X^3 - Y^3 = (X + Y)^3 - (X + Y)\ (X^2 + XY + Y^2) = (X + Y)(X^2 + 2XY + Y^2 - X^2 + XY - Y^2) = (X + Y)\cdot 3XY$.

b) Analog $P(X, Y) = (X + Y)^5 - X^5 - Y^5$ se divide prin XY. Considerînd polinomul în nedeterminata X şi înlocuind X cu $-Y$ se obţine $P(-Y) = 0$, deci $X + Y$ divide $P(X, Y)$. Polinomul fiind de gradul V omogen şi simetric, rezultă că va conţine şi un factor de gradul al II-lea omogen şi simetric, adică factorul $aX^2 + bXY + aY^2$. Deci $P(X, Y) = XY(X + Y)(aX^2 + bXY + aY^2)$. Efectuînd calculele ca la exerciţiul precedent, rezultă : $(X + Y)^5 - X^5 - Y^5 = 5XY(X + Y)(X^2 + XY + Y^2)$, (2).

Observaţie : Rezultatul poate fi obţinut şi prin calcul direct, prin metoda a II-a utilizată la exerciţiul anterior.

c) Ca şi în cazurile anterioare $P(X, Y) = (X+Y)^7 - X^7 - Y^7$ se divide cu $XY(X+Y)$. Polinomul va conține şi un factor simetric şi omogen de gradul IV, adică de forma :

$$aX + bX^3Y + cX^2Y^2 + bXY^3 + aY\text{. Obținem :}$$

$$(X+Y)^7 - X^7 - Y^7 = 7XY(X+Y)(X^2+XY+Y^2)^2, \ (3).$$

Observație : Formulele (1), (2) şi (3) sînt cunoscute şi sub numele de identitățile lui Cauchy.

IV. 43^{PO}. Descompuneți polinoamele :

a) $X^2(Y+Z) + Y^2(Z+X) + Z^2(X+Y) + 2XYZ$

b) $X(Y+Z)^2 + Y(Z+X)^2 + Z(X+Y)^2 - 4XYZ$

c) $(X+Y+Z)^3 - (-X+Y+Z)^3 - (X-Y+Z)^3 - (X+Y-Z)^3$

R. a) Considerînd polinomul în X, valoarea $-Y$ dată lui X anulează polinomul Deci $(X+Y)(Y+Z)(Z+X)$ divide polinomul care avînd gradul 3, rezultă că va admite o descompunere de forma: $a(X+Y)(Y+Z)(Z+X)$ $a \in \mathbb{R}$. a se determină dînd valori particulare lui X, Y, şi Z. Dînd, de exemplu, valorile 0, 1, 1, obținem $a = 1$.

b) Analog se obține descompunerea :

$$(X+Y)(Y+Z)(Z+X).$$

c) Considerînd polinomul în X, valoarea 0 dată lui X, anulează polinomul. Analog pentru Y, respectiv Z , deci XYZ divide polinomul. Polinomul fiind de gradul 3 rezultă că admite descompunerea de forma $aXYZ$; a se determină dînd, de exemplu, valorile 1 nedeterminatelor X, Y respectiv Z. Obținem $a = 24$.

IV. 44^{PO}. Descompuneți polinoamele :

a) $X^2(Y-Z) + Y^2(Z-X) + Z^2(X-Y)$

b) $X^3(Y-Z) + Y^3(Z-X) + Z^3(X-Y)$

c) $X(Y-Z)^3 + Y(Z-X)^3 + Z(X-Y)^3$

R. a) Polinomul fiind antisimetric în X şi Y se divide cu $X-Y$. Analog se divide cu $Y-Z$ şi $Z-X$, deci polinomul se divide cu $(X-Y)(Y-Z)(Z-X)$ şi fiind de gradul 3, admite o descompunere de forma $a(X-Y)(Y-Z)(Z-X)$, $a \in \mathbb{R}$. a se determină dînd lui X, Y respectiv Z, de exemplu, valorile 0, 1, 2. Obținem : $a = -1$. Deci :

$$X^2(Y-Z) + Y^2(Z-X) + Z^2(X-Y) = -(X-Y)(Y-Z)(Z-X).$$

b) Analog $(X-Y)(Y-Z)(Z-X)$ divide polinomul care fiind de gradul 4, va admite o descompunere de forma : $(X-Y)(Y-Z)(Z-X)$ $(mX+nY+pZ)$, m, n, $p \in \mathbb{R}$. Efectuînd produsul şi identificînd coeficienții, obținem $m = n = p = -1$. Deci :

$$X^3(Y-2) + Y^3(Z-X) + Z^3(X-Z) = -(X-Y)(Y-Z)(Z-X)(X+Y+Z)$$

c) Analog $(X-Y)(Y-Z)$ $(Z-X)$ divide polinomul care va admite o descompunere de forma :

$$(X-Y)(Y-Z)(Z-X)\ (mX+nY+pZ),\ m,\ n,\ p \in \mathbb{R}.$$

Procedînd ca la exercițiul anterior obținem descompunerea : $(X-Y)(Y-Z)(Z-X)(X+$ $+Y+Z)$

IV. 45^{PO}. Arătați că polinoamele :

a) $P(X) = nX^{n+2} - (n+1)X^{n+1} + X$

b) $Q(X) = X^{n+1} - X^{n-2} - 3X + 3$

c) $R(X) = 2nX^{2n+1} - (2n+1)X^{2n} + 1$

sînt divizibile prin $(X-1)^2$, $n \in \mathbb{N}$.

R. a) Avem : $nX^{n+2} - (n+1)X^{n+1} + X = (nX^{n+2} - nX^{n+1}) - (X^{n+1} - X) =$

$$= nX^{n+1}(X-1) - X(X^n - 1) = nX^{n+1}(X-1) - X(X-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + 1) =$$

$$= (X-1)(nX^{n+1} - X^n - X^{n-1} - \ldots - X) = (X-1)[(X^{n+1} - X^n) + (X^{n+1} - X^{n-1}) + \ldots +$$

$$+ (X^{n+1} - X)] = (X-1)[X^n(X-1) + X^{n-1}(X^2-1) + \ldots + X(X^n - 1)] =$$

$$= (X-1)^2\,[X^n + X^{n-1}(X+1) + \ldots + X(X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + 1)],$$

de unde rezultă ceea ce trebuia demonstrat.

Observații : 1) În calculul anterior, dînd în continuare pe X factor comun, rezultă că polinomul se divide și prin $X(X-1)^2$. 2) Rezultă, de asemenea că, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$, numărul $P(x)$ se divide cu 2, deoarece în descompunere apare produsul a doi întregi consecutivi $x(x-1)$.

b) Analog, avem : $Q(X) = (X^{n+1} - X^{n-2}) - (3X - 3) = X^{n-2}(X^3 - 1) - 3(X-1) =$

$$= (X-1)[X^{n-2}(X^2 + X + 1) - 3] = (X-1)(X^n + X^{n-1} + X^{n-2} - 3) = (X-1)[(X^n - 1) +$$

$$+ (X^{n-1} - 1) + (X^{n-2} - 1)] = (X-1)^2[(X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + 1) + (X^{n-2} + X^{n-3} + \ldots + 1) +$$

$$+ (X^{n-3} + X^{n-4} + \ldots + 1)] = (X-1)^2(X^{n-1} + 2X^{n-2} + 3X^{n-3} + 3X^{n-4} + \ldots + 3)$$

Deci $(X-1)^2$ divide $Q(X)$

c) Avem $R(X) = (2nX^{2n+1} - 2nX^{2n}) - (X^{2n} - 1) = 2nX^{2n}(X-1) - X^{2n-1}$ și, în continuare, se procedează ca la exercițiile precedente.

IV. 46. Determinați polinoamele nenule de forma $P(X) = X^n - nX^{n+1} + nX - 1$, divizibile cu $(X-1)^2$.

R. Avem : $P(X) = (X^n - 1) - nX(X^{n-2} - 1) = (X-1)(X^{n-1} + \ldots + 1) -$

$$-nX(X-1)(X^{n-3} + \ldots + 1) = (X-1)[(X^{n-1} + \ldots + 1) - n(X^{n-2} + \ldots + X)] =$$

$= (X-1) \cdot Q(X)$ Trebuie ca $X - 1$ să dividă $Q(X)$, ceea ce are loc dacă $Q(1) = 0$, adică

$$\underbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}_{\text{de } n \text{ ori}} - n\underbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}_{n-2 \text{ ori}} = 0. \text{ Deci } n - n(n-2) = 0$$

de unde rezultă $n = 0$ sau $n = 3$. Pentru $n = 0$ se obține polinomul nul, iar pentru $n = 3$ se obține polinomul $X^3 - 3X^2 + 3X - 1$, care satisface cerințele problemei. *Observație* : $X^3 - 3X^3 + 3X - 1 = (X-1)^3$, deci, am obținut, totodată, polinoamele de forma respectivă care se divid prin $(X-1)^3$.

IV. 47. a). Determinați relația între m și n, numere naturale, astfel încît polinoamele

$$P(X) = mX^{2n+1} + nX + m + n \text{ să se dividă prin } X^2 - 1.$$

b) Există polinoame nenule de forma $P(X) = nX^{2n+1} + nX + 2n$ care să se dividă prin $X^2 - 1$.

R. a) Trebuie ca $P(-1) = P(1) = 0$. $P(-1) = m(-1)^{2n+1} - n + m + n = -m - n + m + n = 0$, deci $X + 1$ divide polinomul $P(X)$. $P(1) = 0$ implică $m + n = 0$, aceasta fiind relația pe care trebuie s-o îndeplinească m și n.

b) Observînd că polinoamele date se obțin din cele de la punctul a), pentru $m = n$, condiția $2n = 0$ arată că nu există polinoame nenule care să satisfacă cerințele problemei.

IV. 48. Aflaţi cel mai mare divizor comun şi cel mai mic multiplu comun al polinoamelor următoare

a) $f = 9X^2 - 1$; $\quad g = 3X^3 + 2X^2 + 2X - 1$

b) $f = X^3 + 3X^2 - 2X - 6$; $\quad g = X^2 + 6X + 9$

c) $f = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$; $\quad g = X^3 - 8X^2 + 19X - 12$;

$h = X^4 - 1$; $\quad i = X^6 - 1$

d) $f = X^5 + X^3 - 2$; $\quad g = X^5 - 2X^3 + 1$

e) $f = X^4 + X^2 + 1$; $\quad g = X^3 - 2X^2 + 2X - 1$; $\quad h = X^3 + 1$

f) $f = X^4 + 1$; $\quad g = X^3 - X + \sqrt{2}$; $\quad h = X^3 - 2\sqrt{2}X^2 + 3X - \sqrt{2}$

g) $f = 4X + 9Y^2 - 4X + 6Y$; $\quad g = 4X^2 + 9Y^2 - 12XY$

h) $f = X^2 + X^3 - 2X^2 - 4X + 4$; $\quad g = X^3 + X^2 + X - 3$

i) $f = X^5 - 10X^3 + X$; $\quad g = X^3 - 3\sqrt{3}\,X^2 + 7X - \sqrt{3}$

j) $f = (X + Y)^5 - X^5 - Y^5$; $\quad g = X^4 + Y^4 + X^2Y^2$

R. a) Obţinem : $f = 9X^2 - 1 = (3X - 1)(3X + 1)$. Polinomul g poate avea factori pe $3X - 1$ şi $3X + 1$. Efectuind $g : (3X - 1)$, obţinem : $X^2 + X + 1$. Deci $g = (3X - 1)\cdot(X^2 + X + 1)$. Rezultă că c.m.m.d.c. $= 3x - 1$ şi c.m.m.m.c. $= (3X - 1)(3X + 1)\cdot(X^2 + X + 1)$.

b) $g = X^2 + 6X + 9 = (X + 3)^2$; $f = X^2(X + 3) - 2(X + 3) = (X + 3)(X^2 - 2) = (X + 3)(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$. c.m.m.d.c. $= X + 3$ şi c.m.m.m.c. $= (X - 3)^2(X - 2)$.

c) $h = (X^2 - 1)(X^2 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)$; $i = (X^3 - 1)\cdot(X^3 + 1) = (X - 1)(X^2 + X + 1)(X + 1)(X^2 - X + 1) = (X - 1)(X + 1)\cdot(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$; $f(1) = 0$, deci $X - 1$ divide f deci $f = (X - 1)(X^2 - 5X + 6) = (X - 1)(X^2 - 2X - 3X + 6) = (X - 1)(X - 2)\cdot(X - 3)$. Avem $g(1) = 0$, deci $g = (X - 1)(X^2 - 7X + 12) = (X - 1)(X^2 - 3X - 4X + 12) = (X - 1)(X - 3)(X - 4)$. Rezultă că c.m.m.d.c. $= X - 1$ şi c.m.m.m.c. $= (X - 1)(X + 1)\cdot(X^2 + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)(X - 2)(X - 3)(X - 4)$.

d) $f = X^5 + X^3 - 2 = (X^5 - 1) + (X^3 - 1) = (X - 1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1) + (X - 1)\cdot(X^2 + X + 1) = (X - 1)(X^4 + X^3 + 2X^2 + 2X + 2)$; $g = X^5 - 2X^3 + 1 = X^5 - X^3 - (X^3 - 1) = X^3(X^2 - 1) - (X - 1)(X^2 + X + 1) = (X - 1)(X^4 + X^3 - X - 1)$. Deci c.m.m.d.c. $= X - 1$ şi c.m.m.m.c. $= (X - 1)(X^4 + X^3 - X^3 - X - 1)(X^4 + X^3 + 2X^2 + 2X + 2)$

e) $h = (X + 1)(X^2 - X + 1)$; $g = (X^3 - 1) - 2X(X - 1) = (X - 1)\cdot(X^2 + X + 1 - 2X) = (X - 1)(X^2 - X + 1)$; $f = X^4 + X^2 + 1 = (X^4 + 1) + X^2 = [(X^2 + 1)^2 - 2X^2] + X^2 = (X^2 + 1)^2 - X^2 = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$.

Deci c.m.m.d.c. $= X^2 - X + 1$ şi c.m.m.m.c. $= (X^2 - X + 1)\cdot(X^2 + X + 1)(X + 1)\cdot(X - 1) = (X^2 - 1)(X^4 - X^2 + 1) = X^6 - 2X^4 + 2X^2 - 1$.

f) $f = X^4 + 1 = (X^2 + 1)^2 - 2X^2 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$; g poate avea factori pe $X^2 - \sqrt{2}X + 1$ sau $X^2 + \sqrt{2}X + 1$. Într-adevăr $g(X) = (X + \sqrt{2})(X^2 - \sqrt{2}X + 1)$. La fel $h = (X - \sqrt{2})(X^2 - \sqrt{2}X + 1)$. Deci : c.m.m.d.c. $= X^2 - X\sqrt{2} + 1$ iar c.m.m.m.c. $= (X^2 - X\sqrt{2} + 1)(X + \sqrt{2})(X - \sqrt{2})(X^2 + X\sqrt{2} + 1)$

g) $g=(2X-3Y)^2$ şi deci f poate avea factor pe $2X-3Y$. Efectuînd $f:(2X-3Y)$ obţinem $2X+3Y-2$. Deci $f=(2X-3Y)(2X+3Y-2)$. c.m.m.d.c. $=2X-3Y$ şi
c.m.m.m.c. $=(2X-3Y)^2(2X+3Y-2)$.

h) Aplicăm algoritmul lui Euclid : $f:g=X$ rest $-3X^2-X+4$. Efectuăm acum $g:(-3X^2-X+4)$. Pentru a evita coeficienţii fracţionari înmulţim g cu 3. Deasemenea înmulţim $-3X-X+4$ cu -1. Aceste operaţii nu influenţează determinarea c.m.m.d.c. $3g:3X^2+X-4=X+\frac{2}{3}$ rest $\frac{19}{3}X-\frac{19}{3}$. Înmulţind ultimul rest cu $\frac{3}{19}$ efectuăm în continuare $(3X^2+X-4):(X-1)=3X+4$. Ultimul rest nenul a fost $X-1$. Acesta este c.m.m.d.c. Se poate evita algoritmul lui Euclid observînd că $f(1)=g(1)=0$ şi efectuînd $f:(X-1)$ şi $g:(X-1)$. obţinem : $f=(X-1)(X^3+2X^2-4)$ şi $g=(X^2+2X+3)\ (X-1)$. Rezultă că
c.m.m.m.c. $=(X-1)(X^3+2X^2-4)(X^2+2X+3)$.

i) $f=X(X^4-10X^2+1)=X[(X^4+1)-10X^2]=X[(X^2+1)^2-12X^2]=X(X^2-2\sqrt{3}X+1)(X^2+2\sqrt{3}X+1)$; $g=X^3-3\sqrt{3}X^2+7X-\sqrt{3}=(X^2-2\sqrt{3}X^2+1)(X-\sqrt{3})$.
c.m.m.d.c. $=X-\sqrt{3}$ şi c.m.m.m.c. $=X(X-\sqrt{3})(X^4-10X^2+1)$.

j) $f=(X+Y)^5-X^5-Y^5=5XY(X+Y)(X^2+XY+Y^2)$ $\quad g=X^4+Y^4+X^2Y^2=(X^2+Y^2)^2-XY^2=(X^2-XY+Y^2)(X^2+XY+Y^2)$. Deci c.m.m.d.c. $=X^2+XY+Y^2$ şi c.m.m.m.c. $=5XY(X+Y)(X+Y+X^2\ Y^2)$.

IV. 49. Determinaţi a şi b astfel încît c.m.m.d.c. al polinoamelor : $f=2X^3-aX^2+bX+3$ şi $g=X^3-3X^2-X+3$ să fie un polinom de gradul 2.

R. $g=(X^3-X)-3(X^2-1)=(X^2-1)(X-3)$.Rezultă că c.m.m.d.c. poate fi X^2-1 sau $(X-3)(X-1)$ sau $(X+1)(X-3)$. Cazul I : Dacă c.m.m.d.c. $=X^2-1$. atunci X^2-1 divide f, ceea ce implică $f(1)=f(-1)=0$, de unde rezultă $a=-3$ şi $b=-8$. Cazul II : c.m.m.d.c. $=(X-1)(X-3)$ şi procedînd analog, rezultă $a=7$, $b=2$. Cazul III : c.m.m.d.c. $=(X+1)(X-3)$. Rezultă $a=5$, $b=-4$.

IV. 50. Demonstraţi că polinoamele $f=(X+1)^{2n}-X^{2n}-2X-1$ şi $g=2X^2+X-1$ nu sînt prime între ele.

R. f şi g nu sînt prime între ele dacă admit un divizor comun diferit de 1. Observăm că $g=(X+1)(2X-1)$. Rezultă că f se divide prin $X+1$, prin $2X-1$ sau prin g. Întradevăr $f(-1)=(-1+1)^{2n}-(-1)^{2n}-2(-1)-1=0$, deci $X+1$ divide f şi este c.m.m.d.c al polinoamelor.

IV. 51. Aflaţi c.m.m.d.c. al polinoamelor :

$$P(X)=X^2-1 \text{ şi } Q(X)=X^2+mX^2+nX+1,\ m,\ n\in\mathbb{R}$$

R. $P(X)=(X-1)(X+1)$. Avem $Q(-1)=-1+m-n+1$ şi $Q(1)=1+m+n+1$. Dacă $Q(-1)=0$, adică $m=n$, atunci c.m.m.d.c. $=X+1$. Dacă $Q(1)=0$, adică $m+n=-2$, atunci c.m.m.d.c. $=X-1$. Dacă $Q(-1)=0=Q(1)$, adică $m=n=-1$, atunci c.m.m.d.c. $=(X-1)(X-1)$.

CAPITOLUL V

FRACȚII ALGEBRICE RAȚIONALE

V.1. Fie fracția : $F(x) = \dfrac{x^4 - x^2 + 1}{x - 1}$.

Determinați valorile numerice ale fracției pentru valorile : $-\sqrt{2}$; $-\dfrac{1}{2}$; 0 ; $\sqrt{2}$; $1 + \sqrt{3}$, date lui x.

R. Avem: $F(-\sqrt{2}) = \dfrac{(-\sqrt{2})^4 - (-\sqrt{2})^2 + 1}{-\sqrt{2} - 1} = \dfrac{4-2+1}{-\sqrt{2}-1} = \dfrac{3(\sqrt{2}-1)}{-(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} =$

$$=3(1-\sqrt{2});\ F\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{13}{-3\cdot 8} = -\frac{13}{24};$$

$F(0) = -1$; $F(\sqrt{2}) = 3(\sqrt{2}+1)$; $F(1+\sqrt{3}) = \dfrac{25\sqrt{3} - 52}{3}$.

V.2. Fie fracția :

$$F(X) = \frac{(1-\sqrt{2})X + 1}{-X + \sqrt{2} + 1}$$

Determinați : $F(-\sqrt{5})$; $F(-1)$; $F(0)$; $F(\sqrt{8})$.

R. Avem: $F(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2} - 1$; $F(-1) = \dfrac{-1+\sqrt{2}+1}{2+\sqrt{2}} =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1;\ F(\sqrt{8}) = \frac{(1-\sqrt{2})2\sqrt{2}+1}{-2\sqrt{2}+\sqrt{2}+1} = \frac{2\sqrt{2}-4+1}{1-\sqrt{2}} =$$

322 (lipsă)

b) $x^2-9y^2=0$, $y \neq 0$ este echivalentă cu $y^2\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2-9\right]=0$,

de unde $\frac{x}{y}=3$ sau $\frac{x}{y}=-3$. Pe de altă parte:

$$F(x, y)=\frac{y^3\left[2\left(\frac{x}{y}\right)^3-3\left(\frac{x}{y}\right)+1\right]}{y^3\left[2\left(\frac{x}{y}\right)^3-5\left(\frac{x}{y}\right)^2+3\left(\frac{x}{y}\right)+1\right]}=\frac{2\cdot 3^3-3\cdot 3+1}{2\cdot 3^3-5\cdot 3^2+3\cdot 3+1}=$$

$=\frac{46}{19}$. Pentru $\frac{x}{y}=-3$, obținem $F(x, y)=\frac{44}{107}$.

c) $x^2-3xy+2y^2=0$; $y^2\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\left(\frac{x}{y}\right)+2\right]=0$ de unde rezultă

$\frac{x}{y}=1$ sau $\frac{x}{y}=2$. Așadar $F(x, y)=\frac{2-3+1}{2-5+3+1}=0$,

respectiv $F(x, y)=\frac{2\cdot 2^3-3\cdot 2+1}{2\cdot 2^3-5\cdot 2^2+3\cdot 2+1}=\frac{11}{3}$.

V.7. Determinați valorile a reale ale lui X pentru care fracțiile următoare nu sînt definite:

1) $F_1(X)=\frac{X+2}{2X-3}$, 2) $F_2(X)=\frac{1}{(X+1)(X-2)}$,

3) $F_3(X)=\frac{X+2}{X^2-\sqrt{2}X}$, 4) $F_4(X)=\frac{1}{X^2-9}$,

5) $F_5(X)=\frac{X}{X^2-4X+4}$.

R. O fracție algebrică nu este definită pentru valorile nedeterminatelor pentru care se anulează numitorul. Deci: 1) $2a-3=0$, $a=\frac{3}{2}$ este valoarea pentru care nu este definită fracția F_1;
2) $(a+1)(a-2)=0$ implică $a=-1$ sau $a=2$; 3) $a^2-\sqrt{2}a=0$ sau $a(a-\sqrt{2})=0$, de unde $a_1=0$ și $a_2=\sqrt{2}$; 4) $a^2-9=0$ sau $(a-3)(a+3)=0$= de unde $a_1=3$ și $a_2=-3$;
5) $a^2-4a+4=0$ sau $(a-2)^2=0$, de unde $a=2$.

V.8. Determinați valorile a ale lui X pentru care fracțiile următoare sînt definite:

$$1)\ F_1(X) = \frac{1}{X+2}, \qquad 2)\ F_2(X) = \frac{X-1}{(2X+1)(X+3)},$$

$$3)\ F_3(X) = \frac{1}{4-X^2}, \qquad 4)\ F_4(X) = \frac{X+1}{9X^2-6X+1},$$

$$5)\ F_5(X) = \frac{X-2}{X^2-4}.$$

R. 1) F_1 nu este definită pentru $a+2=0$, adică pentru $a=-2$, deci este definită pentru $a \in \mathbb{R}-\{-2\}$. 2) $a \in \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}, -3\right\}$, 3) $a \in \mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$, 4) $a \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$. 5) $a \in \mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$.

V.9. Determinați valorile lui m real astfel încît fracțiile următoare să fie definite pentru valorile a ale lui X indicate:

$$1)\ F_1(X) = \frac{X+2}{X-m}, \qquad a \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$$

$$2)\ F_2(X) = \frac{X}{X^2+m^2}, \qquad a \in \mathbb{R}^*$$

$$3)\ F_3(X) = \frac{X-1}{X-m^2}, \qquad a \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$$

$$4)\ F_4(X) = \frac{1}{X^2-m}, \qquad a \in \mathbb{R}\setminus\{-2, 2\}$$

$$5)\ F_5(X) = \frac{X-1}{X-m}, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

R. 1) F_1 nu este definită pentru $a=2$, deci 2 este soluție a ecuației în a, $a-m=0$, de unde rezultă $m=2$. 2) Ecuația $a^2+m^2=0$ nu are rădăcini reale, deci pentru orice m funcția este definită pe $\mathbb{R}$. 3) 1 trebuie să fie soluție a ecuației în a: $a-m^2=0$. Rezultă $m=\pm 1$. 4) -2 și 2 soluții ale ecuației în a $a^2-m=0$ implică $m=4$.
5) Ecuația $a-m=0$ are soluție întotdeauna $m=a$. Rezultă că nu există m astfel încît funcția să fie definită pe $\mathbb{R}$.

V.10. Arătați că fracțiile următoare sînt definite pentru orice valori a și b reale, nenule, $a \neq b$ ale lui X, respectiv Y:

$$1)\ F_1(X) = \frac{X-2}{X^2+Y^2}, \qquad 2)\ F_2(X) = \frac{X+1}{X^2+Y^2-XY}.$$

R. 1) Într-adevăr ecuaţia $a^2 + b^2 = 0$ nu are soluţie diferită de cea banală în $\mathbb{R}$. 2) $a^2 + b^2 - ab > 0$ deoarece $2a^2 + 2b^2 - 2ab = (a-b)^2 + a^2 + b^2 > 0$ şi cum a şi b sînt diferite şi nenule rezultă $a^2 + b^2 - ab > 0$, deci fracţia este definită pe $\mathbb{R}$.

V.11. Amplificaţi fracţia:

$$F(X) = \frac{X^2 - X + 1}{X^2 + X + 1}$$

a) cu polinomul $X - 1$, b) cu polinomul $X^2 + X + 1$.

R. a) Obţinem $\dfrac{(X^2 - X + 1)(X - 1)}{(X^2 + X + 1)(X - 1)} = \dfrac{X^3 - 2X^2 + 2X - 1}{X^3 - 1}$.

b) $\dfrac{(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)}{(X^2 + X + 1)(X^2 + X + 1)} = \dfrac{X^4 + X^2 + 1}{(X^2 + X + 1)^2}$.

V.12. Amplificaţi fracţia:

$$F(X,Y) = \frac{X^2 - XY + Y^2}{X^3 - X^2Y + XY^2 - Y^3}$$

a) cu polinomul $X + Y$, b) cu polinomul $X - Y$.

R. a) Obţinem: $\dfrac{(X^2 - XY + Y^2)(X + Y)}{(X^3 - X^2Y + XY^2 - Y^3)(X + Y)} = \dfrac{X^3 + Y^3}{X^4 - Y^4}$.

b) $\dfrac{X^2 - XY + Y^2)(X - Y)}{(X^3 - X^2Y + XY^2 - Y^3)(X - Y)} = \dfrac{X^3 - 2X^2Y + 2XY^2 - Y^3}{X^4 - 2X^3Y + 2X^2Y^2 - 2XY^3 + Y^4}$.

V.13. Simplificaţi fracţiile:

a) $\dfrac{X^3 + X}{X^4 + X^2}$, b) $\dfrac{X^3 - X}{3X^2 + 3X}$

c) $\dfrac{a\sqrt{2} + b\sqrt{6}}{aX + b\sqrt{3}X}$, $a, b \in \mathbb{R}$ d) $\dfrac{2X^2 - 3}{2X + \sqrt{6}}$

e) $\dfrac{2X^3 + 3X^2 - 8X - 12}{4 - X^2}$ f) $\dfrac{2X^2 - 8}{2X^2 - 8X + 8}$

g) $\dfrac{X^2 - Y^2 + 6X + 9}{X^2 - Y^2 + 3X - 3Y}$ h) $\dfrac{X^3 - X^2 - 3X - 1}{X^4 - 4X^2 - 4X - 1}$

i) $\dfrac{X^3 + Y^3}{2(X + Y)}$ j) $\dfrac{X^3 + Y^3 + (X + Y)^3}{2(X + Y)}$

R. a) Scoatem factorul comun X de la numărător și X^2 factorul comun de la numitor obținem:

$$\frac{X^3 + X}{X^4 + X^2} = \frac{X(X^2 + 1)}{X^2(X^2 + 1)} = \frac{1}{X}.$$

b) Avem: $\dfrac{X(X^2 - 1)}{3X(X + 1)} = \dfrac{X(X + 1)(X - 1)}{3X(X - 1)} = \dfrac{X + 1}{3}.$

c) $\dfrac{\sqrt{2}(a + b\sqrt{3})}{X(a + b\sqrt{3})} = \dfrac{\sqrt{2}}{X}$ **pentru** $a + b\sqrt{3} \neq 0.$

d) $\dfrac{2X^2 - 3}{2X + \sqrt{6}} = \dfrac{(\sqrt{2}X - \sqrt{3})(\sqrt{2}X + \sqrt{3})}{\sqrt{2}(\sqrt{2}X + \sqrt{3})} = \dfrac{\sqrt{2}X - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$

e) $\dfrac{(2X^3 - 8X) + (3X^2 - 12)}{4 - X^2} = \dfrac{2X(X^2 - 4) + 3(X^2 - 4)}{-(X^2 - 4)} = \dfrac{(X^2 - 4)(2X + 3)}{-(X^2 - 4)} = -2X - 3.$

f) $\dfrac{2(X^2 - 4)}{2(X^2 - 4X + 4)} = \dfrac{2(X - 2)(X + 2)}{2(X - 2)^2} = \dfrac{X + 2}{X - 2}.$ g) $\dfrac{(X^2 + 6X + 9) - Y^2}{(X^2 - Y^2) + (3X - 3Y)} =$

$$= \frac{(X + 3)^2 - Y^2}{(X - Y)(X + Y) + 3(X - Y)} = \frac{(X + 3 - Y)(X + 3 + Y)}{(X - Y)(X + Y + 3)} = \frac{X - Y + 3}{X - Y}.$$

h) La numărător scriem $3X = 2X + X$ și grupăm convenabil.

Obținem: $\dfrac{(X^3 - X) - (X^2 + 2X + 1)}{X^4 - (4X^2 + 4X + 1)} = \dfrac{X(X^2 - 1) - (X + 1)^2}{X^4 - (2X + 1)^2} =$

$$= \frac{X(X - 1)(X + 1) - (X + 1)^2}{(X^2 - 2X - 1)(X^2 + 2X + 1)} = \frac{(X + 1)(X^2 - X - X - 1)}{(X + 1)^2(X^2 - 2X - 1)} = \frac{1}{X + 1}.$$

i) $\dfrac{X^3 + Y^3}{2(X + Y)} = \dfrac{(X + Y)(X^2 - XY + Y^2)}{2(X + Y)} = \dfrac{X^2 - XY + Y^2}{2}.$

j) $\dfrac{(X + Y)(X^2 - XY + Y^2) + (X + Y)^3}{2(X + Y)} = \dfrac{(X + Y)(X^2 - XY + Y^2 + X^2 + 2XY + Y^2)}{2(X + Y)} =$

$$= \frac{2X^2 + XY + 2Y^2}{2}.$$

V.14. Simplificaţi fracţiile:

a) $\dfrac{X^3-6X^2+11X-6}{X^2-1}$; b) $\dfrac{X^2-4X+4}{2X^3+X^2-3X-14}$;

c) $\dfrac{X^3+(2a+1)X^2-4a^2}{X^3-3a^2X+2a^3}$, $a \in \mathbb{R}$;

d) $\dfrac{2X^2+Y^2-3XY+X-Y}{2X^2-Y^2-XY-X+Y}$;

e) $\dfrac{X^4-2X^2Y+Y^2-X^2+2XY^2-Y^4}{X^3-X^2-X^2Y+XY^2+Y^2-Y^3}$.

R. a) Numitorul devine $(X-1)(X+1)$. Rezultă că polinomul de la numărător ar putea avea în descompunere pe $X-1$, $X+1$ sau $(X-1)(X+1)$. Pentru valoarea 1 dată lui x, polinomul de la numărător se anulează, deci are ca factor pe $X-1$.

Obţinem deci: $\dfrac{(X-1)(X^2-5X+6)}{(X-1)(X+1)}=\dfrac{X^2-5X+6}{X+1}$.

b) Numărătorul $X^2-4X+4=(X-2)^2$, de unde rezultă că polinomul de la numitor se divide cu $X-2$.

Deci: $\dfrac{(X-2)^2}{(X-2)(2X^2+5X+7)}=\dfrac{X-2}{2X^2+5X+7}$.

c) Observăm că numărul a anulează polinomul de la numitor, deci $X-a$ este un factor al său.

Avem $X^3-3a^2X+2a^3=(X-a)(X^2+aX-2a^2)=(X-a)(X-a)\cdot(X+2a)=$ $=(X-a)^2(X+2a)$. Rezultă, în continuare, că $X-a$ sau $X+2a$ pot fi factori ai polinomului de la numărător. Efectuînd împărţirea cu $X-a$, respectiv cu $X+2a$, deducem că: X^3+ $+(2a+1)X^2-4a^2=(X+2a)(X^2+X-2a)$, Simplificînd, obţinem fracţia:

$\dfrac{X^2+X-2a}{(X-a)^2}$.

d) La numărător, scriem $3XY=2XY+XY$ şi grupăm: $(2X^2-2XY)+(Y^2-XY)+$ $+X-Y=2X(X-Y)-Y(X-Y)+(X-Y)=(X-Y)(2X-Y+1)$. La numitor $2X^2=$ $=X^2+X^2$ şi obţinem: $(X^2-Y)^2+(X^2-XY)-(X-Y)=(X-Y)(X+Y)+X(X-$ $-Y)-(X-Y)=(X-Y)(2X+Y-1)$. Simplificînd, obţinem fracţia:

$\dfrac{2X-Y+1}{2X+Y-1}$.

e) Obţinem: $\dfrac{(X^4-Y^4)-(2XY^2-2X^2Y)-(X^2-Y^2)}{(X^3-Y^3)-(X^2-Y^2)-(X^2Y-XY^2)}=$

$=\dfrac{X^3+X^2Y+XY^2-2XY-X-Y+Y^3}{X^2-X-Y+Y^2}$.

V.15. Simplificați fracțiile:

a) $\dfrac{X^4-(a^2+b^2)X^2+a^2b^2}{X^2-(a+b)X+ab}$, $a, b \in \mathbb{R}$;

b) $\dfrac{X^2-\left(a+\dfrac{a}{a+b}\right)X+\dfrac{a^2}{a+b}}{X^2+\left(b+\dfrac{a}{a+b}\right)X+\dfrac{ab}{a+b}}$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a+b \neq 0$;

c) $\dfrac{X^2+1984X-1985}{X^2-1986X+1985}$.

R. a) $(a^2+b^2)X^2=a^2X^2+b^2X^2$ și grupăm: $(X^4-a^2X^2)-(b^2X^2-a^2b^2)=X^2(X^2-x^2)-$ $-b^2(X^2-a^2)=(X^2-a^2)(X^2-b^2)$. Analog, numitorul se descompune $(X-a)(X-b)$. Simplificînd, obținem $(X+a)(X+b)$.

b) Ca la exercițiul precedent:

$$\frac{(X-a)\left(X-\dfrac{a}{a+b}\right)}{(X-b)\left(X-\dfrac{a}{a+b}\right)}=\frac{X-a}{X-b}$$

c) $X^2-1986X+1985=(X^2-1985X)-(X-1985)=$

$=(X-1985)(X-1)$; $X^2+1984X-1985=(X^2+1985X)-$

$-(X+1985)=(X+1985)(X-1)$. Obținem: $\dfrac{X+1985}{X-1985}$.

V.16. Simplificați fracțiile:

a $\dfrac{X^3+1}{X^5+1}$, b) $\dfrac{X^5+X^3-2}{X^4-1}$, c) $\dfrac{(X^5+X^3-2)(X+1)}{(X^5+X^3+2)(X-1)}$,

d) $\dfrac{X^5-2X^3+1}{X^4+X^3-X^2-X-1}$,

e) $\dfrac{X^6+X^5+X^4+X^3-2X-2}{X^6-X^5+X^4-X^3+2X-2}$.

R. a) $\dfrac{X^3+1}{X^5+1}=\dfrac{(X+1)(X^2-X+1)}{(X+1)(X^4-X^3+X^2-X+1)}=\dfrac{X^2-X+1}{X^4-X^3+X^2-X+1}$

b) $X^5 + X^3 - 2 = (X^5 - 1) + (X^3 - 1) = (X - 1)(X^4 - X^3 + 2X^2 + 2)$.

Simplificăm și obținem: $\dfrac{X^4 - X^3 + 2X^2 + 2}{X^3 + X^2 + X + 1}$. c) $\dfrac{X^4 - X^3 + 2X^2 + 2}{X^4 - X^3 + 2X^2 - 2X + 2}$.

d) $X^5 - X^3 - X^3 + 1 = X^3(X-1)(X+1) - (X-1)(X^2+X+1) = (X-1)(X^4+X^3-X^2-X-1$. După simplificare obținem: $X - 1$.

e) La numărător: $(X^6 - X) + (X^3 - X) + (X^4 - 1) + (X^3 - 1) =$
$= (X - 1)(X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + X^4 + X^3 + X^2 + X + X^2 + X + 1) =$
$= (X - 1)(X^5 + 2X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 3X + 1)$. Analog, la numitor obținem: $(X + 1)(X^5 - 2X^4 + 3X^3 - 4X^2 + 4X - 2)$ Rezultă că fracția se simplifică dacă, de exemplu, $X+1$ divide polinomul $X^5 + 2X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 3X + 1$, ceea ce se-ntîmplă. Analog, $X - 1$ divide polinomul $X^5 - 2X^4 + 3X^3 - 4X^2 + 4X - 2$. După simplificare, obținem: $\dfrac{X^4 + X^3 + X^2 + 2X - 1}{X^4 - X^3 + 2X^2 - 2X + 2}$.

V.17. Simplificați fracțiile:

a) $\dfrac{X^3 + 3X^2 + 2X}{X^5 + 32}$, b) $\dfrac{(X + Y)^5 - X^5 - Y^5}{(X + Y)^7 - X^7 - Y^7}$,

c) $\dfrac{X^3(Y - Z) + Y^3(Z - X) + Z^3(X - Y)}{X^2(Y - Z) + Y^2(Z - X) + Z^2(X - Y)}$,

d) $\dfrac{X^2(Y + Z) + Y^2(Z + X) + Z^2(X + Y) + 2XYZ}{X(Y + Z)^2 + Y(Z + X)^2 + Z(X + Y)^2 - 4XYZ}$

e) $\dfrac{X^4 + X^2Y^2 + Y^4}{X^3 + Y^3}$

R. a) Avem: $\dfrac{X(X^2 + 3X + 2)}{X^5 + 2^5} = \dfrac{X(X + 1)(X + 2)}{(X + 2)(X^4 - 2X^3 + 4X^2 - 8X + 16)} =$

$= \dfrac{X(X + 1)}{X^4 - 2X^3 + 4X^2 - 8X + 16}$. b) Avem: $(X + Y)^5 - X^5 - Y^5 =$

$= 5XY(X+Y)(X^2+XY+Y^2)$ Analog $(X+Y)^7 - X^7 - Y^7 = 7XY(X + Y)\cdot(X^2 + XY + Y^2)^2$.

Simplificînd, obținem $\dfrac{5}{7(X^2 + XY + Y^2)}$. c) Obținem $X+Y+Z$ d) Obținem 1.

e) Obținem succesiv: $\dfrac{(X^4 + Y^4) + X^2Y^2}{(X+Y)(X^2 - XY + Y^2)} = \dfrac{(X^2 - XY + Y^2)(X^2 + XY + Y^2)}{(X + Y)(X^2 - XY + Y^2)} =$

$= \dfrac{X^2 + XY + Y^2}{X + Y}$.

V.18. Determinaţi numerele reale m şi n astfel încît următoarele fracţii să se simplifice:

a) $\dfrac{X^2 + mX + 8}{X^2 - 2}$, b) $\dfrac{X^4 + 1}{X^2 + mX + 1}$,

c) $\dfrac{X^3 - 2X^2 + mX + n}{X^3 - 3X + 2}$

R. a) $X^2-2 = (X - \sqrt{2})(X+ \sqrt{2})$, de unde rezultă că polinomul de la numărător poate avea factor pe $X - \sqrt{2}$, pe $X + \sqrt{2}$ sau produsul $(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$. $X - \sqrt{2}$ este factor dacă $P(\sqrt{2}) = 0$. Rezultă $2 + m\sqrt{2} + 8 = 0$ sau $m = -5\sqrt{2}$. Analog, pentru $m = 5\sqrt{2}$, fracţia se simplifică cu $X + \sqrt{2}$. Fracţia nu se poate simplifica prin $(X - \sqrt{2})(X+ \sqrt{2})$, deoarece, pentru nici o valoare a lui m, numărătorul şi numitorul nu coincid (singura posibilitate de simplificare în acest caz).

b) $X^4+ 1 = (X^2 - X\sqrt{2} + 1)(X^2+X\sqrt{2} + 1)$. Rezultă că $m = -\sqrt{2}$ sau $m = \sqrt{2}$.

c) $X^3-3X + 2 = (X-1)(X - 2)$. Fracţia se simplifică cu $X - 1$ dacă $m + n = 1$, se simplifică cu $X - 2$ dacă $2m + n = 0$ şi se simplifică cu $(X - 1)\cdot(X - 2)$ dacă $m = -1$ şi $n = 2$.

V.19.^PO. Arătaţi că fracţia:

$$\frac{-mX^3 + X^2 + mX - 1}{mX^3 + mX^2 - X - 1}$$

se simplifică, oricare ar fi m număr real.

R. Trebuie ca polinoamele de la numărător şi numitor să aibă un factor comun independent de m. Observăm că -1 anulează cele două polinoame, deci $X + 1$ este acest factor comun. După simplificare, obţinem:

$$\frac{-mX^2 + (m + 1)X - 1}{mX^2 - 1} = \frac{(X - 1)(-mX + 1)}{mX^2 - 1},$$ care, deci se mai poate simplifica (pentru $m = 1$)

V.20. Arătaţi că fracţia:

$$\frac{X^3 + (1 - a)X^2 + (1 - a)X - a}{X^2 - X + 1}$$

este ireductibilă, oricare ar fi a număr real.

R. Numărătorul se descompune în $(X - a)(X^2 + X + 1)$, deci nu are factor numitorul (care este un polinom ireductibil).

V.21.^PO. Determinaţi numărul real m astfel încît fracţia:

$$F(X) = \frac{X^3 + 2mX^2 + mX + 1}{X^3 + 2X^2 - 5X - 6}$$

să fie ireductibilă.

R. Avem $X^3 + 2X^2 - 5X - 6 = (X+1)(X+3)(X-2)$. Punînd condiţia ca numărătorul să nu aibă factori pe $X+1$, $X+3$, $X-2$

obţinem $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{9}{10}, 0, \frac{26}{15}\right\}$.

V.22. Determinaţi m şi n numere reale astfel încît fracţia:

$$F(X) = \frac{X^4 - X^3 + mX^2 + nX + 12}{X^3 + (3-\sqrt{2})X^2 + (2-3\sqrt{2})X - 2\sqrt{2}}$$

să devină după simplificare:

$$F_1(X) = \frac{X^2 + (\sqrt{2}-3)X - 3\sqrt{2}}{X+1}$$

R. Rezultă că polinomul de la numitor se divide prin $X+1$ şi cîtul obţinut $X^2 + (2-\sqrt{2})X - 2\sqrt{2}$ este factorul comun al polinoamelor de la numărător şi numitor. m şi n rezultă din identitatea $X^4 - X^3 + mX^2 + nX + 12 = [X^2 + (2-\sqrt{2})X - 2\sqrt{2}] \cdot [X^2 + (\sqrt{2} - 3)X - 3\sqrt{2}]$.

Rezultă: $m = -4$, $n = 2$.

V.23.[P.O.] Fie fracţia:

$$F(X) = \frac{1-X}{1+X}$$

Determinaţi: $F(F(X))$; $F(F(F(X)))$; $F(F(F(F(X))))$

R. $$F(F(X)) = \frac{1-F(X)}{1+F(X)} = \frac{1 - \frac{1-X}{1+X}}{1 + \frac{1-X}{1+X}} = \frac{2X}{2} = X;$$

$$F(F(F(X))) = F(X) = \frac{1-X}{1+X}; \quad F(F(F(F(X)))) = F(F(X)) = X.$$

V.24. Efectuaţi:

a) $\frac{1}{36a^2} + \frac{7}{48a} - \frac{5}{72a^3}$; b) $\frac{5a}{24} + \frac{7a}{72} - \frac{a-1}{144}$;

c) $\frac{x}{36} - \frac{x-1}{54} - \frac{x}{20}$; d) $\frac{3x-1}{3} - \frac{2x-b}{6}$;

e) $\frac{x+2}{2(x+1)} - \frac{x+2}{3(x+1)}$; f) $\frac{3}{x+1} - \frac{2}{3x+3}$;

g) $\dfrac{1}{a^2+ab}+\dfrac{1}{ab+b^2}$; h) $\dfrac{1}{b}+\dfrac{b-c}{b^2+bc}$; i) $\dfrac{x+1}{x-1}-$

$-\dfrac{x+2}{x-2}$; j) $\dfrac{x-2}{2x+1}+\dfrac{x+3}{3x-3}$; k) $\dfrac{a}{ab-2b}-\dfrac{a+1}{ab-b}$;

l) $\dfrac{1}{2(a+b+c)}+\dfrac{1}{4(a+b+c)}-\dfrac{3}{4(a+b+c)}$;

m) $\dfrac{1}{2(a+b+c)}+\dfrac{1}{3(a+b+c)}-\dfrac{5}{6(a+b+c)}$.

R. Avem:

a) $\dfrac{1}{36a^2}+\dfrac{7}{48a}-\dfrac{5}{72a^3}=\dfrac{4a}{144a^3}+\dfrac{21a^2}{144a^3}-\dfrac{10}{144a^3}=\dfrac{21a^2+4a-10}{144\ a^3}$;

b) $\dfrac{5a}{24}+\dfrac{7a}{72}-\dfrac{a-1}{144}=\dfrac{30a}{144}+\dfrac{14a}{144}-\dfrac{a-1}{144}=\dfrac{30a+14a-a+1}{144}=\dfrac{43a+1}{144}$;

c) $\dfrac{x}{36}-\dfrac{x-1}{54}-\dfrac{x}{20}=\dfrac{15x}{540}-\dfrac{10(x-1)}{540}-\dfrac{27x}{540}=\dfrac{15x-10x+10-27x}{540}=$

$=\dfrac{-22x+10}{540}=\dfrac{2(-11x+5)}{540}=\dfrac{-11x+5}{270}$;

d) $\dfrac{3x-1}{3}-\dfrac{2x-b}{6}=\dfrac{2(3x-1)}{6}-\dfrac{2x-b}{6}=\dfrac{6x-2-2x+b}{6}=\dfrac{4x+b-2}{6}$;

e) $\dfrac{x+2}{2(x+1)}-\dfrac{x+2}{3(x+1)}=\dfrac{3(x+2)}{6(x+1)}-\dfrac{2(x+2)}{6(x+1)}=\dfrac{3x+6-2x-4}{6(x+1)}=\dfrac{x+2}{6(x+1)}$;

f) $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2}{3x+3}=\dfrac{9}{3x+3}-\dfrac{2}{3x+3}=\dfrac{9-2}{3x+3}=\dfrac{7}{3x+3}$;

g) $\dfrac{1}{a^2+ab}+\dfrac{1}{ab+b^2}=\dfrac{b}{ab(a+b)}+\dfrac{a}{ab(a+b)}=\dfrac{1}{ab}$;

h) $\dfrac{1}{b}+\dfrac{b-c}{b^2+bc}=\dfrac{b+c}{b(b+c)}+\dfrac{b-c}{b(b-c)}=\dfrac{b+c+b-c}{b(b+c)}=\dfrac{2b}{b(b+c)}=\dfrac{2}{b+c}$;

i) $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}-\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x-2)}=$

$$= \frac{(x+1)(x-2)-(x+2)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x^2-2x+x-2-(x^2-x+2x-2)}{(x-1)(x-2)} =$$

$$= \frac{x^2-2x+x-2-x^2+x-2x+2}{(x-1)(x-2)} = \frac{-2x}{(x-1)(x-2)};$$

j) $$\frac{x-2}{2x+1} + \frac{x+3}{3x-3} = \frac{(x-2)(3x-3)}{(2x+1)(3x-3)} + \frac{(x+3)(2x+1}{(3x-3)(2x+1)} =$$

$$= \frac{(x-2)(3x-3)+(x+3)(2x+1)}{(3x-3)(2x+1)} = \frac{3x^2-3x-6x+6+2x^2+x+6x+3}{(3x-3)(2x+1)} =$$

$$= \frac{5x^2-2x+9}{(3x-3)(2x+1)};$$

k) $$\frac{a}{ab-2b} - \frac{a+1}{ab-b} = \frac{a(a-1)}{b(a-1)(a-2)} - \frac{(a+1)(a-2)}{b(a-1)(a-2)} =$$

$$= \frac{a(a-1)-(a+1)(a-2)}{b(a-1)(a-2)} = \frac{a^2-a-(a^2-2a+a-2)}{b(a-1)(a-2)} =$$

$$= \frac{a^2-a-a^2+2a-a+2}{b(a-1)(a-2)} = \frac{2}{b(a-1)(a-2)};$$

l) $$\frac{1}{2(a+b+c)} + \frac{1}{4(a+b+c)} - \frac{3}{4(a+b+c)} = \frac{1}{2(a+b+c)} +$$

$$+ \frac{1-3}{4(a+b+c)} = \frac{1}{2(a+b+c)} + \frac{-2}{4(a+b+c)} = \frac{1}{2(a+b+c)} - \frac{1}{2(a+b+c)} = 0;$$

m) $$\frac{1}{2(a+b+c)} + \frac{1}{3(a+b+c)} - \frac{5}{6(a+b+c)} = \frac{3}{6(a+b+c)} + \frac{2}{6(a+b+c)} -$$

$$- \frac{5}{6(a+b+c)} = \frac{3+2-5}{6(a+b+c)} = 0.$$

V.25. Efectuaţi:

a) $\frac{x}{y} \cdot \frac{3y}{2x}$; b) $\frac{1}{2} : \frac{x}{y}$; c) $\frac{6x}{4a} \cdot \frac{7x}{3a}$; d) $\frac{-5x}{6y} \cdot \left(-\frac{7yz^2}{70\,ab^3}\right)$;

e) $\frac{4x}{5y^3} \cdot 6y^4$; f) $-y \cdot \frac{3}{xy} \cdot \frac{8}{32x}$;

g) $\frac{5x}{8y^2} \cdot \left(-\frac{14abx}{x^2}\right) \cdot \left(\frac{8xy}{9y^2}\right)$; h) $\frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{a-b}{a+b}$;

i) $\frac{a^2+ab}{ab} \cdot \frac{b^2+ab}{(a+b)^2}$; j) $\frac{mx+my}{m} \cdot \frac{n}{nx+ny}$;

k) $\frac{(x+y)^2}{(x-y)^3} \cdot \frac{(x-y)^2}{(x+y)^3}$; l) $\frac{a^3x^2-a^3y^2}{a^2} \cdot \frac{b}{bx+by}$;

m) $\frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{x+4} \cdot \frac{x+2}{x+1}$;

n) $\frac{mx+ny}{a+b} \cdot \frac{2x+3y}{5x} \cdot \frac{ax+bx}{2mx+2ny}$.

R. Avem: a) $\frac{3}{2}$; b) $\frac{x}{2y}$; c) $\frac{7x^2}{2a^2}$; d) $\frac{xz^2}{12ab^3}$; e) $\frac{24xy}{5}$;

f) $-\frac{3}{4x^2}$; g) $-\frac{70abx}{9y^3}$; h) 1; i) 1; j) 1; k) $\frac{1}{(x+y)(x-y)}$; l) $a(x-y)$.

m) $\frac{x+3}{x+4}$; n) $\frac{2x+3y}{10}$.

V.26. Efectuați:

a) $\frac{x^2}{y} \cdot \frac{y}{x}$; b) $\frac{x^2}{y^2} \cdot \frac{y}{x}$; c) $\frac{-2x}{3y^2} \cdot \left(-\frac{6}{x}\right)$;

d) $\left(\frac{-2x}{3y}\right) \cdot \left(-\frac{3}{x}\right)$; e) $6y\frac{2x}{3y}$; f) $\frac{4x}{3y^2} \cdot 6y^3$;

g) $-x \cdot \frac{6}{x^3} \cdot \frac{x}{3}$; h) $\frac{-2x^2}{3y} \cdot \frac{3}{x}$;

i) $\frac{4x}{3y} \cdot \left(-\frac{12y^2}{36xy}\right) \cdot \left(-\frac{27x}{16y}\right)$; j) $\frac{x+2}{x+3} \cdot \frac{1}{x+2}$;

k) $\dfrac{ax+ay}{x^2+x}\cdot\dfrac{x+1}{x+y}$; l) $\dfrac{a^2x^2+a^2y^2}{b^3}\cdot\dfrac{b}{x^2+y^2}$;

m) $\dfrac{(x-y)^2}{(x+y)^3}\cdot\dfrac{(x+y)^2}{x-y}$.

R. Avem: a) x; b) $\dfrac{x}{y}$; c) $\dfrac{4}{y^2}$; d) $\dfrac{2}{y}$; e) $4x$; f) $8xy$; g) $-\dfrac{2}{x}$;

h) $\dfrac{2x}{y}$; i) $\dfrac{3x}{4y}$; j) $\dfrac{1}{x+3}$; k) $\dfrac{a}{x}$; l) $\dfrac{a^2}{b^2}$; m) $\dfrac{x-y}{x+y}$.

V.27. Efectuați:

a) $\dfrac{a}{b}:\dfrac{a}{b}$; b) $\dfrac{x^2}{y}:\dfrac{x}{y^2}$; c) $\dfrac{-2x}{y^2}:\dfrac{2}{y}$; d) $\dfrac{3x^2y^3}{5xy^6}:\dfrac{12x^3y^2}{25xy}$;

e) $\dfrac{8}{x^2}:8$; f) $\dfrac{-1}{x^2}:\dfrac{2}{3x}$; g) $\dfrac{a^2x+x}{x+2}:\dfrac{x}{x-1}$;

h) $\dfrac{my+y^2}{2y+1}:\dfrac{m+y}{(2y+1)^2}$; i) $\dfrac{a+b}{a^2+ab}:\dfrac{a-b}{a^2-ab}$;

j) $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2}:\dfrac{a+b}{a-b}$.

R. Avem: a) 1; b) xy; c) $-\dfrac{x}{y}$; d) $\dfrac{5}{4xy^4}$; e) $\dfrac{1}{x^2}$; f) $-\dfrac{3}{2x}$;

g) $\dfrac{(a^2+1)(x-1)}{x+2}$; h) $y(2y+1)$; i) 1; j) $\dfrac{a+b}{a-b}$.

V.28. Efectuați:

a) $\left(\dfrac{1}{x}\right)^3$; b) $\left(\dfrac{-2}{5x}\right)^2$; c) $\left(\dfrac{3x}{5y}\right)^4$; d) $\left(\dfrac{6x^2y}{3ab^2}\right)^5$;

e) $\left(\dfrac{a+b}{(a-b)^2}\right)^4$; f) $\left[\dfrac{(l-v)^2}{u+t^3}\right]^5$; g) $\left(\dfrac{6x^2a}{6x^2+a}\right)^4$.

R. Avem:

a) $\dfrac{1}{x^3}$; b) $\dfrac{4}{25x^4}$; c) $\dfrac{81x^4}{625y^4}$; d) $32\dfrac{x^{10}y^5}{a^5b^{10}}$; e) $\dfrac{(a+b)^4}{(a-b)^8}$;

f) $\dfrac{(l-v)^{10}}{(u+t^3)^5}$; g) $\dfrac{1296x^8a^4}{(6x^2+a)^4}$.

V.29. Efectuați:

a) $\frac{b}{2}-\frac{b+1}{b}:\frac{2b+2}{b^2}$; b) $1-\frac{1}{x+\frac{1}{2}}$; c) $\frac{4}{x}:\frac{1}{x-\frac{x}{2}}$;

d) $1+\frac{2a+\frac{2}{a}}{a+\frac{1}{a}}$; e) $\frac{3a+\frac{3}{a}+\frac{3}{a^2}}{a+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}}$;

f) $\left(a+\frac{1}{a+\frac{1}{a}}\right):\left(1+\frac{1}{a^2+1}\right)$;

g) $\left(2b+\frac{2}{b}\right):\left(-\frac{a}{\frac{b}{a}}+\frac{\frac{a}{b}}{a}\right)$;

h) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right):\left(\frac{1-\frac{b}{a}}{a-b}+\frac{1+\frac{a}{b}}{a+b}\right)$.

R. Avem:

a) $\frac{b}{2}-\frac{b+1}{b}:\frac{2b+2}{b^2}=\frac{b}{2}-\frac{b+1}{b}\cdot\frac{b^2}{2(b+1)}=\frac{b}{2}-\frac{b}{2}=0$;

b) $1-\frac{1}{x+\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{\frac{2x+1}{2}}=1-\frac{2}{2x+1}=\frac{2x+1}{2x+1}-\frac{2}{2x+1}=\frac{2x+1-2}{2x+1}=\frac{2x-1}{2x+1}$;

c) $\frac{4}{x}:\frac{1}{x-\frac{x}{2}}=\frac{4}{x}\cdot\frac{x-\frac{x}{2}}{1}=\frac{4}{x}\cdot\frac{\frac{2x}{2}-\frac{x}{2}}{1}=\frac{4}{x}\cdot\frac{\frac{2x-x}{2}}{1}=\frac{4}{x}\cdot\frac{x}{2}=2$;

d) $1+\frac{2a+\frac{2}{a}}{a+\frac{1}{a}}=1+\frac{2\left(a+\frac{1}{a}\right)}{a+\frac{1}{a}}=1+2=3$;

e) $$\frac{3a+\frac{3}{a}+\frac{3}{a^2}}{a+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}}=\frac{3\left(a+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}\right)}{a+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}}=3;$$

f) $$\left(a+\frac{1}{a+\frac{1}{a}}\right):\left(1+\frac{1}{a^2+1}\right)=\left(a+\frac{1}{\frac{a^2}{a}+\frac{1}{a}}\right):\left(\frac{a^2+1}{a^2+1}+\frac{1}{a^2+1}\right)=$$

$$=\left(a+\frac{1}{\frac{a^2+1}{a}}\right):\frac{a^2+1+1}{a^2+1}=\left(a+\frac{a}{a^2+1}\right):\frac{a^2+2}{a^2+1}=$$

$$=\left[a\left(1+\frac{1}{a^2+1}\right)\right]:\frac{a^2+2}{a^2+1}=a\cdot\frac{a^2+2}{a^2+1}\cdot\frac{a^2+1}{a^2+2}=a;$$

g) $$\left(2b+\frac{2}{b}\right):\left(-\frac{a}{\frac{b}{a}}+\frac{\frac{a}{b}}{a}\right)=\left(\frac{2b^2}{b}+\frac{2}{b}\right):\left(-a\cdot\frac{a}{b}+\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{a}\right)=$$

$$=\frac{2b^2+2}{b}:\left(-\frac{a^2}{b}+\frac{1}{b}\right)=\frac{2(b^2+1)}{b}:\frac{-a^2+1}{b}=\frac{2(b^2+1)}{b}\cdot\frac{b}{1-a^2}=\frac{2(b^2+1)}{1-a^2};$$

h) $$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right):\left(\frac{1-\frac{b}{a}}{a-b}+\frac{1+\frac{a}{b}}{a+b}\right)=\left(\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{ab}\right):\left(\frac{\frac{a}{a}-\frac{b}{a}}{a-b}+\frac{\frac{b}{b}+\frac{a}{b}}{a+b}\right)=$$

$$=\frac{a^2+b^2}{ab}:\left(\frac{\frac{a-b}{a}}{a-b}+\frac{\frac{a+b}{b}}{a+b}\right)=\frac{a^2+b^2}{ab}:\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=$$

$$=\frac{a^2+b^2}{ab}:\left(\frac{b}{ab}+\frac{a}{ab}\right)=\frac{a^2+b^2}{ab}:\frac{a+b}{ab}=\frac{a^2+b^2}{ab}\cdot\frac{ab}{a+b}=\frac{a^2+b^2}{ab}.$$

V.30. Efectuați:

a) $$\frac{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{ab}\right)\cdot a^6b^2-a^6-a^5b}{a^4b};\quad$$ b) $$\frac{1}{(a-b)^2}-\frac{b}{(b-a)^3};$$

c) $\left(\frac{a^2+ab+b^2}{a^2}+\frac{a^2-ab-b^2}{ab}-\frac{a^2-ab-b^2}{b^2}-\frac{b^2}{a^2}\right)\cdot$

$$\cdot\left[\frac{a+2b}{a+b}-\frac{(3a+2b)b}{(a+b)^2}\right];$$

d) $\left(\frac{2xy}{x^2-y^2}+\frac{y}{x^2+xy}-\frac{x+y}{x^2-xy}+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{x^2-y^2}{2x^2-x-3y};$

e) $\left[\frac{u^2-v^2}{uv}-\frac{1}{u+v}\left(\frac{u^2}{v}-\frac{v^2}{u}\right)\right]:\frac{u-v}{u}.$

R. Avem: a) $a+b$; b) $\frac{a}{(a-b)^3}$; c) $\frac{a^2(a-b)}{b^2(a+b)}$; d) $\frac{y}{x}$; e) $\frac{u}{u+v}$.

V.31. Aduceţi la forma cea mai simplă fracţia algebrică:

$$E=\frac{(z+t)(-x-y)-(z-y)(t-x)}{(xy+yz+zt+tx)\cdot xyzt}$$

şi calculaţi valoarea ei numerică pentru $x=2$, $y=-3{,}5$, $z=84{,}26$, $t=71{,}51$.

R. Avem, succesiv:

$$E=\frac{-xz-yz-tx-ty-(zt-zx-yt+yx)}{(xy+yz+zt+tx)\cdot xyzt}=$$

$$=\frac{-xz-yz-tx-ty-zt+zx+yt-yx}{(xy+yz+zt+tx)xyzt}=\frac{-xy-yz-zt-tx}{(xy+yz+zt+tx)xyzt}=-\frac{1}{xyzt}.$$

V.32. Determinaţi o fracţie algebrică raţională F aşa ca:

$$F+\frac{6a+3}{b}=\frac{5a+7}{2b}.$$

R. Procedînd analog rezolvării ecuaţiilor cu o necunoscută, găsim:

$$F=\frac{5a+7}{2b}-\frac{6a+3}{b}=\frac{5a+7-2(6a+3)}{2b}=\frac{-7a+1}{2b}.$$

V.33. **Determinați două fracții algebrice raționale E și F astfel ca:**

$$E + F = \frac{a^2b}{x}.$$

R. Fracția E o putem lua arbitrar, de exemplu

$$E = \frac{a}{x}. \text{ Atunci } F = \frac{a^2b}{x} - \frac{a}{x} = \frac{a^2b - a}{x}.$$

V.34. **Efectuați:**

a) $\left(\dfrac{X-Y}{X} + \dfrac{Y-X}{Y}\right) : \left(\dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{Y}\right)$,

b) $\left(\dfrac{X+2}{X-2} + \dfrac{X-2}{X+2} - 2\right) \cdot \dfrac{X^3-8}{8}$,

c) $\left(\dfrac{X}{X^2-X} + \dfrac{X+2}{2+X-2X^2-X^3} + \dfrac{3X^2}{6X^2+6X}\right)\left(\dfrac{X}{2} - \dfrac{0,5}{X}\right)$,

d) $\left(\dfrac{X+Y}{1-XY} - \dfrac{X-Y}{1+XY}\right) : \left(1 + \dfrac{X^2Y^2}{1-X^2Y^2}\right)$,

e) $\left(\dfrac{X^4+4+4X}{X^2} - \dfrac{2X+4}{X} + 1\right) \cdot \dfrac{X^3-X^2}{4X^2-4}$,

f) $\left(\dfrac{1}{X^2-2XY+Y^2} - \dfrac{X^2}{Y^2}\right) : \left(\dfrac{1}{X-Y} + \dfrac{X}{Y}\right) \cdot \dfrac{Y^2-XY}{XY-X^2+Y}$

R. a) Avem $\dfrac{XY-Y^2+XY-X^2}{XY} : \dfrac{Y-X}{XY} = -\dfrac{(X-Y)^2}{XY} \cdot \dfrac{XY}{Y-X} = X-Y$.

b) $\dfrac{(X+2)^2+(X-2)^2-2(X-2)(X+2)}{(X-2)(X+2)} \cdot \dfrac{(X-2)(X^2+2X+4)}{8} =$

$$= \frac{16}{(X-2)(X+2)} \cdot \frac{(X-2)(X^2+2X+4)}{8} = \frac{2(X^2+2X+4)}{X+2}.$$

c) Obținem $\left(\dfrac{X}{X(X-1)} + \dfrac{X+2}{(X+2)(1-X^2)} + \dfrac{3X^2}{6X(X+1)}\right) \cdot \left(\dfrac{X}{2} - \dfrac{1}{2X}\right) =$

$$= \left[\frac{1}{X-1} + \frac{1}{1-X^2} + \frac{X}{2(X+1)}\right] \cdot \frac{X^2-1}{2X} = \frac{X(X+1)}{2(X^2-1)} \cdot \frac{X^2-1}{2X} = \frac{X+1}{4}.$$

d) $\dfrac{2Y(X^2+1)}{(1-XY)(1+XY)} \cdot \dfrac{1-X^2Y^2}{1} = 2Y(X^2+1)$. e) $\dfrac{X^4-X^2+4}{X^2}$.

$\cdot \dfrac{X^2(X-1)}{4(X-1)(X+1)} = \dfrac{X^4 - X^2 + 4}{4(X+1)}$. f) Avem: $\left[\left(\dfrac{1}{X-Y}\right)^2 -\right.$

$$\left.-\left(\frac{X}{Y}\right)^2\right] \cdot \frac{1}{\dfrac{1}{X-Y} + \dfrac{X}{Y}} \cdot \frac{Y(Y-X)}{XY - X^2 + Y} = \left(\frac{1}{X-Y} - \frac{X}{Y}\right)\left(\frac{1}{X-Y} + \frac{X}{Y}\right) \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\dfrac{1}{X-Y} + \dfrac{X}{Y}} \cdot \frac{Y(Y-X)}{YX - X^2 + Y} = \frac{Y - X^2 + XY}{Y(X-Y)} \cdot \frac{Y(Y-X)}{XY - X^2 + Y} = -1.$$

V.35. Arătați că expresia:

$$E(X, Y) = \left(\frac{1}{2X - Y} + \frac{3Y}{Y^2 - 4X^2} - \frac{2}{2X + Y}\right) : \left(1 + \frac{4X^2 + Y^2}{4X^2 - Y^2}\right) \text{ nu}$$

depinde de Y.

R. Obținem succesiv: $E(X,Y) = -\dfrac{2X}{4X^2 - Y^2} \cdot \dfrac{4X^2 - Y^2}{8X^2} = -\dfrac{1}{4X}$ deci o expresie independentă de Y.

V.36. Cercetați dacă expresia următoare este independentă de X și Y:

$$E(X, Y) = \frac{\dfrac{X^3 + X^2Y - XY^2 - Y^3}{XY} + \dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{Y}}{\left(\dfrac{X}{Y} + \dfrac{Y}{X} - 2\right)\left(\dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{Y}\right) \cdot XY + \dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{Y}}$$

V.37. Cercetați dacă expresia:

$$E(X, Y) = \frac{\dfrac{X}{Y} - 2 + \dfrac{Y}{X}}{\dfrac{X}{Y} + 2 + \dfrac{Y}{X}} \cdot \frac{X^3 + Y^3 + 3XY(X+Y)}{X^2 - Y^2} \cdot (X^2 + XY +$$

$+ Y^2) - X^3$, se poate scrie ca o putere a lui $(-Y)$.

CAPITOLUL VI

ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII

VI.1. Rezolvați ecuațiile:

a) $(2x+1)^2 = (2x-1)^2$;

b) $(2x+1)^4 = (x-2)^4$;

c) $(x+7)^3 = (x+7)^2$.

d) $\dfrac{x^2-4}{x-2} = 0$; e) $\dfrac{x^2-4}{x+2} = -4$;

f) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{2x+1}{x^2-1}$;

g) $\dfrac{2}{x-1} = \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x+3}{(x+1)(x-1)}$;

h) $\dfrac{x^3-27}{x^2+3x+9} + \dfrac{(x+3)^2}{x^2-9} = \dfrac{6}{x-3}$.

R. a) Efectuînd calculele obținem: $4x^2+4x+1 = 4x^2-4x+1$ sau $8x = 0$, de unde rezultă $x = 0$;

b) Fie $a = 2x+1$ și $b = x-2$. Avem $a^4 = b^4$ echivalentă cu $(a^2-b^2)(a^2+b^2) = 0$, de unde: I. $a^2-b^2=0$ sau $(a-b)(a+b) = 0$; adică $(x+3)(3x-1) = 0$, de unde $x+3=0$ deci $x=-3$ și $3x-1=0$ deci $x = \dfrac{1}{3}$ și II. $a^2+b^2 = 0$ ceea ce are loc dacă și numai dacă $a = 0$ și $b = 0$. Rezultă $2x+1 = 0$ și $x-2 = 0$ care nu sînt satisfăcute simultan pentru aceeași valoare a lui x. Soluțiile ecuației sînt deci $x_1 = -3$, $x_2 = \dfrac{1}{3}$;

c) Avem $(x+7)^3-(x+7)^2 = 0$ sau $(x+7)^2(x+7-1) = 0$, de unde rezultă $(x+7)^2 = 0$, adică $x = -7$ sau $x+6 = 0$, adică $x = -6$; d) $\dfrac{x^2-4}{x-2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 0$. O fracție este nulă cînd numărătorul este nul. Deci $(x-2)(x+2) = 0$, adică $x = 2$ sau $x = -2$. Dar pentru $x = 2$ se anulează numitorul fracției și deci nu poate fi soluție. În concluzie $x = -2$ este soluție a ecuației. Observație: Fracția se putea simplifica cu $x-2$ deoarece $x-2$ trebuie să fie diferit de zero; e) Se impune $x+2 \neq 0$, $x \neq -2$. Obținem: $\dfrac{(x-2)(x+2)}{x+2} = -4$ sau $x-2 = -4$, de unde $x = -2$ care nu este soluție în condițiile impuse; f) Se impun condiţiile: $x + 1 \neq 0$ şi $x - 1 \neq 0$. Deci $x \neq -1$ şi $x \neq 1$. Aducînd la acelaşi numitor şi efectuînd calculele, obţinem: $x - 1 + x + 1 = 2x + 1$ sau $2x = 2x + 1$ ceea ce este fals oricare ar fi x real. Deci ecuaţia nu are soluţii; *g)* În condiţiile $x \neq -1$ şi $x \neq 1$, obţinem: $2(x + 1) - (x - 1) = x + 3$ sau $x + 3 = x + 3$, propoziţie adevărată oricare ar fi x real. Deci soluţiile ecuaţiei sînt numerele $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; h) Trebuie ca $x^2 - 9 \neq 0$, $x - 3 \neq 0$ şi $x^2 + 3x + 9 \neq 0$. Deci $x \neq -3$ şi $x \neq 3$, $x^2 + 3x + 9 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} > 0$, oricare ar fi x real. Avem:

$$\frac{x^3 - 27}{x^2 + 3x + 9} = \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{x^2 + 3x + 9} = x - 3 \text{ şi } \frac{(x + 3)^2}{x^2 - 9} =$$

$$= \frac{(x + 3)^2}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{x + 3}{x - 3}.$$

Ecuaţia este deci echivalentă cu $x - 3 + \frac{x + 3}{x - 3} - \frac{6}{x - 3} = 0$ sau $x - 3 + \frac{x - 3}{x - 3} = 0$ sau $x - 2 = 0$, adică $x = 2$.

VI.2. Rezolvaţi ecuaţiile cu necunoscuta x:

a) $a - \frac{x}{2} + 1 = \frac{3a - x}{2} + 4$; b) $\frac{x + a}{2} + \frac{x + b}{3} + \frac{x + c}{4} = 0$;

c) $\frac{mx + 1}{n} + \frac{nx + 1}{m} = 1$, $mn \neq 0$; d) $\frac{ax + b}{c} + \frac{bx + c}{a} + \frac{cx + a}{b} = a + b + c$, $abc \neq 0$; e) $\frac{x - a}{bc} + \frac{x - b}{ca} + \frac{x - c}{ab} = 0$, $abc \neq 0$; f) $\frac{x}{a^2} - 1 = \frac{2x}{a^2 n} - \frac{a^2 + x}{a^2 n^2}$, $an \neq 0$; g) $\frac{ax + a}{a - b} + \frac{x - a}{a + b} = \frac{x + b}{a + b} + \frac{2(x - b)}{a - b}$, $(a + b)(a - b) \neq 0$; h) $\frac{8ax}{3 - a} - \frac{5 - x}{2 + a} = 1$, $a \in \mathbb{R} - \{-2, 3\}$; i) $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} + 1 = \frac{1}{a + b + c}$, $abc \neq 0$, $a + b + c \neq 0$; j) $\frac{\frac{x}{a} + \frac{x}{b}}{c} + \frac{\frac{x}{b} + \frac{x}{c}}{a} + \frac{\frac{x}{c} + \frac{x}{a}}{b} = 1$, $abc \neq 0$; k) $\frac{ab + x}{a + b} + \frac{bc + x}{b + c} + \frac{ca + x}{c + a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, $abc \neq 0$, $(a + b)(b + c)(c + a) \neq 0$; l) $\frac{x + a + b}{a + b + c} + 1 =$

$$= \frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c},\ abc \neq 0,\ a + b + c \neq 0;\quad \text{m)}\ \frac{x - a}{a + b} =$$

$$= \frac{x - 2}{a - b},\ (a + b)(a - b) \neq 0;\quad \text{n)}\ \frac{n - 2x}{3m} - \frac{5m^2}{2n^2} =$$

$$= \frac{x}{m} - 2 + \frac{m(x - m)}{n^2},\quad mn \neq 0;\quad \text{o)}\ 2b^2 - \frac{(3c^2 - 5b^2)acx}{bc^3} =$$

$$= \frac{2ax}{c} - 3b + \frac{5abx}{c^3},\ bc \neq 0;\ \text{p)}\ a - \frac{x + ac}{b} + \frac{x + bc}{a} =$$

$$= \frac{ab - x}{c} - a,\ aabc \neq 0,\quad \text{r)}\ \frac{x}{c - d} - \frac{5c}{c + d} = \frac{2dx}{c^2 - d^2};\ c^2 - d^2 \neq 0;$$

$$\text{s)}\ \frac{m^2 + n^2}{m + n}\left[2(m + n) - \frac{n^2x}{m + n}\right] = \left[2m + n\left(\frac{m}{n} - 1\right)^2\right] \cdot$$

$$\cdot \left(n - \frac{nx}{m - n}\right),\ m^2 - n^2 \neq 0,\quad n \neq 0;\quad \text{ş)}\ \frac{x}{b^2} + \frac{x}{a^2} + \frac{x}{ab} =$$

$$= 2(a^3 - b^3),\ ab \neq 0.$$

R. Avem soluţiile: a) $x \in \mathbb{R}$ dacă $a = -6$; $x \in \Phi$, dacă $a \neq -6$; b) $x = -\frac{6a + 4b + 3c}{13}$; c) $x = \frac{mn - m - n}{m^2 + n^2}$; d) $x = \frac{a^2bc + ab^2c + abc^2 - ab^2 - bc^2 - a^2c}{a^2b + b^2c + c^2a}$;

e) $x = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c}$; $a + b + c \neq 0$. Dacă $a + b + c = 0$ ecuaţia nu are soluţie;

f) $x = \frac{a^2(n + 1)}{n - 1}$, dacă $n = 1$. Dacă $n = 1$ ecuaţia admite drept soluţie orice $x \in \mathbb{Q}$;

g) $x = 3r$; h) $x = -\frac{a^2 + 4a - 21}{8a^2 + 15b + 3}$, dacă $8a^2 + 15a + 3 \neq 0$; i) $x = \frac{abc(1 - a - b - c)}{(a + b + c)(ab + bc + ca)}$, dacă $ab + bc + ca \neq 0$. Dacă $ab + bc + ca = 0$ şi $a + b + c = 1$ $\left(\text{de exemplu pentru } a = \frac{1 - \sqrt{5}}{4},\ b = \frac{1 + \sqrt{5}}{4},\ c = \frac{1}{2}\right)$, ecuaţia admite soluţie orice $x \in \mathbb{Q}$; j) $x = \frac{abc}{2(a + b + c)}$, dacă $a + b + c \neq 0$. Dacă $a + b + c = 0$, ecuaţia nu are soluţie; k) $x = [(ab + ac + bc)(a + b)(b + c)(c + a) - abc(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 3a^2bc + 3ab^2c + 3abc^2) : abc(a + b + c)^2]$, dacă $a + b + c = 0$;

l) $x = \frac{2a + 2b + c}{a^2b + a^2c + ab^2 + 2abc + b^2c + ac^2 + bc^2}$.

Se poate demonstra că numitorul este întotdeauna diferit de 0, în condițiile problemei;

m) $x=\frac{a(a+3b)}{2b}$, $b\neq 0$, Pentru $b=0$ ecuația nu are soluție; n) $x=\frac{2n^3+12mn^2-9m^3}{2(3m^2+5n^2)}$;

o) $x=\frac{b^2c}{a}$, $a\neq 0$; p) $x=ab-ac-bc$; r) $x=5c$; s) $x=\frac{(m-n)(m+n)^2}{m^2(m-n)-(m+n)^2}$;

ș) $x=2a^2b^2(a-b)$.

VI. 3. Rezolvați ecuațiile:

a) $\frac{\frac{x}{2}-4}{\frac{x+8}{2}-8}+\frac{x-8}{2}+x=\frac{3x}{2}+\frac{49}{16}x$, b) $\frac{x-1}{4}+\frac{3x-2}{9}=\frac{2x-1}{12}$ c) $\frac{3x+8}{5x-6}=2$; d) $\frac{2x+3}{x-2}=\frac{2}{3}$

e) $\frac{x}{x+3}=\frac{2x}{2x+3}$; f) $\frac{x}{x-1}+\frac{1}{2x-2}=\frac{3x-2}{3x+3}$;

g) $\frac{2+x}{2-x}=\frac{3+x}{3-x}$; h) $\frac{a+x}{a-x}=2$, $a\in\mathbb{Q}$; i) $(x+1)(x+2)=(x+3)(cx+4)$; j) $\frac{0,1-x}{0,2}-\frac{3}{2}=\frac{4-5x}{0,1}$ k) $\frac{3}{2x-6}=\frac{5}{8x-7}$; l) $\frac{x-\frac{x}{2}-\frac{3+x}{4}}{2}=4-\frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{5+x}{3}\right)}{3}$;

m) $\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x+2\right)+2\right]+2\right\}-1=0$; n) $\frac{x-1}{2}+\frac{x-2}{3}+\frac{x-3}{4}=\frac{x-4}{5}+\frac{x-5}{6}+\frac{x-6}{7}$;

o) $\left(\frac{a^2+x^2}{2ax}\right)-1:(a-x)=\frac{1}{2x}-\frac{2}{a}+\frac{1}{ax}$, $a\in\mathbb{Q}-\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

p) $\frac{3abc}{a+b}+\frac{a^2b^2}{(a+b)^3}+\frac{(2a+b)\,b^2x}{a(a+b)^2}=3cx+\frac{bx}{a}$, $a, b, c\in\mathbb{Q}$, $a\neq 0$, $a\neq -b$; r) $x-\frac{x+1}{2}+\frac{2x-1}{3}+\frac{3x-2}{4}-\frac{x-5}{12}=0$;

s) $\frac{2}{3}\left(1+\frac{3x}{2}\right)-\frac{5}{8}\left(1-\frac{5x}{6}\right)=2x+3$; ş) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+3\right)-$ $-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}-5\right)=4$; t) $2(x+1)^2=2[7-(1-x)]\,x+9$;

ţ) $\frac{5x+6}{8}-\frac{x-3}{7}=2x-9$; u) $\frac{x+1}{0,1}+\frac{x+2}{0,2}=$ $=\frac{x+3}{0,3}+\frac{x+4}{0,4}$; v) $1-\frac{5x+1}{x-3}=2$; x) $\frac{2x-1}{6x-3}=\frac{4x+9}{12x+7}$.

R. Avem succesiv:

$$\frac{\frac{x-8}{2}}{\frac{x+8-16}{2}}+\frac{x-8}{2}+\frac{2x}{2}=\frac{24x}{16}+\frac{49x}{16}$$

$$\frac{x-8}{2}\cdot\frac{2}{x-8}+\frac{x-8+2x}{2}=\frac{24x+49x}{16},$$

$$1+\frac{3x-8}{2}=\frac{24x+49x}{16};$$

$$\frac{16+8(3x-8)}{16}=\frac{24x+49x}{16}$$

Deci $16+24x-64=24x+49x$ de unde $49x=-48$, deci $x=-\frac{48}{49}$.

b) Ecuaţia, după aducerea fracţiilor la acelaşi numitor, se mai scrie

$$9(x-1)+4(3x-2)=3(2x-1)$$

de unde:

$$9x-9+12x-8=6x-3$$

deci $9x+12x-6x=9+8-3$ adică $15x=14$, deci $x=\frac{14}{5}$.

c). Ecuaţia se mai scrie $3x+8=2(5x-6)$ sau $3x+8=10x-12$ sau încă $3x-10x=$ $=-12-8$, de unde $-7x=-20$, deci $x=\frac{-20}{-7}=\frac{20}{7}$.

d) Ecuaţia se mai scrie $3(2x+3)=2(x-2)$, deci $6x+9=2x-4$ adică $6x-2x=$ $=-9-4$, deci $4x=-13$ de unde $x=-\frac{13}{4}$.

e) Avem $x(2x+3)=2x(x+3)$, de unde $2x^2+3x=2x^2+6x$, deci $2x^2-2x^2+3x-6x=0$ sau $-3x=0$, de unde $x=0$.

f) Avem, succesiv:

$$\frac{2x}{2x-2}+\frac{1}{2x-2}=\frac{3x-2}{3x+3},$$

$$\frac{2x+1}{2x-2}=\frac{3x-2}{3x+3}.$$

de unde $(2x+1)(3x+3)=(2x-2)(3x-2)$. Desfăcînd parantezele și reducînd termenii asemenea obținem ecuația $6x^3+9x+3=6x^2-10x+4$ de unde $19x=1$, deci $x=\frac{1}{19}$.

În continuare, avem rezultatele: g) $x=0$; h) $x=\frac{a}{3}$; i) $x=-\frac{5}{2}$; j) $x=\frac{41}{45}$;

k) $x=-\frac{1}{2}$; l) $x=\frac{229}{11}$; m) $x=3$; n) $x=-\frac{221}{241}$; o) $x=\frac{2}{3}$; p) $x=\frac{ab}{a+b}$;

r) $x=\frac{1}{2}$; s) $x=\frac{142}{47}$; ș) $x=-\frac{1}{5}$; t) $x=-\frac{7}{8}$; ț) $x=\frac{114}{17}$ u) $x=0$;

v) $x=\frac{1}{3}$; x) $x=\frac{1}{2}$.

VI.4. Rezolvați ecuațiile următoare, analizînd toate situațiile ce pot apărea pentru orice a și m numere reale.

a) $2m^2x-m=x+1$ b) $m^2x+x=2m$

c) $a(x-a)=m(x-m)$ d) $m^2x+1=m(x+1)$

e) $mx+1=a-x$ f) $\frac{a+b}{x+2}=\frac{a-b}{x-2}$.

R. $(m^2-1)x=m+1$. Cazul I: Pentru $m^2-1\neq 0$, obținem $x=\frac{1}{m-1}$ soluție unică. Cazul II: Pentru $m=1$ avem ecuația $0.x=2$ care nu are soluții. Cazul III: $m=-1$ implică $0\cdot x=0$, adică orice x este soluție; b) $(m^2+1)x=2m$ adică $x=\frac{2m}{m^2+1}$ soluție unică oricare ar fi m real. c) Obținem: $(a-m)x=a^2-m^2$. I: Pentru $a=m$, $x=c+m$ soluție unică. II: $a=m$ implică $0\cdot x=0$ deci orice x este soluție. d) $x(m^2-m)=m-1$. I: $m^2-m\neq 0$ adică $m\neq 0$ și $m\neq 1$ implică $x=\frac{m-1}{m^2-m}=\frac{m-1}{m(m-1)}=\frac{1}{m}$ soluție unică, II: $m=0$ implică $0\cdot x=-1$, adică o propoziție falsă oricare ar fi x, III: $m=1$ implică $x\cdot 0=0$, adică orice x este soluție. e) $x(m+1)=a-1$. I. Pentru $m=\neq 1$, $x=$ $=\frac{a-1}{m+1}$ este soluție unică. II. Pentru $m=-1$, obținem $7\cdot x=a-1$ care conduc la situațiile: II_1: $a=1$ cînd ecuația are o infinitate de soluții și II_2: $a\neq 1$ cînd ecuația nu are soluții. f) În condițiile $x+2\neq 0$ și $x-2\neq 0$ adică $x\neq -2$ și $x\neq 2$, obținem succesiv: $(a+b)(x-2)=(a-b)(x+2)$ sau $bx=2a$. I. Pentru $b\neq 0$, $x=\frac{2a}{b}$ este soluție unică. II. Pentru $b=0$ și $a=0$ obținem o infinitate de soluții ale ecuației. III. Pentru $b=0$ și $a\neq 0$ se obține ecuație fără soluții.

VI.5. Rezolvati ecuațiile următoare considerînd pe rînd, pe x și m necunoscute

a) $mx=2-x$,

b) $mx+x=1-m$;

c) $x^2-2mx+m^2=0$;

d) $(x-m)^2+(x+m)^2=0$;

e) $m^2x^2-2mx+1=0$.

R. a) Considerînd x necunoscuta, obținem: $x(m+1)=2$ care are soluție unică cînd $m\neq -1$ și nu are soluție pentru $m=-1$. Considerînd m necunoscuta, rezultă pentru $x\neq 0$ soluția unică $m=\frac{2-x}{x}$, iar pentru $x=0$ o ecuație fără soluții.

b) Ecuația în x este echivalentă cu $x(m+1)=1-m$ (1). Pentru $m\neq -1$ se obține soluția unică $x=\frac{1-m}{1+m}$ iar pentru $m=-1$ se obține o ecuație fără soluții.

Ecuația în m devine $m(x+1)=1-x$. Analiza existenței soluțiilor ei urmează exact același raționament ca în cazul ecuației (1).

c) $x^2-2mx+m^2=0$ este echivalentă cu $(x-m)^2=0$ sau $x=m$. Deci oricare ar fi m, ecuația în x are soluția $x=m$ și oricare ar fi x, ecuația în m are soluția $m=x$.

d) Membrul stîng fiind o sumă de pătrate rezultă că este necesar ca: $x-m=0$ și $x+m=0$ sau $x=m$ și $x=-m$. Rezultă că ecuația în x are soluții cînd $m=0$ pe $x=0$ și nu are soluții în celelalte cazuri. La fel ecuația în m are soluții cînd $x=0$ pe $m=0$ și nu are soluții în celelalte cazuri.

e) Ecuația este echivalentă cu ecuația $(mx-1)^2=0$. Rezultă pentru ecuația în x soluția $\frac{1}{m}$ cînd $m\neq 0$. Pentru $m=0$ ecuația în x nu are soluții. Analiza existenței soluțiilor ecuației în m se face la fel.

VI.6. Rezolvați în mulțimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ecuația:

$$a(ax-b)+b(bx-a)=0,\quad a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

R. Ecuația devine $(a^2+b^2)x=2ab$. Pentru orice a, b reale nenule se obține soluția $x=\frac{2ab}{a^2+b^2}$ Observînd că $2ab\leqslant a^2+b^2$, rezultă că ecuația are soluția $x=1$ în $\mathbb{N}$ și $\mathbb{Z}$ în cazul $a=b$, iar pentru $a\neq b$ soluția rațională (și reală) $x=\frac{2ab}{a^2+b^2}$.

VI.7. Rezolvați ecuațiile:

a) $\dfrac{x^2-9}{x-m}=0$;

b) $\dfrac{x-2}{x-m}+\dfrac{x-m}{x-2}=0$;

c) $\dfrac{2x+1}{x-m}=\dfrac{x-m}{2x+1}$, $m\in\mathbb{R}$.

R. a) Se impune condiția $x-m\neq 0$, $x\neq m$. Obținem $x^2-9=0$ sau $(x-3)(x+3)=0$, adică $x_1=3$ și $x_2=-3$, soluții valabile în cazul $m\neq 3$, respectiv $m\neq -3$.

b) În condițiile $x\neq m$ și $x\neq 2$, obținem: $(x-2)^2+(x-m)^2=0$ care implică simultan $x=2$ și $x=m$. Deci, ecuația nu are soluții în condițiile date.

c) În condițiile $x\neq m$ și $x\neq -\frac{1}{2}$, obținem succesiv: $(2x+1)^2=(x-m)^2$; $(2x+1)^2-(x-m)^2=0$, $(2x+1+x-m)(2x+1-x+m)=0$; $(3x+1-m)(x+1+m)=0$, $3x+1-m=0$, $x=\frac{-1+m}{3}$ sau $x+1+m=0$, $x=-1-m$. Cum $\frac{m-1}{3}\neq m$ pentru

$m \neq -\frac{1}{2}$, $-1-m \neq m$ pentru $m \neq -\frac{1}{2}$, iar $\frac{m-1}{3} \neq -\frac{1}{2}$ pentru $m \neq -\frac{1}{2}$ și $-1-m \neq -\frac{1}{2}$ pentru $m \neq -\frac{1}{2}$, soluțiile ecuației sînt $x_1 = \frac{m-1}{3}$ și $x_2 = -1-m$, unde $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

VI. 8. Fie sistemul :

$$\begin{cases} 2|x| + 3y = a \\ |x| + y = 1, \quad a \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Arătați că dacă (x_0, y_0) este soluție a sistemului, atunci și $(-x_0, y_0)$ este soluție.

b) Determinați a astfel încît sistemul să aibă soluție unică.

R. (x_0, y_0) soluție implică $2|x_0| + 3y_0 = a$ și $|x_0| + y_0 = 1$. Punînd în locul lui x, $-x_0$ și în locul lui y, y_0 rezultă: $2|-x_0| + 3y_0 = a$ și $|-x_0| + y_0 = 1$ sau $2|x_0| + 3y_0 = a$ și $|x_0| + y_0 = 1$. Deci $(-x_0, y_0)$ este soluție a sistemului dat.

b) Soluția sistemului este unică atunci cînd $(x_0, y_0) = (-x_0, y_0)$ $x_0 = -x_0$ implică $x_0 = 0$. Din ecuația a doua obținem $y_0 = 1$. Din prima ecuație, rezultă $a = 3$. Deci pentru $a = 3$ se obține un sistem cu soluția unică (0,1).

VI. 9. Determinați soluțiile sistemelor :

a) $$\begin{cases} \sqrt{3}x - y = 3 - \sqrt{2} \\ 3x - \sqrt{3}y = 3\sqrt{3} - \sqrt{6}, \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 2\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 1 + \sqrt{3} \\ -4x + \sqrt{6}y = \sqrt{6}. \end{cases}$$

R. a) Prin „reducere": înmulțim, de exemplu, prima ecuație cu $-\sqrt{3}$. Obținem:

$$\begin{cases} -3x + \sqrt{3}y = -3\sqrt{3} + \sqrt{6} \\ 3x - \sqrt{3}y = 3\sqrt{3} - \sqrt{6}. \end{cases}$$

Deci ecuațiile sistemului coincid. Rezultă că sistemul are o infinitate de soluții care se pot obține de exemplu după formulele: $x = a$ și $y = \sqrt{3}a - 3 + \sqrt{2}$, $a \in \mathbb{R}$.

b) Înmulțim, de exemplu, prima ecuație cu $\sqrt{2}$, reducem pe y și obținem: $0 = 1 + 2\sqrt{6}$. Absurd. Deci sistemul nu are soluții.

VI.10. Rezolvați sistemul în x și y :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

pentru a, b, c, a', b', c' numere reale nenule.

R. Din prima ecuaţie $x = \dfrac{c - by}{a}$. Înlocuind în ecuaţia a II-a, obţinem, după efectuarea calculelor: $(ab' - a'b)y = ac' - a'c$. Analog, obţinem: $(ab' - a'b)x = b'c - c'b$.

Rezultă mai multe situaţii:

I. Dacă $ab' - a'b \neq 0$ sau $\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$ atunci sistemul are soluţie unică (este „compatibil determinat").

II. Dacă $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$ atunci sînt două posibilităţi:

II_1. $ac' - a'c = 0$ şi $b'c - bc' = 0$ sau $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{c}{c'}$ şi $\dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$, atunci sistemul are o infinitate de soluţii (este „compatibil nedeterminat"). Deci sistemele care au coeficienţii corespunzători aceloraşi necunoscute şi termenii liberi, proporţionali, au o infinitate de soluţii.

II_2: Dacă $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'}$ şi $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{c}{c'}$ sistemul nu are soluţii (este „incompatibil").

VI.11. Determinaţi a şi b reali astfel încît sistemul :

$$\begin{cases} x - 3y = 5 \\ ax + y = b \end{cases}$$

1) să aibă soluţie unică,
2) să aibă o infinitate de soluţii,
3) să nu aibă soluţii.

R. 1) Conform cu rezultatul de la exerciţiul VI.10 sistemul are soluţiie unică dacă: $\dfrac{1}{a} \neq \dfrac{-3}{1}$, deci dacă $a \neq -\dfrac{1}{3}$.

2) Dacă $\dfrac{1}{a} = \dfrac{-3}{1} = \dfrac{5}{b}$, adică $a = -\dfrac{1}{3}$ şi $b = -\dfrac{5}{3}$, sistemul are o infinitate de soluţii.

3) Dacă $a = -\dfrac{1}{3}$ şi $b \neq -\dfrac{5}{3}$ sistemul este incompatibil.

VI. 12. Arătaţi că sistemele de tipul :

$$\begin{cases} ax - by = c' \\ bx + ay = c \end{cases}$$

cu a, b, c, c' numere reale oarecare nenule, au soluţii unice.

R. Într-adevăr $\dfrac{a}{b} \neq -\dfrac{b}{a}$ sau $a^2 + b^2 \neq 0$.

VI.13. Rezolvaţi sistemul :

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ ax + by = 0, \end{cases}$$

pentru orice a, b, a', b' numere reale nenule.

R. $\frac{a}{b} \neq \frac{a'}{b'}$, atunci sistemul are soluție $x = 0$, $y = 0$. Dacă: $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ sistemul are o infinitate de soluții obținute prin formulele $x=m$ și $y = -\frac{a}{b}m$, $m \in \mathbb{R}$.

VI.14. Determinați a real astfel încît sistemul:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ ax + y = 0 \end{cases}$$

să aibă soluții diferite de soluția $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

R. Ținînd cont de rezultatul de la exercițiul anterior, trebuie ca: $\frac{2}{a} = \frac{-3}{1}$, de unde rezultă $a = -\frac{2}{3}$. Altă soluție: reducînd pe y, obținem $(3a + 2)x = 0$, ecuație care are soluții nenule dacă $3a + 2 = 0$.

VI.15. Rezolvați sistemele:

a) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+4} = \dfrac{y+1}{y-1} \\ 3x - 5y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{y+1}{y-1} \\ 2x - 3y = -5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 3x + y + 4z = 0 \\ 2x + 4y - 3z = 9 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x + 3y - 4z = 5 \\ 3x + 5y + 6z = 8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{2x}{3} = \dfrac{3y}{4} = \dfrac{4z}{5} \\ 2x + 3y + 4z = 144. \end{cases}$

R. a) Se impun condițiile: $x + 4 \neq 0$ și $y - 1 \neq 0$ sau $x \neq -4$ și $y \neq 1$. În aceste condiții obținem sistemul

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3 = 0 \\ 3x - 5y + 5 = 0, \end{cases} \quad \text{cu soluția } \left(-\frac{25}{16}, \frac{1}{16}\right)$$

care este și soluția sistemului inițial.

b) În condițiile: $x + 1 \neq 0$ și $y - 1 \neq 0$, adică $x \neq -1$ și $y \neq 1$, prima ecuație a sistemului devine succesiv: $(x - 1)(y - 1) = (x + 1)(y + 1)$; $2x + 2y = 0$; $x = -y$. Sistemul: $\begin{cases} x = -y \\ 2x - 3y = -5 \end{cases}$ este satisfăcut pentru $x = -1$ și $y = 1$, adică exact valorile neadmise. Deci sistemul inițial nu are soluții.

c) Înmulțind, de exemplu, prima ecuație cu -2, și însumînd-o cu ecuația a treia, „reducem" pe x și y și obținem $-z = 1$. Deci $z = -1$. Înlocuind în primele ecuații z cu -1, obţinem sistemul în x şi y: $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$ care este satisfăcut pentru $x = 1$ şi $y = 1$. Deci $(1, 1, -1)$ este soluţia sistemului iniţial.

d) Înmulţind, de exemplu, prima ecuaţie cu -2 şi adunînd-o la a doua, reducem pe x şi z şi obţinem: $y = 1$. Ultimele două ecuaţii conduc pentru $y = 1$ la sistemul în x şi z: $\begin{cases} 2x + 4z = 2 \\ x + 6z = 3 \end{cases}$ cu o infinitate de soluţii de forma $(1 - 2a, a)$, $a \in \mathbb{R}$. Deci soluţiile sistemului iniţial sînt $(1 - 2a, 1, a)$, $a \in \mathbb{R}$.

e) Aplicăm proprietatea şirului de rapoarte şi obţinem:

$$\frac{2x}{3} = \frac{3y}{4} = \frac{4z}{5} = \frac{2x + 3y + 4z}{12} = \frac{144}{1} = 12,$$

unde am ţinut cont de ultima ecuaţie a sistemului. Soluţiile rezultă imediat.

$$\frac{2x}{3} = 12 \text{ implică } x = 18, \ \frac{3y}{4} = 12 \text{ implică } y = 16 \text{ şi } \frac{4z}{5} = 12 \text{ de unde } z = 15.$$

Deci $(18, 16, 15)$ este soluţia unică a sistemului.

VI.16. Rezolvaţi sistemele a, b, c, fiind numere reale oarecare:

a) $\begin{cases} ax - by = a^2 - b^2 \\ bx - ay = 0 \end{cases}$, $a \neq \pm b$, $a \neq 0$ b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ ax + by = c \end{cases}$, $a \neq b$

c) $\begin{cases} ax + by = a \\ bx + ay = b \end{cases}$, $a \neq \pm b$, $a \neq 0$ d) $\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1 \\ ax + by = a^2 \end{cases}$ $a \neq 0$, $b \neq 0$

e) $\begin{cases} x + ay = 2 \\ \dfrac{1}{2} x - \dfrac{a}{2} y = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x + y - 3z = -1 \\ ax - 2y + 3z = 1 \\ -2x - y = -2, \end{cases}$ $a \neq -4$

g) $\begin{cases} x + y + z = 3a \\ x + (1 + a) y + z = a(a + 3), \\ x + (1 + b) z = a(b + 2), \end{cases}$ $a \neq 0$, $b \neq 0$

h) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + (1 + a) y + (1 + b) z = 0 \\ x + (1 - b) y + (1 + a) z = 0, \end{cases}$ $a \neq 0$, $b \neq 0$

i) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + (a + 1) y = 0 \\ x + 2y + (a + 1) z = 0 \end{cases}$ j) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d, \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$ $a \neq b \neq c \neq a$

R. a) Ecuaţia a doua devine $x = \frac{a}{b} y$. Substituind pe x în prima ecuaţie, obţinem

$$\frac{a^2}{b} y - by = a^2 - b^2 \text{ sau } (a^2 - b^2) y = a^2b - b^3 \text{ sau } y = \frac{b(a^2 - b^2)}{a^2 - b^2} = b.$$

Rezultă că (a, b) este soluţia sistemului.

b) Din prima ecuaţie $x = 1 - y$. Ecuaţia a doua conduce la $a(1 - y) + by = c$ sau $(b - a) y = c - a$ sau $y = \frac{a - c}{a - b}$. Rezultă şi $x = \frac{c - b}{a - b}$.

c) Procedînd, de exemplu, prin metoda reducerii, înmulţind prima ecuaţie cu $-b$, a doua ecuaţie cu a şi însumînd cele două ecuaţii obţinem: $y(a^2 - b^2) = 0$ sau $y = 0$. Rezultă apoi $x = 1$.

Deci în condiţiile date se obţin soluţii independente de a şi b.

d) Sistemul este echivalent cu sistemul $\begin{cases} bx + ay = ab \\ ax + by = a^2 \end{cases}$. Procedînd ca la exerciţiul precedent obţinem $y(a^2 - b^2) = a^2b - a^2b$ sau $y = 0$. La fel obţinem: $x(a^2 - b^2) = a^3 - ab^2$, de unde $x = \frac{a(a^2 - b^2)}{a^2 - b^2} = a$ Deci $(a, 0)$ este soluţia sistemului.

e) Sistemul este echivalent cu sistemul $\begin{cases} x + ay = 2 \\ x - ay = 2 \end{cases}$. Adunînd ecuaţiile obţinem $2x = 4$, deci $x = 2$. Rezultă apoi imediat $y = 0$.

f) Adunăm prima ecuaţie cu a treia şi obţinem $z = 1$, $x = \frac{2}{a + 4}$ şi $y = \frac{4 + 2a}{a + 4}$ rezultă, de exemplu, din sistemul $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ ax - 2y = -2. \end{cases}$

g) Înmulţim prima ecuaţie cu -1 şi o adunăm cu a doua. Obţinem: $ay = a^2$, de unde $y = a$. Punînd $y = a$ formăm cu prima şi a treia ecuaţie sistemul în x şi z: $\begin{cases} x + z = 2a \\ x + (1 + b)z = a(b + 2) \end{cases}$. Scăzînd ecuaţiile, rezultă $bz = ab$, deci $z = a$ şi apoi $x = a$.

h) Scădem prima ecuaţie din celelalte şi obţinem sistemul în y şi z:

$$\begin{cases} ay + bz = 0 \\ -by + az = 0. \end{cases} \text{ cu soluţia } y = 0,\ z = 0.$$

Din prima ecuaţie rezultă şi $x = 0$.

i) Ca la exerciţiul precedent scădem prima ecuaţie din celelalte. Sistemul obţinut $\begin{cases} ay - z = 0 \\ y + az = 0 \end{cases}$ are soluţia $y = 0$ şi $z = 0$. Din prima ecuaţie a sistemului rezultă şi $x = 0$.

j) Înmulţim prima ecuaţie cu $-a$ şi o adunăm la a doua. Obţinem: $(b - a)y + (c - a)z = d - a$ (1). Înmulţim prima ecuaţie cu $-a^2$, o adunăm la a treia şi obţinem: $(b^2 - a^2) y + (c^2 - a^2)z = d^2 - a^2$ (2). (1) şi (2) formează un sistem în y şi z. Înmulţim ecuaţia (1) cu $-(a + b)$ şi-o adunăm cu (2). Rezultă: $z[c^2 - a^2 - (a + b)(c - a)] = d^2 - a^2 - (a + b)(d - a)$ sau $z(c - a)(c - b) = (d - a)(d - b)$. Deci $z = \frac{(d - a)(d - b)}{(c - a)(c - b)}$. Înlocuind z în (2) rezultă $y = \frac{(d - a)(a - c)}{(b - a)(b - c)}$. Rezultă apoi $x = \frac{(d - b)(d - a)}{(a - b)(a - c)}$.

VI.17. **Rezolvați sistemul:**

a) $\begin{cases} mx - y = 5 \\ 2x + y = 1, \end{cases}$

m fiind un număr real oarecare și evidențiați toate situațiile care există. Procedați la fel cu sistemele:

b) $\begin{cases} x - (m+1)y = 0 \\ 3x + my = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x + my = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (m-2)x - 3y = 5 \\ -mx + 3y = 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x - 3y = m^2 + 1 \\ x - 4y = m^2 - 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + 4y = 0 \\ 2x - my = 0 \end{cases}$ g) $\begin{cases} mx + 6y = m + 5 \\ m^2x + 4y = m^2 - m + 45 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ x - m^2y + z = 0 \\ 2x + 2y - 5z = 2 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ x + y + mz = 0. \end{cases}$

R. a) Adunînd ecuațiile rezultă $(m+2)x = 6$. Deci, pentru $m = -2$ sistemul nu are soluții, iar pentru $m \neq -2$ are soluția unică: $x = \dfrac{6}{m+2}$ și $y = \dfrac{m-10}{m+2}$.

b) Înmulțim prima ecuație cu -3 și o adunăm cu a doua. Rezultă $(4m+3)y = 6$. Deci pentru $m = -\dfrac{3}{4}$ sistemul nu are soluții, iar pentru $m \neq -\dfrac{3}{4}$, sistemul are soluția unică: $y = \dfrac{6}{4m+3}$, $x = \dfrac{6(m+1)}{4m+3}$.

c) „Reducînd" x, rezultă: $(m+2)y = 4$. Deci pentru $m = -2$ sistemul nu are soluții, iar pentru $m \neq -2$ sistemul are soluția unică: $x = \dfrac{m+6}{2(m+2)}$ $y = \dfrac{4}{m+2}$.

d) Reducem pe y și obținem: $-2x = 6$, $x = -3$. Rezultă, apoi $y = \dfrac{1-3m}{3}$. Deci oricare ar fi m sistemul are soluție unică.

e) Rezultă $y = 2$ și $x = m^2 + 7$, sistemul este compatibil determinat oricare-ar fi m real.

f) Înmulțim prima ecuație cu -2 și o adunăm cu a doua. Rezultă $(m+8)y = 0$. Rezultă că pentru $m \neq -8$ sistemul are soluția $(0,0)$, iar pentru $m = -8$ sistemul are o infinitate de soluții diferite de soluția banală de forma $(a, -4a)$, $a \in \mathbb{R}^*$.

g) Înmulțim prima ecuație cu -5, a doua cu 6 și le adunăm. Obținem: $(6m^2 - 5m)x = 6m^2 - 11m + 5$. Sînt mai multe situații: I. $m \neq 0$ și $m \neq \dfrac{5}{6}$. sistemul are soluție unică: $x = \dfrac{m-1}{m}$, $y = 1$.

II. Pentru $m = 0$ sistemul nu are soluții.

III. Pentru $m = \frac{5}{6}$ sistemul are o infinitate de soluții.

h) Înmulțim, de exemplu ecuația (1) cu (-1) și-o adunăm cu a II-a, respectiv a III-a. Obținem: $(m-1)y = m - 1$, respectiv $(m-1)z = m^2 - 1$. Rezultă că pentru $m \neq 1$ sistemul are soluție unică: $(-1-m, 1, m+1)$, $m \in \mathbb{R}$. Pentru $m = 1$ sistemul are o infinitate de soluții care se obțin, de exemplu, după formula $(a, b, 1-a-b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, deoarece toate ecuațiile sistemului coincid (devin $x + y + z = 1$).

i) Înmulțim, de exemplu, prima ecuație cu -2 și o adunăm cu a treia. Obținem: $z = 0$. x, y rezultă din sistemul: $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - m^2 y = 0 \end{cases}$. Scăzînd cele două ecuații rezultă $(1 + m^2)\, y = 1$, deci $y = \frac{1}{m^2+1}$ și $x = \frac{m^2}{m^2+1}$.

j) Înmulțim prima ecuație cu -1 și o adunăm la ecuația a II-a și respectiv cu ecuația a III-a. Rezultă: $(m-1)y = 0$, respectiv $(m-1)z = 0$. Deci pentru $m \neq 1$ sistemul are soluția banală $(0,0,0)$, iar pentru $m \neq 1$ sistemul are și soluții nebanale, obținute după formulele: $(a, b, -a-b)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

VI.18. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi sistemele următoare, m fiind un număr întreg oarecare:

a) $\begin{cases} 2x + y = 2 - m \\ x + 2y = 1 + m \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + y = -m^2 - 1 \\ 4x + y = 1 - m^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + my = 0 \\ 2x + 3m^2y = m^2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x - my = m^2 + 2 \\ 2x - y = m + 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} mx - my = 2 \\ m^2x - m^2y = 2m. \end{cases}$

R. a) Înmulțim, de exemplu, ecuația a doua cu -2 și o adunăm cu prima obținem $-3y = -3m$, deci $y = m$. Rezultă și $x = 1 - m$.

Deci soluția sistemului este $(1 - m, m)$, $m \in \mathbb{Z}$.

b) Reducînd y obținem: $x = -2$ și apoi, $y = -m^2 + 9$.

Deci $(-2, -m^2 + 9)$, $m \in \mathbb{Z}$ este soluție în numere întregi.

c) Reducem, de exemplu x și obținem: $m^2y = m^2$.

Deci: I. $m \neq 0$ $y = 1$ și $x = -m^2$, $m \in \mathbb{Z}$ și II. $m = 0$, sistemul are soluția: $(0, a)$, $a \in \mathbb{Z}$.

d) Reducem pe x. Obținem: $(2 - m)\, y = m^2 - 2m$. Rezultă că pentru $m \neq 2$ sistemul are soluția $\left(\frac{1}{2}, -m\right)$ care nu este în mulțimea numerelor întregi. Pentru $m = 2$ sistemul este nedeterminat cu soluțiile $(x, 2x + 3)$, $x \in \mathbb{Z}$.

e) Obținem: $2m^2x = 2m$. Pentru $m \neq 0$, sistemul are soluția $\left(1, \frac{m-2}{m}\right)$. În mulțimea numerelor întregi se exprimă ca $\frac{m-2}{m} \in \mathbb{Z}$ sau $1 - \frac{2}{m} \in \mathbb{Z}$. De unde rezultă $m \in \{-2, -1, 1, 2\}$.

VI. 19. Rezolvați următoarele sisteme, reductibile la sisteme liniare:

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=0{,}7 \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{y}=3{,}1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{y}=5 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{y}=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{y}=-4 \\ -\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{9}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=2 \\ \dfrac{18}{x^2}+\dfrac{25}{y^2}=27 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{2}{3x^2}+\dfrac{5}{3y^2}=1 \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{y^2}=1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 6\sqrt{x}-5\sqrt{y}=7 \\ 3\sqrt{x}+2\sqrt{y}=8 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3\sqrt{x}+2\sqrt{y}=1 \\ 4\sqrt{x}+3\sqrt{y}=1 \end{cases}$ h) $\begin{cases} |x|+3y=1 \\ 2|x|+y=3 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2|x|-3|y|=0 \\ \dfrac{|x|}{3}+\dfrac{|y|}{2}=2 \end{cases}$ j) $\begin{cases} 7|x|-3|y|=10 \\ 4|x|+3|y|=1. \end{cases}$

R. a) Notăm $\dfrac{1}{x}=a$ și $\dfrac{1}{y}=b$, sistemul se reduce la sistemul liniar: $\begin{cases} a+b=0{,}7 \\ 3a+5b=3{,}1 \end{cases}$ cu soluția: $a=0{,}2$, $b=0{,}5$. Revenind la notațiile făcute, rezultă $\dfrac{1}{x}=0{,}2$ și $\dfrac{1}{y}=0{,}5$, deci $y=5$ și $y=2$.

b) Cu notațiile $\dfrac{1}{x}=a$ și $\dfrac{1}{y}=b$, rezultă sistemul liniar: $\begin{cases} 5a-3b=5 \\ a-3b=1 \end{cases}$ cu soluția $a=1$ și $b=0$. Revenind la notații rezultă: $x=1$ și nici o valoare pentru y. Deci sistemul nu are soluții.

c) Analog se obține sistemul liniar $\begin{cases} 3a-2b=-4 \\ -2a+b=2 \end{cases}$ cu soluția: $a=0$ și $b=2$. Dacă $a=0$, ținînd cont de notații, rezultă că nu există x, deci sistemul este incompatibil.

d) $a=\dfrac{1}{x^2}$ și $b=\dfrac{1}{y^2}$ implică $\begin{cases} 9a+b=2 \\ 18a+25b=27 \end{cases}$ cu $a=\dfrac{1}{9}$, $b=1$. Rezultă $x^2=9$ și $y^2=1$. Deci sistemul are soluțiile: $(3,1)$; $(-3,1)$; $(3,-1)$; $(-3,-1)$.

e) Analog se obține sistemul liniar $\begin{cases} \frac{2}{3}a + \frac{5}{3}b = 1 \\ a + 2b = 1 \end{cases}$ cu $a = -1$, $b = 1$, Dacă $a = -1$, rezultă $x^2 = -1$, ecuație fără soluții în mulțimea $\mathbb{R}$. Deci sistemul nu are soluții.

f) Notînd $\sqrt{x} = a$ și $\sqrt{y} = b$ obținem sistemul liniar: $\begin{cases} 6a - 5b = 7 \\ 3a + 2b = 8 \end{cases}$ cu $a = 2$ și $b = 1$. Deci $\sqrt{x} = 2$ și $\sqrt{y} = 1$. Rezultă că sistemul are soluția: (4, 1).

g) Analog $\sqrt{x} = a$ și $\sqrt{x} = b$ implică: $\begin{cases} 3a + 2b = 1 \\ 4a + 3b = 1 \end{cases}$ cu $a = 1$, $b = -1$. Deci: $\sqrt{y} = -1$, ecuație fără soluție în $\mathbb{R}$. Sistemul este incompatibil.

h) $|x| = a$ și $y = b$ implică sistemul liniar: $\begin{cases} a + 3b = 1 \\ 2a + b = 3 \end{cases}$ cu $a = \frac{8}{5}$, $b = -\frac{1}{5}$.

$|x| = a$ implică, deci $|x| = \frac{8}{5}$, de unde $x_1 = \frac{8}{5}$ și $x_2 = -\frac{8}{5}$. Rezultă soluțiile $\left(-\frac{8}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ și $\left(\frac{8}{5}, -\frac{1}{5}\right)$.

i) $|x| = a$, $|y| = b$ implică: $\begin{cases} 2a - 3b = 0 \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 2 \end{cases}$ sistem incompatibil.

j) Analog, se obține: $\begin{cases} 7a - 3b = 10 \\ 4a + 3b = 1 \end{cases}$ cu $a = 1$ și $b = -1$. Cum $b = |y| = -1$ și $|x| \geqslant 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ rezultă că sistemul nu are soluții.

VI.20. Determinați valorile lui a reale pentru care sistemele următoare au soluții:

a) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = 0 \\ \frac{1}{2x} + \frac{a}{y} = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{a}{x} - \frac{3}{y} = 0 \\ \frac{1}{3x} + \frac{a}{y} = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4|x| - |y| = a \\ 7|x| - 2|y| = 2a \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2|x| + |y| = a \\ 5|x| + 3|y| = 6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = a \\ 4\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 7 \end{cases}$ f) $\begin{cases} a|x| - |y| = 3 \\ 2|x| + |y| = 5 \end{cases}$

R. a) Dacă $a = -1$ sistemul are o infinitate de soluții. Dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ sistemul este imposibil.

b) Pentru orice $a \in \mathbb{R}$ sistemul este imposibil.

c) Sistemul admite soluţii date de $|x| = 0$ şi $|y| = -a$ deci $-a \geqslant 0$ de unde $a \leqslant 0$.

d) Sistemul admite soluţii date de:

$$|x| = 3a - 6 \text{ şi } |y| = -5a + 12 \text{ deci}$$

$$3a - 6 \geqslant 0 \text{ şi } -5a + 12 \geqslant 0 \quad \text{de unde } 2 \leqslant a \leqslant \frac{12}{5}.$$

e) Sistemul admite soluţii date de:

$\sqrt{x} = 3a - 14$ şi $\sqrt{y} = -4a + 21$. Deoarece $\sqrt{x}, \sqrt{y} \geqslant 0$ rezultă că $3a - 14 \geqslant 0$ şi $-4a + 21 \geqslant 0$ adică $a \in \left[\frac{14}{3}, \frac{21}{4}\right]$.

f) Sistemul admite soluţii date de:

$$|x| = \frac{7}{a+2} \text{ şi } |y| = \frac{4a-6}{a+2} \text{ unde } a \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}.$$

Deci $\dfrac{7}{a+2} > 0$ şi $\dfrac{4a-6}{a+2} \geqslant 0$ de unde avem că: $a \geqslant \dfrac{3}{2}$.

Dacă $a = -2$ sistemul este imposibil.

VI.21. Pe întreagă întindere a luncii iarba creşte uniform şi la fel de repede. Ştiind că 70 de vaci ar putea paşte această iarbă în 24 de zile, iar 30 de vaci, în 60 de zile, cîte vaci ar fi păscut iarba de pe luncă în 96 de zile?

R. Vom nota cu x creşterea cantităţii de iarbă în 24 de ore. Deci, dacă în 24 de ore creşte o cantitate de iarbă egală cu x, în 24 de zile această creştere va fi egală cu $24\,x$. Notînd cu 1 cantitatea totală de iarbă existentă pe luncă la momentul iniţial, rezultă că în 24 de zile vacile vor paşte $1 + 24\,x$, În 24 de ore, întreaga cireadă (compusă din 70 de vaci) va paşte $\dfrac{1 + 24\,x}{24}$ iar o singură vacă va paşte $\dfrac{1 + 24\,x}{24 \cdot 70}$.

Raţionînd analog, putem demonstra că, dacă 30 de vaci ar fi păscut, iarba din aceeaşi luncă în 60 de zile, o vacă paşte într-o zi $\dfrac{1 + 60x}{30 \cdot 60}$.

Dar cantitatea de iarbă pe care o vacă o paşte într-o zi este aceeaşi în cazul ambelor cirezi. Deci vom avea:

$$\frac{1 + 24x}{24 \cdot 70} = \frac{1 + 60x}{30 \cdot 60}$$

de unde $x = \dfrac{1}{180}$.

Aflîndu-l pe x (creşterea cantităţii de iarbă în 24 de ore), este uşor să determinăm a cîta parte din cantitatea iniţială de iarbă paşte o vacă într-o zi

$$\frac{1 + 24x}{24 \cdot 70} = \frac{1 + 24 \cdot \frac{1}{480}}{24 \cdot 70} = \frac{1}{1600}.$$

Dacă notăm cu y numărul vacilor care ar fi putut paşte întreaga iarbă de pe luncă în 96 de zile, rezultă că:

$$\frac{1 + 96 \cdot \frac{1}{480}}{96y} = \frac{1}{1600},$$

de unde $y = 20$.

Aşadar, 20 de vaci ar fi putut paşte iarba în 96 de zile.

VI.22. Dacă din triplul unui număr scădem sfertul său obţinem 77. Să se determine numărul.

R. Fie x numărul căutat. Avem, aşadar, ecuaţia $3x - \frac{x}{4} = 77$, de unde $12x - x = 4 \cdot 77$ sau $x = \frac{4 \cdot 77}{11} = 28$.

VI.23. Un automobil a parcurs distanţa dintre două oraşe mergînd cu o viteză de 60 km pe oră; la întoarcere, însă, a mers cu 40 km pe oră. Care a fost viteza medie a automobilului?

R. Viteza medie este necunoscuta x din ecuaţia:

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{60} + \frac{1}{40},$$

adică $x = 48$ km/h.

VI.24. Să se afle toate numerele naturale de trei cifre scrise în baza 10 ştiind că fiecare dintre ele îndeplineşte următoarele condiţii:

a) este divizibil cu 2 şi nu este divizibil cu 5;

b) are cifra zecilor 3;

c) dacă se adună cu inversatul (răsturnatul) său se obţine 666.

R. Fie $\overline{xyz}$ unul din numerele căutate. Potrivit condiţiei a), z este par şi diferit de 0 (căci numerele divizibile cu 5 se termină sau în 0 sau în 5). Potrivit condiţiei b), $y = 3$, iar potrivit condiţiei c):

$$\overline{xyz} + \overline{zyx} = 666$$

adică, deoarece $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$:

$$(100x + 10y + z) + (100z + 10y + x) = 666$$

deci, cum $y = 3$:

$$101x + 101z + 20 \cdot 3 = 666$$

adică:

$$101\,(x + z) = 666 - 60 = 606,$$

de unde $x + z = 6$. Cum z este par şi nenul avem situaţiile $z=2$, $x=4$, $z=4$, $x=2$ (cazul $x=0$ îl excludem). Deci numerele căutate sînt 234, 432.

VI.25 O persoană cheltuieşte o dată cu 4 lei mai puţin decît 3/5 din ceea ce are, altă dată 1/4 din rest plus 3 lei, iar apoi 2/5 din noul rest plus 1,20 lei, şi i-au mai rămas 24 lei. Ce sumă a avut şi cît a cheltuit de fiecare dată?

R. Fie x suma avută, Prima cheltuială este $\frac{3x}{5} - 4$, iar primul rest, $x - \left(\frac{3x}{5} - 4\right) = \frac{2x}{5} + 4$.

A doua cheltuială este egală cu $\frac{1}{4}\left(\frac{2x}{5} + 4\right) + 3 = \frac{x}{10} + 4$, iar al doilea rest:

$$x - \left[\left(\frac{3x}{5} - 4\right) + \left(\frac{x}{10} + 4\right)\right] = \frac{3x}{10}.$$

A treia cheltuială este $\frac{2}{5} \cdot \frac{3x}{10} + 1{,}20 = \frac{3x}{25} + 1{,}20$ iar noul rest:

$$x - \left[\left(\frac{3x}{5} - 4\right) + \left(\frac{x}{10} + 4\right) + \left(\frac{3x}{25} + 1{,}20\right)\right] = \frac{9x}{50} - 1{,}2.$$

Aşadar:

$$\frac{9x}{50} - 1{,}2 = 24$$

de unde $x = 140$ lei. Cele trei cheltuieli sînt: a) $\frac{3 \cdot 140}{5} - 4 = 80$ lei; b) $\frac{140}{10} + 4 = 18$ lei; c) $\frac{3 \cdot 140}{25} + 1{,}20 = 18$ lei.

VI.26. Este posibil să cheltuim suma totală de 451 lei cumpărînd 20 de mingi dintre care unele cu 7 lei bucata şi altele cu 3 lei bucata?

R. Fie x numărul mingilor de 7 lei. Atunci numărul mingilor de 3 lei bucata este $20 - x$, Costul mingilor de 7 lei bucata este $(7x)$ lei, iar al celor de 3 lei bucata $3 \cdot (20 - x)$ lei. Aşadar:

$$7x + 3(20 - x) = 451$$

de unde $x = \frac{391}{4}$; cum x trebuie să fie natural, răspunsul la întrebarea din enunţ este negativ.

VI.27. O cooperativă agricolă de producţie trebuie să semene, conform planului, cîte 40 ha pe zi. Depăşind norma, se lucrează în 3 zile 156 ha. Lucrînd în acelaşi ritm, cooperativa termină semnănatul cu 2 zile înainte şi realizează cu 4 ha mai mult decît era prevăzut în plan. Cîte hectare a semănat cooperativa?

R. Alegem ca necunoscută a problemei numărul de hectare ce trebuie semănate conform planului şi îl notăm cu y. Deoarece trebuia să semene cîte 40 ha pe zi, numărul de zile prevăzute în plan este $\frac{y}{40}$. Lucrîndu-se însă cîte 52 ha zilnic, iar numărul de hectare fiind $y + 4$, urmează cu numărul de zile lucrate este $\frac{y + 4}{52}$ şi reprezintă cu două zile mai puţin decît numărul de zile prevăzut în plan. Ecuaţia problemei va fi:

$$\frac{y + 4}{5} = \frac{y}{40} - 2$$

de unde $y = 360$ ha.

Deci numărul de hectare semănate este $360 + 4 = 364$.

Problema mai poate fi rezolvată şi astfel: fie x numărul de zile în care trebuia terminată lucrarea, conform planului. În acest timp, numărul de hectare lucrate trebuiau să fie $40x$. În realitate s-au lucrat în trei zile 156 ha, ceea ce revine la 52 ha zilnic, iar lucrul s-a terminat în $(x - 2)$ zile. Prin urmare, au fost semănate $52(x-2)$ ha şi astfel planul a fost depăşit cu 4 ha. Aşadar, ecuaţia problemei este:

$$52(x - 2) = 40x + 4$$

cu soluţia $x = 9$.

Aşadar, numărul de hectare semănate a fost $40 \cdot 9 + 4 = 364$ ha.

VI.28. Suma a trei numere este 28. Primul este de 3 ori mai mare decît al doilea, iar diferenţa dintre al doilea şi al treilea este 12. Găsiţi numerele.

R. Fie y al doilea număr. Atunci primul este egal cu $3y$, iar al treilea este egal cu $y - 12$. Suma tuturor celor 3 numere este $3y + y + y - 12 = 5y - 12$.

Obţinem, aşadar, ecuaţia $5y - 12 = 28$, de unde $5y = 12 + 28$, deci $y = \frac{40}{5} = 8$.

Primul număr este, aşadar, $3 \cdot 8 = 24$, iar al treilea este $8 - 12 = -4$.

VI.29. Suma lungimilor bazelor unui trapez este 32 cm, iar diferenţa acestor lungimi este 16 cm. Cunoscînd că înălţimea trapezului este 8 cm, să se determine bazele şi aria sa.

R. Fie y lungimea bazei mici a trapezului. Atunci lungimea bazei mari este, potrivit enunţului, $y + 16$. Cum suma lungimilor bazelor este 32 cum rezultă ecuaţia:

$$y + (y + 16) = 32$$

de unde $2y + 16 = 32$, deci $2y = 32 - 16 = 16$, adică $y = \frac{16}{2} = 8$ (cm). Aşadar, aria trapezului este:

$$\mathcal{A} = \frac{(24 + 8) \cdot 8}{2} \text{ cm}^2 = 128 \text{ cm}^2.$$

VI.30. Mihai îi zice lui Petre: „Dacă îmi dai un leu din banii tăi voi avea de două ori mai mulţi bani decît vei avea tu". Petre îi spune lui Mihai: „Dacă îmi dai tu 5 lei, voi avea cît vei avea tu".

Ce sumă are Petre şi ce sumă are Mihai?

R. Fie x suma pe care o are Mihai. În ipoteza în care Mihai îi dă lui Petre 5 lei, el rămîne cu suma egală cu $x - 5$. Prin aceasta, suma pe care o are Petre se va mări cu 5 lei, deci Petre are cu 12 lei mai puţin decît Mihai, adică suma $x - 10$.

$$x + 1 = 2(x - 10 - 1)$$

de unde $x = 23$, Petre are 23 lei $-$ 10 lei $=$ 13 lei.

VI.31. Suma a două numere este 150. Dacă îl împărţim pe primul la al doilea obţinem cîtul 4 şi restul 15. Să se afle numerele.

R. Fie x al doilea număr. Potrivit teoremei împărţirii numerelor întregi primul număr este egal cu $4x + 15$. Suma lor devine $(4x + 15) + x = 5x + 15$, deci $5x + 15 = 150$, de unde $x = 27$. Primul număr va fi atunci $4 \cdot 27 + 15 = 123$.

CAPITOLUL VII

ECUAȚIA DE GRADUL AL II-LEA

VII.1. Verificați dacă numerele: -1; $-\frac{1}{2}$; 0; 1; $\sqrt{2}$; $\frac{1}{2}$ sînt soluții ale ecuației $2x^2 - x - 1 = 0$.

R. Înlocuind x cu -1 obținem $2(-1)^2 - (-1) - 1 = 2 + 1 - 1 = 2$, deci -1 nu este soluție. $2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = 0$, deci $-\frac{1}{2}$ este soluție. La fel deducem că 1 este soluție, iar 0, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}$ nu sînt soluții.

VII.2. Determinați m real astfel încît $\sqrt{2}$ să fie soluție a ecuației $x^2 - mx - 4 = 0$. Aceeași cerință pentru numerele: -1; 0; $1 + \sqrt{5}$; $\sqrt{3} - 1$; -2; $1 - \sqrt{2}$.

R. $\sqrt{2}$ este soluție a ecuației $x^2 - mx - 4 = 0$ dacă $(\sqrt{2})^2 - m\sqrt{2} - 4 = 0$, deci pentru $m = -\frac{2}{\sqrt{2}}$ sau $m = -\sqrt{2}$. -1 este soluție pentru $m = 3$, 0 nu este soluție pentru orice m, $1 + \sqrt{5}$ este soluție pentru $m = 2$, $\sqrt{3} - 1$ este soluție pentru $m = 3 + \sqrt{3}$, -2 este soluție pentru $m = 0$ și $1 - \sqrt{2}$ este soluție pentru $m = 5 + 3\sqrt{2}$.

VII.3. Determinați m și n astfel încît perechile de numere: -3 și 2, -7 și 7, $-\sqrt{3}$ și $\sqrt{3}$, 5 și 5, 0 și 5, $1 - \sqrt{2}$ și $1 + \sqrt{2}$ să fie soluții ale ecuațiilor:

a) $x^2 - mx + n = 0$, b) $mx^2 - x + n = 0$, c) $mx^2 + nx - 1 = 0$

R. a) -3 și 2 sînt soluții dacă propozițiile $(-3)^2 - m(-3) + n = 0$ și $2^2 - 2m + n = 0$ sînt simultan adevărate. Rezultă $m = -1$ și $n = -6$. La fel se obține $m = 0$ și $n = -49$, $m = 0$ și $n = -3$, $m = 10$ și $n = 25$, $m = 5$ și $n = 0$, $m = 2$ și $n = -1$. Pentru celelalte ecuații se procedează analog.

VII.4. Arătați că o ecuație de gradul al doilea admite cel mult două soluții reale distincte.

R. Într-adevăr sînt ecuații fără soluții reale de exemplu $x^2 + 1 = 0$, deoarece $x^2 + 1 > 0$ pentru orice x real. Ecuația $x^2 - 2x + 1 = 0$, sau echivalent $(x - 1)^2 = 0$, de unde rezultă singura soluție $x = 1$. În general, dacă polinomul $P(X) = aX^2 + bX + c$, $a \neq 0$ care nu este un

pătrat, admite rădăcina x_1, atunci conform teoremei lui Bézout se divide cu $X - x_1$, deci se scrie $P(X) = a(X - x_1)\,Q(X)$, unde Q este un polinom de gradul I care are o rădăcină reală x_2, deci P are două rădăcini distincte x_1, x_2. Presupunem că $P(X) = aX^2 + bX + c$, $a \neq 0$ are trei rădăcini distincte x_1, x_2, x_3. Atunci sistemul $P(x_1) = P(x_2) = P(x_3) = 0$ în a, b, c conduce la soluția banală $a = b = c = 0$. Contradicție. Deci, o ecuație de gradul al doilea admite cel mult două soluții distincte.

VII.5. Determinați condiția necesară și suficientă ca două ecuații $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ și $a'x^2 + b'x + c' = 0$, $a' \neq 0$ să aibă o soluție comună. Există mai multe ecuații care să aibă aceleași soluții?

R. Fie r soluția comună. Avem $ar^2 + br + c = 0$ și $a'r^2 + b'r + c' = 0$. Eliminăm r^2 din aceste relații. $a'ar^2 + a'br + ca' = 0$ și $aa'r^2 + ab'r + ac' = 0$ care prin scădere dau $(a'b - ab')r + (ca' - ac') = 0$ sau $r = (-a'c + ac'):(ba' - ab')$ în ipoteza $a'b - ab' \neq 0$. Cum $f(r) = 0$ rezultă:

$$a\left(\frac{ac' - a'c}{a'b - ab'}\right)^2 + b\left(\frac{ac' - a'c}{a'b - ab'}\right) + c = 0 \text{ sau}$$

$(ac' - a'c)^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c) = 0$ care reprezintă condiția căutată. Dacă $a'b - ab' = 0$ atunci și $ca' - ac' = 0$ și relația este deasemenea verificată. Ecuațiile $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ și $k(ax^2 + bx + c) = 0$ $k \neq 0$, au aceleași rădăcini. Deci $a'x^2 + b'x + c = 0$, $a' \neq 0$ și $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ au aceleași rădăcini dacă $a' = ka$, $b' = kb$, $c' = kc$, adică dacă coeficienții ecuațiilor sînt proporționali. Reciproc, dacă ecuațiile $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ și $a'x^2 + b'x + c' = 0$, $a' \neq 0$ au rădăcini comune, relația obținută anterior $(a'b - ab')r + (ca' - ac') = 0$ adevărată pentru orice r soluție, implică $a'b - ab' = 0$ și $ca' - ac' = 0$, adică $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} = k$ sau $a' = ka$, $b' = kb$, $c' = kc$.

VII.6. Determinați soluțiile comune ale ecuațiilor.

a) $x^2 - 2 = 0$ și $x^2 + (1 - \sqrt{2})\,x - \sqrt{2} = 0$

b) $x^2 - 5x + 4 = 0$ și $2x^2 - x - 1 = 0$

c) $2x^2 - 3x + 1 = 0$ și $2x^2 + 3x - 1 = 0$

R. a) Aplicînd rezultatul de la exercițiul VII.5 obținem soluția comună

$$r = \frac{1\cdot(-\sqrt{2}) - 1(-2)}{1(-1 + \sqrt{2}) + 1\cdot 0} = \frac{2 - \sqrt{2}}{-1 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}{-1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2}\,.$$

Altă metodă: Soluția comună va fi rădăcina divizorului comun al polinoamelor $X^2 - 2$ și $X^2 + (1 - \sqrt{2})\,X - \sqrt{2} = 0$. Avem: $X^2 - 2 = (X - \sqrt{2})\cdot(X + \sqrt{2})$ și $X(X - \sqrt{2}) + (X - \sqrt{2}) = (X + 1)(X - \sqrt{2})$ deci c.m.m.d.c. este $X - \sqrt{2}$. Rezultă soluția comună $x = \sqrt{2}$.

b) Se procedează ca la exercițiul a) 1 este soluția comună.

c) Soluția comună este $\dfrac{1}{2}$.

VII.7. Determinați m și n astfel încît 1 să fie soluție comună a ecuațiilor: $mx^2 - 2x + n = 0$ și $x^2 + mx + 2n = 0$.

R. 1 este soluția comună a ecuațiilor dacă $m - 2 + n = 0$ și $1 + m + 2n = 0$, de unde rezultă $m = 5$ și $n = -3$.

VII.8. Rezolvați ecuațiile următoare știind că admit soluțiile date:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$, $x_1 = 2$

b) $2x^2 - 3x + 1 = 0$, $x_1 = 1$

c) $x^2 - 2x - 1 = 0,\qquad x_1 = 1 - \sqrt{2}$
d) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 2 = 0,\qquad x_1 = \sqrt{5} + \sqrt{3}$
e) $4x^2 - 4x + 1 = 0,\qquad x_1 = \frac{1}{2}$.

R. a) Dacă $x_1 = 2$ este soluţie, rezultă că $X - 2$ divide polinomul $X^2 - 5X + 6$. Avem $X^2 - 5X + 6 = (X - 2)(X - 3)$ Rezultă $x_2 = 3$ este cealaltă soluţie a ecuaţiei.

b) Ca la punctul precedent obţinem $x_2 = \frac{1}{2}$.

c) $x_2 = 1 + \sqrt{2}$ d) $x_2 = \sqrt{5} - \sqrt{3}$. e) $x_2 = x_1 = \frac{1}{2}$.

VII.9. Determinaţi ecuaţiile care admit soluţiile:
a -1 şi 5 , b) $3 - \sqrt{2}$ şi $3 + \sqrt{2}$, c) $-\frac{2}{3}$ şi 1 , d) -1 şi $+1$, e) $1 - \sqrt{2}$ şi $1 + \sqrt{2}$, f) 0 şi 3, g) 2 şi 2.

R. a) Dacă -1 este o soluţie a ecuaţiei $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, atunci $X + 1$ divide polinomul $aX^2 + bX + c$. La fel $X - 5$ divide $aX^2 + bX + c$. Deci $(X + 1)(X - 5)$ divide acelaşi polinom. Rezultă că ecuaţiile căutate sînt $a(x + 1)(x - 5) = 0$ sau $a(x^2 - 4x - 5) = 0$, $a \in \mathbb{R}^*$, b) $a(x^2 - 6x + 7) = 0$, c) $a(3x^2 - x - 2) = 0$, d) $a(x^2 - 2x - 1) = 0$, e) $a(x^2 - 1) = 0$, f) $ax(x - 3) = 0$, g) $a(x - 2)^2 = a(x^2 - 4x + 4) = 0$.

VII.10. Arătaţi că dacă o ecuaţie de gradul al doilea cu coeficienţi raţionali admite o soluţie de forma $m + \sqrt{n}$, $m \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{Q}$ şi $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$, atunci admite şi soluţia $m - \sqrt{n}$ (numită „conjugata lui $m + \sqrt{n}$”).

R. Dacă $m + \sqrt{n}$ este soluţie rezultă: $a(m + \sqrt{n})^2 + b(m + \sqrt{n}) + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$, sau $(am^2 + an + bm + c) + (2am + b)\sqrt{n} = 0$, de unde rezultă $am^2 + an + bm + c = 0$ şi $2am + b = 0$. Obţinem deci şi: $(am^2 + an + bm + c) - (2am + b)\sqrt{n} = 0$ ceea ce este echivalent cu $a(m - \sqrt{n})^2 + b(m - \sqrt{n}) + c = 0$, adică $m - \sqrt{n}$ este, de asemenea, soluţie a ecuaţiei $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

VII.11. Determinaţi ecuaţiile de gradul II cu coeficienţi raţionali care admit soluţiile:

a) $1 - \sqrt{5}$, b) $\sqrt{3}$; c) $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

R. a) Conform rezultatului de la exerciţiul precedent, $1 - \sqrt{5}$ soluţie implică şi $1 + \sqrt{5}$ soluţie şi deci ecuaţiile sînt $a(x - 1 + \sqrt{5})(x - 1 - \sqrt{5}) = 0$, sau
$a(x^2 - 2x - 4) = 0$ cu a raţional şi $a \neq 0$.
b) $a(x^2 - 3) = 0$, $a \neq 0$, c) $a(x^2 - x - 1) = 0$, $a \neq 0$.

VII.12. Determinaţi m şi n raţionali ştiind că ecuaţia $x^2 - mx + n = 0$ admite soluţiile:
a) $1 + \sqrt{2}$ b) $2 - \sqrt{3}$, c) $\sqrt{2}$.

R. a) Ecuaţiile care admit soluţia $1 + \sqrt{2}$ sînt
$a(x^2 - 2x - 1) = 0$, $a \in \mathbb{Q}$ $a \neq 0$: Rezultă $m = 2$ şi $n = -1$.
b) $m = 4$ şi $n = 1$, c) $m = 0$ şi $n = -2$.

VII.13. Arătaţi că soluţiile întregi ale unei ecuaţii cu coeficienţi întregi $ax^2 + bx + c = 0$, se găsesc printre divizorii termenului liber c.

R. Fie z o soluţie întreagă a ecuaţiei $ax^2 + bx + c = 0$ $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Avem: $az^2 + bz + c = 0$ sau $az^2 + bz = -c$ sau $z(az + b) = -c$ sau $az + b = -\frac{c}{z}$. $az + b \in \mathbb{Z}$ implică $\frac{c}{z} \in \mathbb{Z}$ de unde rezultă că z trebuie să fie un divizor al lui c.

Observaţie: Am presupus $z \neq 0$. Dacă $z = 0$ este soluţie atunci $c = 0$ şi afirmaţia rămîne valabilă.

VII.14. Rezolvaţi în mulţimea numerelor raţionale ecuaţiile:
a) $2x^2 - 5x + 3 = 0$, b) $3x^2 - x - 10 = 0$, c) $x^2 + x - 12 = 0$, d) $x^2 - 6x + 9 = 0$, e) $x^2 - 16 = 0$.

R. a). Căutăm soluţiile întregi ale ecuaţiei printre divizorii lui 3. Obţinem soluţie pe 1 şi împărţind polinomul $2X^2 - 5X + 3$ la $X - 1$ determinăm şi cealaltă soluţie ca rădăcină a cîtului $2X - 3$ obţinut. b) $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{5}{3}$, c) $x_1 = 3$, $x_2 = -4$, d) $x_1 = x_2 = 3$, e) $x_1 = -4$, $x_2 = 4$.

VII.15. Arătaţi că ecuaţiile următoare nu au soluţii în mulţimea numerelor întregi:
a $x^2 - 4x + 1 = 0$, b) $x^2 - 2x - 2 = 0$, c) $6x^2 - 5x - 4 = 0$.

R. a) Soluţiile întregi se găsesc printre divizorii termenului liber 1, deci pot fi $+1$ sau -1. Nici unul dintre aceste numere nu verifică însă ecuaţia. Analog se procedează în celelalte cazuri.

VII.16. Determinaţi p şi q astfel încît ecuaţia: $px^2 + qx + 1 = 0$, $p, q \in \mathbb{Z}$ să aibă soluţii întregi.

R. Ecuaţia poate admite pe -1, pe 1 sau şi pe 1 şi pe -1 ca rădăcini. Dacă 1 este rădăcină întreagă, atunci $p + q + 1 = 0$. Dacă -1 este rădăcină întreagă a ecuaţiei atunci $p - q + 1 = 0$ Dacă şi 1 şi -1 sînt rădăcini, atunci sistemul format din ecuaţiile $p + q + 1 = 0$ şi $p - q + 1 = 0$ implică $p = -1$, şi $q = 0$.

VII.17. Arătaţi că dacă ecuaţia: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \in \mathbb{Z}^*$, $b \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{Z}$ admite soluţii de forma $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, atunci p divide c şi q divide a.

R. Fie $\frac{p}{q}$ soluţie a ecuaţiei date cu p şi q prime între ele. Atunci $a\left(\frac{p}{q}\right)^2 + b\left(\frac{p}{q}\right) + c = 0$ sau $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$ sau $p(ap + bq) = -cq^2$ sau $ap + bq = -\frac{cq^2}{p}$. $ap + bq \in \mathbb{Z}$ implică $\frac{cq^2}{p} \in \mathbb{Z}$ de unde rezultă că p ar trebui să fie divizor al lui c.

Relaţia $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$ este echivalentă cu $q(bp + cq) = -ap^2$ sau $bp + cq = -\frac{ap^2}{q} \in \mathbb{Z}$ de unde rezultă că q divide a.

VII.18. Folosind rezultatul de la exerciţiul anterior, rezolvaţi ecuaţiile:
a) $2x^2 - x - 6 = 0$, b) $4x^2 - 4x - 3 = 0$,
c) $4x^2 - 4x + 1 = 0$, d) $25x^2 - 10x + 1 = 0$.

R. a) Căutăm rădăcinile raționale de forma $\frac{p}{q}$ unde p este un divizor al lui 6 și q divizor al lui 2. Găsim $x_1 = 2$ și $x_2 = -\frac{3}{2}$, b) $x_1 = \frac{3}{2}$ și $x_2 = -\frac{1}{2}$, c) $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$, d) $x_1 = x_2 = \frac{1}{5}$.

VII.19. Să se determine p și să se rezolve ecuația $2x^2 - px + 1 = 0$, $p \in \mathbb{Z}$, știind că admite o rădăcină rațională.

R. Rădăcinile raționale ale ecuației pot fi $-1, +1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$. Obținem pentru p respectiv valorile $-3, 3, -3, 3$.

VII.20. Demonstrați că rădăcinile unei ecuații de gradul al II-lea sînt: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ și $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, unde $\Delta = b^2 - 4ac$ (Procedeul se numește rezolvarea ecuației „prin radicali").

R. Avem succesiv:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] = a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

de unde egalînd cu zero fiecare factor al produsului obținut deducem formulele căutate.

Observație: Din formulele determinate rezultă că x_1 și x_2 există atunci cînd $\Delta \geqslant 0$ și nu există cînd $\Delta < 0$.

VII.21. Rezolvați „prin radicali" ecuațiile propuse la exercițiile VII. 14, VII. 15 și VII. 18.

R. VII.14 a) $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 1$; b) $x_2 = 2$, $x_2 = -\frac{5}{3}$; c) $x_1 = 3$, $x_2 = -4$; d) $x_1 = x_2 = 3$; e) $x_1 = -4$, $x_2 = 4$. VII.15 a) $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$; b) $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$; c) $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{85}}{12}$. VII.18 a) $x_1 = 8$, $x_2 = -\frac{3}{2}$; b) $x_1 = 3$, $x_2 = -1$; c) $x_{1,2} = \frac{1}{2}$; d) $x_1 = x_2 = \frac{1}{5}$.

VII.22. Determinați m real pentru care ecuațiile următoare au rădăcini reale:

a) $mx^2 - 2x - 1 = 0$, b) $mx^2 - (2m - 3)x + m - 1 = 0$, $m \neq 0$
c) $(m + 1)x^2 - 2mx + m - 1 = 0$, $m \neq 0$,
d) $x^2 - mx + m^2 = 0$,
e) $x^2 - 2mx + m^2 + 1 = 0$; f) $x^2 - mx + m - 1 = 0$,
g) $(m - 1)x^2 - 2(m - 2)x + m + 1 = 0$,
h) $x^2 + 2mx + 9 = 0$,
i) $x^2 + mx = 0$, j) $mx^2 - 2(m - 1)x + m - 2 = 0$.

R. a) Ecuația are rădăcini reale dacă $\Delta \geqslant 0$. $\Delta = 4 + 4m \geqslant 0$, ceea ce implică $m \in [-1, +\infty)$. b) $\Delta = (2m - 3)^2 - 4m(m - 1) = 4m^2 - 12m + 9 - 4m^2 + 4m = -8m + 9$; $-8m + 9 \geqslant 0$ implică $m \in \left(-\infty, \frac{9}{8}\right]$.

c) $\Delta = 4m^2 - 4(m+1)(m-1) = 4m^2 - 4m^2 + 4 = 4$. Deci $\Delta > 0$ oricare ar fi m real.

d) $\Delta = m^2 - 4m^2 = -3m^2$. $-3m^2 \geq 0$ implică $m = 0$. Deci numai pentru $m = 0$ ecuația are rădăcini reale, în rest $3m^2 > 0$ și $-3m^2 < 0$, pentru orice m.

e) $\Delta = 4m^2 - 4(m^2 + 1) = -4$. $\Delta = -4 < 0$ oricare-ar fi m real și ecuația nu admite rădăcini reale.

f) $\Delta = m^2 - 4(m-1) = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 \geq 0$ pentru orice m real.

g) $\Delta = 4(m-2)^2 - 4(m-1)(m+1) = 4m^2 - 16m + 16 - 4m^2 + 4 = -16m + 20$;
$-16m + 20 \geq 0$ echivalentă cu $16m \leq 20$ sau $m \in \left(-\infty, \dfrac{5}{4}\right]$.

h) $\Delta = 4m^2 - 36 = 4(m^2 - 9)$. $\Delta \geq 0$ este echivalentă cu $m^2 - 9 \geq 0$ sau $(m-3)(m+3) \geq 0$ care este echivalentă cu sistemul (1) $m - 3 \geq 0$ și $m + 3 \geq 0$ sau (2) $m - 3 \leq 0$ și $m + 3 \leq 0$. Rezultă $m \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$.

i) $\Delta = m^2 \geq 0$ oricare ar fi m real.

j) $\Delta = 4(m-1)^2 - 4m(m-2) = 4 > 0$ oricare ar fi m real.

VII.23. Determinați numărul rădăcinilor ecuațiilor:

a) $4x^2 - 2mx - 1 - m = 0$, $m \in \mathbb{R}$

b) $x^2 - m = 0$, $m \in \mathbb{R}$

c) $(3 - m)x^2 + 2x + m - 3 = 0$; $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

R. a) Numărul rădăcinilor unei ecuații de gradul al II-lea este dat de semnul lui Δ. Dacă $\Delta > 0$ ecuația are două rădăcini reale și distincte, dacă $\Delta = 0$ ecuația are rădăcinile reale și egale, iar dacă $\Delta < 0$ ecuația nu are rădăcini reale. $\Delta = 4m^2 + 16 + 16m = 4(m^2 + 4m + 4) = 4(m+2)^2 \geq 0$ oricare ar fi m real. Pentru $m \neq -2$, $\Delta > 0$, deci ecuația are două rădăcini reale și distincte. Pentru $m = -2$, $\Delta = 0$ și deci ecuația are două rădăcini reale și egale.

b) $\Delta = 4m$. Deci ecuația are două rădăcini reale și distincte pentru $m \in (0, +\infty)$, rădăcini reale și egale pentru $m = 0$ și nu are rădăcini pentru $m \in (-\infty, 0)$.

c) $\Delta = 4 - 4(3-m)(m-3) = 4(1 + m^2 - 9) = 4(m^2 - 8)$, $\Delta > 0$ adică $m^2 - 8 = (m - 2\sqrt{2})(m + 2\sqrt{2}) > 0$ pentru $m \in (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$. $\Delta = 0$ pentru $m_1 = -2\sqrt{2}$ și $m_2 = 2\sqrt{2}$ și $\Delta < 0$ pentru $m \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

VII.24. Se consideră mulțimile:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid (m-1)x^2 - 2(m-1)x + m - 1 = 0, m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid mx^2 + (m-2)x - m = 0, m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$

Determinați numărul elementelor mulțimilor $A \cup B$ și $A \cap B$.

R. $\Delta_A = 0$, deci A are un singur element. $\Delta_B = (m-2)^2 + 4m^2$. $\Delta_B > 0$ oricare ar fi m real, fiind o sumă de pătrate, deci B are două elemente. Observăm că ecuația $(m-1)x^2 - 2(m-1)x + m - 1 = 0$ se scrie echivalent $(m-1)(x^2 - 2x + 1) = 0$ sau $(m-1)(x-1)^2 = 0$. Rezultă că $A = \{1\}$. Este posibil ca 1 să fie element și al mulțimii B. Într-adevăr, pentru $m = 2$, 1 este rădăcină a ecuației $mx^2 + (m-2)x - m = 0$. Așadar, avem două cazuri: I Pentru $m \neq 2$, $A \cup B$ are 3 elemente și $A \cap B = \emptyset$. II Pentru $m = 2$, $A \cup B$ are două elemente 1 și -1, iar $A \cap B = \{1\}$.

VII.25. Determinați m astfel încît:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 2 = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + mx - 2 = 0\} \neq \emptyset$;

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 6 = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + m = 0\} = \emptyset$;

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + mx - 1 = 0\} - \left\{-2, \dfrac{1}{2}\right\} = \emptyset$.

R. a) Dacă $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 2 = 0\}$, rezultă $A = \{-1, 2\}$. Intersecția este nevidă dacă cel puțin unul dintre numerele -1 și 2 este soluție a ecuației $x^2 + mx - 2 = 0$. Rezultă $m = -1$.

b) Analog, rădăcinile ecuației $x^2 - 5x + 6 = 0$ nu trebuie să fie rădăcini pentru ecuația $x^2 - 4x + m = 0$. Rezultă $m \neq 4$ și $m \neq 3$.

c) Rezultă că -2 și $\frac{1}{2}$ trebuie să fie soluții ale ecuației $x^2 + mx - 1 = 0$. Obținem $m = \frac{3}{2}$.

VII.26. Demonstrați că mulțimea: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + mx + 1 = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4x + m^2 = 0\}$ are două elemente oricare ar fi m real.

R. Avem $\Delta_1 = m^2 - 4$ și $\Delta_2 = 4(4 - m^2)$, deci de semne contrare și egale pentru $m = \pm 2$. Deci dacă $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 < 0$ și invers, de unde rezultă că mulțimea are două elemente oricare m real.

VII.27. Arătați că ecuațiile următoare au rădăcini reale oricare ar fi a, b, c numere reale.

1) $ax^2 - 2bx - a = 0$, $a \neq 0$,

2) $ax^2 - (a + b)x + b = 0$, $a \neq 0$,

3) $ax^2 - 2\sqrt{a^2 + b^2}x + b = 0$, $a \neq 0$,

4) $x^2 - 2\sqrt{a + b}\, x + 2\sqrt{ab} = 0$ $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$,

5) $3x^2 - 2(a + b + c)x + (ab + bc + ca) = 0$.

R. 1) Avem $\Delta = 4b^2 + 4a^2 > 0$ oricare-ar fi a, b reali ca sumă de pătrate. Deoarece $a \neq 0$, rezultă că Δ nu se poate anula. Deci ecuația are două rădăcini reale și distincte, oricare-ar fi a, b numere reale.

2) $\Delta = (a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2 \geqslant 0$. Ecuația are două rădăcini reale și distincte pentru orice $a \neq b$ și două rădăcini reale și egale pentru $a = b$.

3) $\Delta = 4(a^2 + b^2) - 4ab = 4(a^2 + b^2 - ab) = 2[(a - b)^2 + a^2 + b^2] \geqslant 0$. Ecuația are două rădăcini reale și distincte pentru $a \neq b$

4) $\Delta = 4(a + b) - 8\sqrt{ab} = 4(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0$. Ecuația are două rădăcini reale și distincte pentru $a \neq b$ și două rădăcini reale și egale pentru $a = b$.

5) $\Delta = 4(a + b + c)^2 - 12(ab + bc + ca) = 4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 2[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] \geqslant 0$. Ecuația are două rădăcini reale și distincte pentru a, b, c numere reale cel puțin două diferite și două rădăcini reale și egale pentru $a = b = c$.

VII.28. Arătați că ecuația: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ are rădăcini reale dacă $ac < 0$. Reciproc, este adevărat?

R. $\Delta = b^2 - 4ac$; $ac < 0$ implică $-4ac > 0$, deci $\Delta > 0$. Reciproc, afirmația este falsă. Contraexemplu: ecuația $x^2 - 5x + 6 = 0$ cu $1 \cdot 6 > 0$ are rădăcinile reale $x_1 = 2$ și $x_2 = 3$.

VII.29. Determinați mulțimile:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 3x - 10 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - x - 30 = 0\}$,
$C = \{x \in \mathbb{Q} \mid 5x^2 - x - 4 = 0\}$, $D = \{x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \mid 3x^2 + 5x + 2 = 0\}$,
$E = \{x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \mid x^2 - 7x - 18 = 0\}$, $F = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid x^2 - 6x + 2 = 0\}$,
$G = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 5x = 0\}$, $H = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x + 1 = 0\}$,
$I = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 6x + 1 = 0\}$, $J = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - x + 3 = 0\}$.

R. Rezolvînd ecuația $x^2 - 3x - 10 = 0$ obținem $x_1 = -2$ și $x_2 = 5$. Deci: $A = \{5\}$. Analog obținem $B = \{-5, 6\}$, $C = \left\{-\frac{4}{5}, 1\right\}$, $D = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$, $E = \{-2\}$, $F = \{3 - \sqrt{7}, 3 + \sqrt{7}\}$, $G = \{-5, 0\}$, $H = \emptyset$, $I = \emptyset$, $J = \emptyset$.

VII.30. Rezolvaţi ecuaţiile:

a) $(x-1)^2 = 2x$, b) $x^2 - 9 = x + 3$,

c) $(2x-1)^2 - (2x+1)^2 = 0$,

d) $(x-2)(x^2+2x+4) = x(x^2-4) + (x-3)(x+3)$,

e) $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2} = 1$, f) $\dfrac{6}{x^2-1} + \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{2}{x-1} + 1$,

g) $\dfrac{x}{x+3} + \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{12}{(x+3)(x-1)}$,

h) $\dfrac{2}{x^2-4} - \dfrac{1}{x^2-2x} + \dfrac{x-4}{x^2+2x} = 0$,

i) $\dfrac{(3-x)^3+(4+x)^3}{(3-x)^2+(4+x)^2} = 7$,

j) $\dfrac{x-1}{x^2-5x+6} + \dfrac{x-2}{x^2-4x+3} + \dfrac{x-3}{x^2-3x+2} = 0$.

R. a) Obţinem succesiv ecuaţiile echivalente:
$x^2 - 2x + 1 = 2x$, $x^2 - 4x + 1 = 0$. Rezultă $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ şi $x_2 = 2 + \sqrt{3}$.

b) $x^2 - 9 = x + 3$ este echivalentă cu $x^2 - x - 12 = 0$ şi are soluţiile $x_1 = -3$ şi $x_2 = 4$. Se putea scrie şi $(x+3)(x-3) = x + 3$ echivalentă cu $(x+3)(x-4) = 0$ de unde $x + 3 = 0$ sau $x - 4 = 0$ şi deci $x_1 = -3$ sau $x_2 = 4$.

c) Avem $(2x-1)^2 - (2x+1)^2 = 4x^2 - 4x + 1 - 4x^2 - 4x - 1 = -8x$ deci ecuaţia echivalentă $-8x = 0$ cu soluţia $x = 0$.

d) Ecuaţia este echivalentă succesiv cu ecuaţiile: $x^3 - 8 - x^3 + 4x - x^2 + 9 = 0$ sau $x^2 - 4x - 9 = 0$ care are soluţiile: $x_1 = 2 - \sqrt{5}$ şi $x_2 = 2 + \sqrt{5}$.

e) Condiţia de existenţă a fracţiei din membrul sting este $x^2 - 3x + 2 \neq 0$. Deci numerele 1 şi 2 nu pot fi soluţii ale ecuaţiei. Obţinem, succesiv, $x^2 - 4x + 3 = x^2 - 3x + 2$ sau $x = 1$, care deci nu poate fi soluţie. Rezultă că ecuaţia nu are nici o soluţie.

f) Se impun condiţiile: $x^2 - 1 \neq 0$, $x - 1 \neq 0$ şi $x + 1 \neq 0$, adică $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Obţinem în aceste condiţii: $6 + 3(x-1) = 2(x+1) + x^2 - 1$ echivalentă cu $x^2 - x - 2 = 0$ cu soluţiile $x_1 = -1$ şi $x_2 = 2$. Rezultă că ecuaţia iniţială are soluţia $x = 2$.

g) Este necesar ca $x + 3 \neq 0$, $x - 1 \neq 0$ şi $(x+3)(x-1) \neq 0$, deci $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$. Obţinem, în aceste condiţii: $x(x-1) + 2(x+3) = 12$ sau $x^2 + x - 6 = 0$ cu soluţiile $x_1 = -3$ şi $x_2 = 2$. Soluţia ecuaţiei : $x = 2$.

h) Condiţiile $x^2 - 4 \neq 0$, $x^2 - 2x \neq 0$ şi $x^2 + 2x \neq 0$, conduc la valorile $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$ admisibile pentru x. Pentru aceste valori, ecuaţia devine, echivalent: $2x - (x+2) + (x-4)(x-2) = 0$. sau $x^2 - 5x + 6 = 0$ cu soluţiile $x_1 = 2$ şi $x_2 = 3$. Rezultă că $x = 3$ este soluţia ecuaţiei iniţiale.

i) Numitorul fiind o sumă de pătrate rezultă că este strict pozitiv pentru orice valoare a lui x, deci fracţia este definită pentru orice x.

Obţinem:

$$\frac{[(3-x)+(4+x)][(3-x)^2-(3-x)(4+x)+(4+x)^2]}{(3-x)^2+(4+x)^2} = 7 \text{ sau}$$

$$7[(3-x)^2-(3-x)(4+x)+(4+x)^2] = 7[(3-x)^2+(4+x)^2]$$

sau $(3-x)(4+x) = 0$ cu soluţiile: $x_1 = 3$, $x_2 = -4$.

j) În condițiile $x^2 - 6+5x \neq 0$, $x^2 - 4x + 3 \neq 0$ și $x^2 - 3x + 2 \neq 0$, obținem:

$$\frac{x-1}{(x-2)(x-3)} + \frac{x-2}{(x-1)(x-3)} + \frac{x-3}{(x-1)(x-2)} = 0 \quad \text{sau}$$

$(x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 = 0$, ecuație fără soluție deoarece suma de pătrate $(x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 > 0$ oricare ar fi x real.

VII.31. Rezolvați ecuațiile:

a) $\dfrac{1}{x-m} + \dfrac{1}{x-n} + \dfrac{1}{x-p} = 0,$

b) $\dfrac{5}{x+m} - \dfrac{1}{m-x} = 2 + \dfrac{10m}{m^2-x^2},$

c) $\dfrac{x-m}{x-1} + \dfrac{x-1}{x-m} + 2 = 0,$

d) $\dfrac{1}{x+m+1} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{m} + 1,\ m \neq 0,$

e) $\dfrac{4+x}{1+x} - \dfrac{1+x}{4+x} = m.$

R. a) În condițiile $x \neq m$, $x \neq n$ și $x \neq p$ obținem succesiv: $(x-n)(x-p) + (x-m)(x-p) + (x-m)(x-n) = 0$ sau $3x^2 - 2(m+n+p)x + np + mp + mn = 0$.
$D = 4(m+n+p)^2 - 12(np+mp+mn) = 2[(m-n)^2 + (n-p)^2 + (p-m)^2] \geq 0$ oricare ar fi m, n, p numere reale. Rezultă că ecuația are soluțiile $x_1 = \dfrac{2(m+n+p) - \sqrt{D}}{6}$ și $x_2 = \dfrac{2(m+n+p)+\sqrt{D}}{6}$, dacă $2n + 2p \pm \sqrt{D} \neq 4m$, $2m + 2p \pm \sqrt{D} \neq 4n$, $2n + 2m \pm \sqrt{D} \neq 4p$.

b) Se impun condițiile: $x + m \neq 0$, $m - x \neq 0$, $m^2 - x^2 \neq 0$, adică $x \in \mathbb{R} \setminus \{-m, m\}$. Obținem succesiv: $5(-m+x) + (x+m) = 2(x^2 - m^2) - 10m$ sau $2x^2 - 6x - 2m^2 - 6m =$ sau $x^2 - 3x - m(m+3) = 0$, $D = 9 + 4m(m+3) = 4m^2 + 12m + 9 = (2m+3)^2 \geq 0$ și $x_1 = m+3$ și $x_2 = -m$. Rezultă soluție a ecuației inițiale $x = m+3$, dacă $m \neq -\dfrac{3}{2}$.

c) Se impun condițiile: $x - 1 \neq 0$ și $x - m \neq 0$ Avem: $(x-m)^2 + (x-1)^2 + 2(x-m)(x-1) = 0$ care se restrînge în pătratul $(x - m + x - 1)^2 = 0$ cu soluția $x = \dfrac{m+1}{2}$. Punînd condițiile de existență $\dfrac{m+1}{2} \neq 1$ și $\dfrac{m+1}{2} \neq m$ rezultă $m \neq 1$. Deci pentru $m \neq 1$ ecuația admite soluția $x = \dfrac{m+1}{2}$, iar pentru $m = 1$ ecuația nu admite soluții.

d) În condițiile $x + m + 1 \neq 0$ și $x \neq 0$, $m \neq 0$ obținem: $mx = m(x+m+1) + x(m+x+1) + mx(m+x+1)$ sau $(m+1)x^2 + (m+1)^2x + m(m+1) = 0$ sau
$(m+1)[x^2 + (m+1)x + m] = 0$. Rezultă:
I: pentru $m + 1 = 0$, $m = -1$ orice $x \neq 0$ este soluție a ecuației;
II: pentru $m+1 \neq 0$ obținem $x_1 = -1$ și $x_2 = -m$ soluții care verifică și condițiile de existență.

e) În condițiile $x \neq -1$ și $x \neq -4$, obținem: $(4+x)^2 - (1+x)^2 = m(1+x)(4+x)$ sau $mx^2 + (5m-6)x + 4m - 15 = 0$ cu $D = 9m^2 + 36 > 0$ oricare ar fi m. Deci, ecuația are soluțiile:

$$x_1 = \frac{(6-5m) - \sqrt{D}}{2m} \text{ și } x_2 = \frac{(6-5m)+\sqrt{D}}{2m},\ m \neq 0.$$

Pentru $m = 0$ ecuația admite soluția unică $x = -\dfrac{5}{2}$ care se obține direct din ecuația inițială. Observație: Pentru $m \neq 0$ se poate verifica că x_1 respectiv x_2 sînt diferite de -1 și -4.

CAPITOLUL VIII

EXERCIŢII RECAPITULATIVE

VIII.1.PO Fie $P(X)$ un polinom de gradul doi cu coeficienţi raţionali. Demonstraţi că dacă P ia valori întregi pentru orice valoare întreagă a lui X atunci este de forma:

$$P(X) = \frac{1}{2}[aX^2 + (2b - a)X + 2c], \; a, b, c \in \mathbb{Z} \text{ şi reciproc.}$$

R. Fie $P(x) = mX^2 + nX + p$, cu $m, n, p \in \mathbb{Q}$. Cum $P(z) \in \mathbb{Z}$, $\forall z \in \mathbb{Z}$, dăm lui X valori întregi particulare, convenabile, care ne dau informaţii despre coeficienţii m, n, p. Considerăm, de exemplu $P(0) = p$, deci $p \in \mathbb{Z}$. Calcule rapide efectuăm considerînd şi $P(1)$, $P(-1)$. Obţinem: $m + n + p \in \mathbb{Z}$ şi $m - n + p \in \mathbb{Z}$. Fie $m + n + p = u \in \mathbb{Z}$ şi $m - n + p = v \in \mathbb{Z}$. Rezultă

$$m = \frac{u + v - 2p}{2} \quad \text{şi} \quad n = \frac{u - v - 2p}{2}.$$

Polinomul are deci forma:

$$P(x) = \frac{1}{2}[(u + v - 2p)X^2 + (u - v - 2p)X + 2p]$$

luînd $a = u + v - 2p$, $b = 2u - 2p$, $c = p$ rezultă forma

$$P(x) = \frac{1}{2}[aX^2 + (2b - a)X + 2c] \text{ cu } a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

Reciproc, dacă $P(X)$ are forma de mai sus, atunci

$$P(X) = a\frac{X(X - 1)}{2} + bX + C$$

şi cum $X(X - 1)$ se divide cu 2 pentru orice valoare întreagă a lui X, rezultă $P(X)$ este întreg pentru orice valoare întreagă a lui X.

VIII.2.PO Fie polinomul $P(X) = aX^2 + bX + c$. Demonstraţi că dacă P ia valori întregi pentru trei valori întregi consecutive ale lui X, atunci P ia valori întregi pentru orice valoare întreagă a lui X.

R. Fie $n - 1, n, n + 1$ trei întregi consecutivi. Din ipoteză avem

$$a(n - 1)^2 + b(n - 1) + c = p \in \mathbb{Z},$$
$$an^2 + bn + c = q \in \mathbb{Z},$$
$$a(n + 1)^2 + b(n + 1) + c = r \in \mathbb{Z}.$$

Din aceste relații determinăm a, b, c. Scăzînd două cîte două relațiile, obținem:

$$a(2n+1)+b=r-q,$$
$$a(2n-1)+b=q-p$$

pe care le scădem și deducem:

$$a=\frac{r+p}{2}-q.$$

Rezultă și

$$b=r-q-(2n+1)\left(\frac{r+p}{2}-q\right)=s-\frac{r+p}{2},$$

unde s reprezintă suma întregilor din expresia lui b, adică $s=r-q-(r+p)n+(2n+1)q$. Înlocuind cu expresiile lui a și b, de exemplu, în relația

$$an^2+bn+c=q,$$

obținem:

$$c=q-\left(\frac{r+p}{2}-q\right)n^2+\left(s-\frac{r+p}{2}\right)n=m-(r+p)\frac{n(n-1)}{2},$$

unde m reprezintă suma întregilor din expresia lui c.

Cum $n(n-1)$ se divide cu 2, rezultă că c este întreg. P este deci de forma:

$$P(X)=\left(\frac{r+p}{2}-q\right)X^2+\left(s-\frac{r+p}{2}\right)X+c.$$

Pentru o valoare oarecare întreagă z a lui X, obținem:

$$P(z)=\left(\frac{r+p}{2}-q\right)z^2+\left(s-\frac{r+p}{2}\right)z+c=(r+p)\frac{z(z-1)}{2}-qz^2+x+c.$$

Din nou, $z(z-1)$ întreg par implică $P(z)\in\mathbb{Z}$.

VIII.3.[PO] Fie $P(X)=X^3+bX^2+cX+d$ un polinom cu coeficienți întregi și $d(b+c)$ număr impar. Demonstrați că acest polinom nu se poate scrie ca un produs de două polinoame cu coeficienți întregi.

R. Presupunem prin absurd că P s-ar scrie:

$$P(X)=(X^2+mX+n)(X+p),\ m,\ n,\ p\in\mathbb{Z}.$$

Efectuînd produsul, obținem:

$$P(X)=X^3+(m+p)X^2+(mp+n)X+np.$$

Prin identificarea coeficienților avem:

$$b=m+p,\ c=mp+n,\ d=np.$$

Cum $d(b+c)$ este impar, rezultă că d și $b+c$ sînt impare. Din $d=np$, rezultă, analog, că n și p sînt impare. Fie $n=2u+1$, $p=2v+1$, u, v întregi. Atunci: $b+c=m(p+1)+n+p=$ $=2m(v+1)+2(u+v+1)$ deci $b+c$ este un întreg par, ceea ce contrazice ipoteza.

VIII.4.[PO] Fie polinomul $P(X)=aX^2+bX+c$ cu a, b, c întregi. Dacă $P(m)$ și $P(n)$ sînt întregi impari cu m și n întregi unul par și celălalt impar, demonstrați că P nu are rădăcini întregi.

R. Presupunem prin absurd că t este o rădăcină întreagă. Atunci $P(X) = (X - t)Q(X)$. Calculăm $P(n)$ şi $P(m)$ Avem: $P(n) = (n - t)Q(n)$, şi $P(m) = (m - t)Q(m)$. Cum n şi m sînt de parităţi diferite rezultă că $P(m)$ sau $P(n)$ este par ceea ce contrazice ipoteza.

VIII.5. Demonstraţi că ecuaţia:
$ax^2 + bx + c = 0$, a, b, c numere întregi impare, nu are rădăcini raţionale.

R. Fie $a = 2m + 1$, $b = 2n + 1$, $c = 2p + 1$, $m, n, p \in \mathbb{Z}$.
Ecuaţia are rădăcini raţionale dacă discriminantul ecuaţiei este un pătrat perfect. Presupunem prin absurd că Δ este un pătrat perfect Deci:

$$\Delta = (2n + 1)^2 - 4(2m + 1)(2p + 1) = (2k + 1)^2.$$

Δ fiind evident un număr impar. Ultima egalitate se mai scrie succesiv:

$$(2n + 1)^2 - (2k + 1)^2 = 4(2m + 1)(2p + 1) \text{ sau}$$

$$4(n - k)(n + k + 1) = 4(2m + 1)(2n + 1) \text{ sau}$$

$$(n - k)(n + k - 1) = (2m + 1)(2n + 1).$$

Numerele $n - k$ şi $n + k$ sînt amîndouă pare sau impare, deci $n - k$ şi $n + k - 1$ au parităţi, diferite, ceea ce implică faptul că $(n - k)(n + k - 1)$ este un număr par. Cum $(2m + 1)\cdot(2n+1)$ este un număr întreg impar, rezultă contradicţia: un număr întreg par egal cu un număr întreg impar.

VIII.6.[PO] Fie P un polinom cu coeficienţi întregi.
Demonstraţi că dacă:

$$P(m) = P(n) = k, \; m, n, k \text{ întregi}$$

atunci:

$$P(X) = (X - m)(X - n)Q(X) + k.$$

R. Relaţia $P(x) = (X - m)(X - n)Q(x) + k$ se scrie echivalent

$$P(X) - k = (X - m)(X - n)Q(X).$$

Pe de altă parte $P(m) = P(n) = k$ implică

$$P(m) - k = P(n) - k = 0$$

Considerînd polinomul $P_1(X) = P(X) - k$, avem $P_1(n) = P_1(m) = 0$ de unde rezultă că $X - n$ şi $X - m$ sînt factori ai lui P_1, adică $P_1(X) = (X - m)(X - n)Q(X)$ şi revenind la P se obţine c.c.t.d.

VIII.7. Determinaţi produsul numerelor reale a şi b ştiind că:

$$a^2 + b^2 = 5 \text{ şi } (a + b)^4 - (a - b)^4 = 40.$$

R. Egalitatea $(a + b)^4 - (a - b)^4 = 40$ devine succesiv

$$[(a + b)^2 - (a - b)^2][(a + b)^2 + (a - b)^2] = 40 \text{ sau}$$

$$8ab(a^2 + b^2) = 40,$$

de unde ţinînd cont că $a^2 + b^2 = 5$ obţinem $ab = 1$.

VIII.8. Fie polinoamele:
$P(X) = X^3 - 3X^2 + mX - 3$ şi
$Q(X) = X^2 - nX + 1$ unde $m, n \in \mathbb{R}$.

a) Determinaţi m şi n astfel încît Q să dividă P.

b) Pentru m şi n determinaţi la punctul a), găsiţi valorile reale ale lui X pentru care $P(X) \geqslant 0$ şi $Q(X) > 0$.

R. a) Q divide P dacă, de exemplu, restul R al împărţirii lui P la Q este nul. Obţinem

$$R(x) = (n^2 - 3n + m - 1)X - n;\ R(X) = 0 \text{ implică } n = 0 \text{ şi } m = 1.$$

b) Sistemul de inecuaţii format din $x^3 - 3x^2 + x - 3 > 0$ şi $x^2 + 1 > 0$ conduce la $x \in [3, \infty)$, deoarece $x^2 + 1 > 0$ este satisfăcută pentru orice x real, iar $x^3 - 3x^2 + x - 3 \geqslant 0$ este echivalentă cu $(x^2 + 1)(x - 3) \geqslant 0$, deci cu $x - 3 \geqslant 0$.

VIII.9. Arătaţi că numărul

$$N = (x + y)^3 - x^3 - y^3$$

este divizibil cu 3, oricare ar fi x şi y numere întregi.

R. $N = 3xy(x + y)$ de unde avem că N se divide cu 3.

VIII.10. Determinaţi x şi y întregi astfel încît 6 să dividă $N = (x + y)^3 - x^3 - y^3$, 4 să dividă N, 24 să dividă N.

R. Avem $N = 3xy(x + y)$ (vezi exerciţiul VIII.9) deci N se divide cu 3. N se divide cu 6 căci se divide şi cu 2 fapt care se observă discutînd după paritatea lui x şi y. N se divide cu 4 dacă x sau y sau $x + y$ sînt divizibile cu 4, dacă x şi y sînt numere pare sau dacă x şi y sînt impare consecutive. N se divide cu 24 dacă x şi y sînt pare sau dacă x sau y sînt multipli de 8.

VIII.11. Determinaţi numerele $a \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ astfel încît:

1) $Q(X) = X^2 - 1$ să dividă polinomul $P(X) = X^{2n} - aX^n + 2$.

2) $Q(X) = X^3 - X$ să dividă polinomul $P(X) = X^{2n} - X\ (1 - X)^n - X$

R. 1). $Q(X)$ divide $P(X)$ dacă, de exemplu, $P(-1) = P(1) = 0$, ceea ce implică $(-1)^{2n} - a(-1)^n + 2 = 0$ şi $1^{2n} - a \cdot 1^n + 2 = 0$. Din ultima egalitate rezultă $a = 3$, care satisface şi cealaltă egalitate în cazul n număr par. Deci Q divide P pentru n par şi $a = 3$.

2). Obţinem $P(X) = X[X^{2n-1} - (1 - X)^{n-1} - 1]$ deci X divide P. $P(1) = 0$ deci $(X - 1)$ divide P. $P(-1) = 2 + 2(-1)^{n-1} = 0$ pentru n număr par. Rezultă că $X^3 - X = X(X - 1)(X + 1)$ divide P în cazul n număr par.

VIII.12. Fie polinoamele

$$P(X) = 2X^3 + 3X^2 - 2X - 3 \quad \text{şi} \quad Q(X) = 4X^2 + aX + 3, \quad a \in \mathbb{R}.$$

1. Determinaţi a astfel încît Q să fie un pătrat perfect.
2. Determinaţi a astfel încît P şi Q să fie prime între ele.

R. 1. $Q(X) = (2X)^2 + aX + (\sqrt{3})^2$.

Monomul aX trebuie să fie termenul din mijloc al binomului $(2X \pm \sqrt{3})^2$, de unde rezultă $a = \pm 4\sqrt{3}$.

2. P şi Q sînt prime între ele dacă nu au factori comuni. Cum $P(X) = 2X(X^2 - 1) + 3(X^2 - 1) = (2X + 3)(X - 1)(X + 1)$

rezultă că trebuie ca $Q\left(-\dfrac{3}{2}\right) \neq 0$, $Q(-1) \neq 0$, $Q(1) \neq 0$ de unde se obţin valorile lui a.

VIII.13.[PO] Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relaţia:

$$f(x - 1) = 3x - 8 - f(1), \text{ oricare ar fi } x \text{ real.}$$

a) Arătaţi care dintre punctele : $(0, -4)$; $(5, 2)$; $(3, 2)$; $(10, 26)$ aparţin graficului lui f.

b) Trasaţi graficul lui f.

R. a) Determinăm mai întîi $f(1)$ dînd lui x valoarea 2 în relaţia din anunţ. Obţinem $2f(1) = -2$, deci $f(1) = -1$ şi relaţia devine $f(x-1) = 3x - 7$ (1). În relaţia (1), $x = 1$ implică $f(0) = -4$, deci punctul $(0, -4)$ aparţine graficului lui f. Analog, pentru $x = 6$ obţinem $f(5) = 8$, deci $(5,2)$ nu aparţine graficului. Pentru $x = 4$, $f(3) = 5$, deci $(3,2)$ nu aparţine graficului şi pentru $x = 11$, $f(10) = 26$, deci $(10,26)$ aparţine graficului lui f.

b) Pentru trasarea graficului, determinăm $f(x)$. Punînd $x - 1 = y$ obţinem $f(y) = 3y - 4$ deci $f(x) = 3x - 4$ al cărei grafic este o dreaptă care se obţine imediat.

VIII.14.[PO] Se consideră polinoamele :

$$P(X) = AX^4 + BX^2 + C \text{ şi } Q(X) = X^2 - 5X + 6.$$

Ştiind că A este număr întreg şi că $P(X)$ este divizibil cu $Q(X)$ arătaţi că B este multiplu de 13, C este multiplu de 36 şi A este cel mai mare divizor comun al numerelor B şi C.

R. $Q(X) = (X-2)(X-3)$ deci P se divide cu Q dacă $P(2) = P(3) = 0$ ceea ce implică $16A + 4B + C = 0$ şi $81A + 9B + C = 0$, relaţii de unde rezultă $B = -13A$ şi $C = 36A$, adică B este multiplu de 13 şi C multiplu de 36 şi A rezultă cel mai mare divizor comun al numerelor B şi C (numerele 13 şi 36 fiind prime între ele).

VIII.15. Se consideră polinoamele :

$$P(X, Y) = X^2 + XY + 2Y - 1 \text{ şi } Q(X, Y) = Y^2 + XY - 2Y + 1.$$

1. Descompuneţi în factori polinomul :

$$E(X, Y) = XP(X, Y) - YQ(X, Y).$$

2. Arătaţi că pentru valorile $x \in \mathbb{N}$ şi $y \in \mathbb{N}$ ale lui X, respectiv Y, numărul $E(x, y)$ este multiplu de 2.

3. Calculaţi valoarea lui E pentru valorile x, y ale lui X, respectiv Y pentru care $x + y = a$ şi $x - y = a - 1$, $a \in \mathbb{Z}$.

4. Determinaţi a astfel încît E să fie pătrat perfect.

R. 1. Obţinem succesiv

$$\begin{aligned} E(X, Y) &= X^3 + X^2Y + 2XY - X - Y^3 - XY^2 + 2Y^2 - Y = \\ &= (X^3 - Y^3) + (X^2Y - XY^2) + (2XY + 2Y^2) - (X + Y) = \\ &= (X - Y)(X^2 + XY + Y^2) + XY(X - Y) + 2Y(X + Y) - (X + Y) = \\ &= (X - Y)(X^2 + 2XY + Y^2) + (X + Y)(2Y - 1) = \\ &= (X + Y)[X^2 - (Y - 1)^2] = (X + Y)(X + Y - 1)(X - Y + 1). \end{aligned}$$

2. $E(x, y) = (x + y)(x + y - 1)(x - y + 1)$ este multiplu de 2 deoarece produsul numerelor naturale consecutive $(x + y - 1)$, $(x + y)$ este multiplu de 2.

3. Obţinem $E = a^2(a - 1)$.

4. E este pătrat perfect dacă $a - 1$ este pătrat perfect deci dacă $a - 1 = k^2$, $k \in \mathbb{Z}$, adică pentru $a = k^2 + 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

VIII.16. Determinați un polinom de gradul al III-lea cu coeficientul lui X^3 egal cu 1, știind că :

1. $\frac{P(1)}{3} = \frac{P(2)}{2} = \frac{P(3)}{-2}$ și $P(1)\cdot P(2)\cdot P(3) = 96$.

2. $\frac{P(1)}{3} = \frac{P(2)}{2} = \frac{P(3)}{-2}$ și $P(1) + P(2) + (P(3) = 6$.

R. 1. Fie k valoarea comună a rapoartelor. Obținem $P(1) = 3k$, $P(2) = 2k$, $P(3) = -2k$ $P(1)\ P(2)\ P(3) = -12\ k^3 = 96$ de unde $k = -2$ și deci:

$P(1) = -6$, $P(2) = -4$, $P(3) = 4$, P fiind de forma

$P(X) = X^3 + ax^2 + bx + c$.

Obținem sistemul în a, b, c, format din ecuațiile:

$$\begin{cases} a + b + c = -7 \\ 4a + 2b + c = -12 \\ 9a + 3b + c = -23 \end{cases}$$

care conduce la $a = -3$, $b = 4$, $c = -8$.

2. Folosind proprietatea fundamentală a unui sir de rapoarte obținem:

$$\frac{P(1)}{3} = \frac{P(2)}{2} = \frac{P(3)}{-2} = \frac{P(1) + P(2) + P(3)}{3 + 2 - 2} = \frac{6}{3} = 2,$$

de unde rezultă $P(1) = 6$, $P(2) = 4$, $P(3) = -4$, și procedînd ca mai sus obținem:

$a = -9$, $b = 18$, $c = -4$.

VIII.17. Prin împărțirea la același polinom $S(X)$, polinoamele : $P(X) = X^3 - 5X^2 + 13X - 20$ și $Q(X) = X^3 - 4X^2 + 12X - 14$ dau resturile $2X - 5$ respectiv $3X - 4$. Aflați $S(X)$.

R. Teorema împărțirii cu rest implică:

$P(x) = S(x)C_1(x) + 2x - 5$ și

$Q(x) = S(x)C_2(x) + 3x - 4$ sau

$P(x) - 2x + 5 = S(x)\, C_1(X)$ și

$Q(x) - 3x + 4 = S(x)C_2(x)$.

Rezultă că $S(x)$ este un divizor comun al polinoamelor $P(x) - 2x + 5$ și $Q(x) - 3x + 4$.

Avem: $P(x) - 2x + 5 = x^3 - 5x^2 + 11x - 15 = (x - 3)(x^2 - 2x + 5)$,

$Q(x) - 3x + 4 = x^3 - 4x^2 + 9x - 10 = (x - 2)(x^2 - 2x + 5)$.

Rezultă, $S(x) = x^2 - 2x + 5$.

VIII.18. Fie polinomul :

$$P(X, Y) = X^3 + a^2(a + 2Y - X) + a(Y^2 - X^2 - 2XY) - XY^2,$$

unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Calculați $P(a, y)$.

b) Descompuneți $P(X, Y)$.

R. a), $P(a, y) = a^3 + a^2(a + 2y - a) + a(y^2 - a^2 - 2ay) - ay^2 = 0$.

b) Deoarece $P(a,y) = 0$ rezultă $X - a$ este un divizor al lui P; căutăm să obținem, grupînd convenabil termenii în P, factorul $x - a$. Avem:

$$P(x,y) = (x^3 - ax^2) + (a^3 - a^2x) + (2a^2y - 2axy) + (ay^2 - xy^2) =$$
$$= (x - a)[x^2 - (a + y)^2] = (x - a)(x - y - a)(x + y + a).$$

VIII.19. Se consideră fracțiile:

$$F(X, Y) = \frac{\dfrac{X}{1 + X^2} + \dfrac{Y}{1 + Y^2}}{\dfrac{1 - X^2}{1 + X^2} + \dfrac{1 - Y^2}{1 + Y^2}}, \quad G(X, Y) = \frac{\dfrac{X}{1 + X^2} - \dfrac{Y}{1 + Y^2}}{\dfrac{1 - X^2}{1 + X^2} + \dfrac{1 - Y^2}{1 + Y^2}}$$

a) Arătați că fracțiile F și G sînt definite pentru valorile x și y ale lui X, respectiv Y pentru care $xy \neq \pm 1$.

b) Determinați perechile de numere reale (x, y) pentru care $F(x, y) = G(x, y) = 2$.

R. a) F și G sînt definite pentru valorile x și y ale lui X, respectiv Y pentru care $1 + x^2 \neq 0$ $1 + y^2 \neq 0$ și $\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2} + \dfrac{1 - y^2}{1 + y^2} \neq 0$.

Primele două condiții sînt satisfăcute pentru orice x și y reali. Ultima condiție devine succesiv: $(1 - x^2)(1 + y^2) + (1 - y^2)(1 + x^2) \neq 0$ sau $1 - x^2y^2 \neq 0$, adică

$$xy \neq \pm 1.$$

b) Notînd $a = \dfrac{x}{1 + x^2}$, $b = \dfrac{y}{1 + y^2}$ și $A = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2} + \dfrac{1 - y^2}{1 + y^2}$,

sistemul $F(x, y) = G(x, y) = 2$ devine

$$\frac{a + b}{A} = \frac{a - b}{A} \text{ sau}$$

$a + b = 2A$ și $a - b = 2A$ de unde rezultă

$$b = 0 \text{ și } a = 2A.$$

$$0 = b = \frac{y}{1 + y^2} \text{ implică } y = 0$$

$a = 2A$ implică $\dfrac{x}{1 + x^2} = 2\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2} + 2$, de unde rezultă $x = 4$. Deci perechea căutată este $(4,0)$.

VIII.20. a) Efectuați suma de fracții algebrice:

$$S = \frac{2X - Y}{4X^2 - 3XY - Y^2} + \frac{2X + Y}{4X^2 + 5XY + Y^2} - \frac{X^2 + Y^2}{4X^3 + X^2Y - 4XY^2 - Y^3}.$$

b) Pentru $Y = 5$ determinați valorile întregi ale lui X pentru care $S(X, Y)$ este un număr întreg.

R. a) Aflăm c.m.m.d.c al polinomului de la numitor

$$4x^2 - 3xy - y^2 = (4x^2 - 4xy) + (xy - y^2) = 4x(x - y) + y(x - y) = (x - y)(4x + y)$$

$$4x^2 + 5xy + y^2 = (4x^2 + 4xy) + (xy + y^2) = 4x(x + y) + y(x + y) = (x + y)(4x + y)$$

$$4x^3 + x^2y - 4xy^2 - y^3 = x^2(4x + y) - y^2(4x + y) = (4x + y)(x^2 - y^2).$$

Obținem deci

$$S(x, y) = \frac{(2x - y)(x + y) + (2x + y)(x - y) - (x^2 + y^2)}{(4x + y)(x^2 - y^2)} =$$

$$= \frac{3x^2 - 3y^2}{(4x + y)(x^2 - y^2)} = \frac{3}{4x + y}.$$

b) $S = \dfrac{3}{4x + 5}$, $S \in \mathbb{Z}$ dacă și numai dacă $4x + 5$ este divizor al lui 3. Rezultă $x \in \{-1, -2\}$.

VIII.21. a) Simplificați fracțiile:

$$F(X, Y) = \frac{a(X - Y)^3 + b(X^3 - Y^3) + XY[(b - 2a)Y + (2a - b)X]}{X(a + b)^3 - Y(a^3 + b^3) - ab(2(a + b)X + (a + b)]}$$

unde $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

b) Arătați că $E(x, y) = E(y, x) = E(-x, -y)$.

R. a) La numărător obținem succesiv:

$$(x - y)(ax^2 - 2axy + ay^2 + bx^2 + bxy + by^2 - bxy + 2axy) =$$
$$= (x - y)(a + b)(x^2 + y^2).$$

Analog numitorul devine $(a + b)(x - y)(a^2 + b^2)$.

Deci $\quad F(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{a^2 + b^2}.$

b) Rezultă imediat.

VIII.22. Se consideră fracția:

$$F(X) = \frac{X^3 + (b - 2a)X^2 + a(a - 2b)X + a^2b}{X^3 - (b + 2a)X^2 + a(a + 2b)X - a^2}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

a) Arătați că domeniul de existență al fracției este $\mathbb{R} \setminus \{a, b\}$.

b) Simplificați $F(X)$.

c) Pentru $b = 1$, determinați, valorile reale ale lui X pentru care $F(X)$ este un număr întreg.

R. a) Domeniul de existență $\mathbb{R} \setminus \{a, b\}$ rezultă din faptul că numitorul se anulează pentru valorile a și b ale lui X ceea ce se verifică imediat.

b) Împărțind numitorul prin $(X - a)(X - b)$ obținem descompunerea $(X - b) \times (X - a)^2$.

Analog numărătorul se descompune în $(X - a)^2(X + b)$.

Deci $F(X) = \dfrac{X - b}{X + b}$.

c) $F(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1} = 1 - \dfrac{2}{x + 1} \in \mathbb{Z}$ implică $\dfrac{2}{x + 1} \in \mathbb{Z}$ de unde rezultă $x \in \{-3, -2, 1, 0\}$.

VIII.23. Se consideră fracția algebrică rațională:

$$F(X) = \frac{X^4 + 7X^3 + 9X^2 - 7X - 10}{X^2 + 4X - 5}.$$

a) Determinați valorile lui X pentru care este bine definită.

b) Simplificați F.

c) Arătați că oricare ar fi $x \in \mathbb{Z} \setminus \{-5, 1\}$, $F(x)$ este un număr întreg par.

R. a) Ecuația $x^2 + 4x - 5 = 0$ rezolvată prin radicali sau prin descompunerea trinomului are soluțiile -5 și $+1$, deci F este definită pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 1\}$ b) Numărătorul poate avea deci, factori pe $X - 1$ sau $X + 5$. Deducem că $X^4 + 7X^3 + 9X^2 - 7X - 10 = (X - 1)(X + 5)(X + 1)(X+2)$.

Rezultă că $F(X) = (X + 1)(X + 2)$.

c) Pentru valoarea x întreagă a lui X, numărul $(x + 1)(x + 2)$ este un produs de doi întregi consecutivi, deci este un întreg par.

VIII.24. Fie x, y, t numere strict pozitive. Demonstrați că:

a) $2x = y + z$, și $2y = x + z$ implică $x = y = z$.

b) $x^2 = yz$, și $y^2 = xz$ implică $x = y = z$.

c) $xy + zx = 2yz$ și $yz + xy = 2xz$ implică $x = y = z$.

R. a) $2x = y + z$ este echivalentă cu $x = \dfrac{y + z}{2}$ adică x este media aritmetică a lui y și z. Rezultă că $y \leqslant x \leqslant z$ sau $z \leqslant x \leqslant y$. Analog se obțin inegalitățile $z \leqslant y \leqslant x$ sau $x \leqslant y \leqslant z$, respectiv $x \leqslant z \leqslant y$ sau $y \leqslant z \leqslant x$.

b) Obținem, analog, că numerele sînt, pe care, media geometrică a celorlalte două.

c) La fel, fiecare număr este media armonică a celorlalte două.

VIII.25. Se consideră ecuația:

$$x^2 - (3a + 1)x - a^3 = 0, \ a \in \mathbb{R}, \quad a \geqslant -\frac{1}{4}.$$

Arătați că:

a) Ecuația are rădăcini reale.

b) Considerînd a întreg strict pozitiv, găsiți o condiție necesară și suficientă ca rădăcinile să fie întregi.

c) Dacă a verifică condiția de la punctul b), arătați că rădăcinile ecuației sînt cuburi perfecte.

R. a) Calculăm discriminantul ecuației, Δ.

$\Delta = (3a + 1)^2 + 4a^3 = 5a^3 + 9a^2 + 6a + 1$. Ținînd cont de ipoteză $a \geqslant -\dfrac{1}{4}$ sau $4a + 1 \geqslant 0$; facem să apară în descompunerea lui Δ factorul $4a + 1$.

$\Delta = 4a^3 + 9a^2 + 6a + 1 = (4a^3 + a^2) + (8a^2 + 2a) + (4a + 1) =$
$= (4a + 1)(a^2 + 2a + 1) = (4a + 1)(a + 1)^2 \geqslant 0$, fiind produsul dintre pătratul $(a + 1)^2$ și $4a + 1$, pozitiv.

b) Este necesar și suficient ca Δ să fie pătrat perfect, adică $4a + 1 = (2k + 1)^2$, de unde rezultă $a = k(k + 1)$; c) Ecuația devine $x^2 - (3k^2 + 3k + 1)x - k^3(k + 1)^3 = 0$

Avem $\Delta = (4a + 1)(a + 1)^2$ și pentru $a = k(k + 1)$

$\Delta = (4k^2 + 4k + 1)(k^2 + k + 1)^2 = (2k + 1)^2(k^2 + k + 1)^2$.

Deci $x_1 = \dfrac{3k^2 + 3k + 1 - (2k + 1)(k^2 + k + 1)}{2} = \dfrac{-2k^3}{2} = -k^3$ la fel $x_2 = (k + 1)^3$.

VIII.26. Arătați că dacă $xyz = 1$, atunci:

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+xz} = 1, \quad x, y, z \in \mathbb{R}^*.$$

R. Amplificăm prima fracție cu z, ținem cont de ipoteză ş.a.m.d. Obținem

$$\frac{z}{z+zx+1} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+xz} = \frac{z+1}{1+z+xz} + \frac{1}{1+y+yz}$$

Amplificăm acum prima fracție cu y.

$$\frac{zy+y}{y+yz+xyz} + \frac{1}{1+y+yz} = \frac{zy+y+1}{y+yz+1} = 1.$$

VIII.27. Folosind inegalitatea: $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ care are loc pentru orice x și y reali (cunoscută sub numele „inegalitatea triunghiului"), demonstrați că:

a) $|x-y| \leqslant |x| + |y|$

b) $|x+y+z| \leqslant |x| + |y| + |z|$.

R. a) $|x-y| = |x+(-y)|$ și aplicînd inegalitatea triunghiului numerelor x și $-y$, rezultă:

$$|x+(-y)| \leqslant |x| + |-y| = |x| + |y|, \text{ ținînd cont de } |y| = |-y|.$$

b) Folosind proprietatea de asociativitate a adunării în $\mathbb{R}$, putem scrie: $|x+y+z| = |x+(y+z)|$ și aplicînd inegalitatea triunghiului numerelor x și $y+z$ rezultă $|x+(y+z)| \leqslant |x| + |y+z| \leqslant |x| + |y| + |z|$ după aplicarea încă o dată a acestei inegalități numerelor y și z.

VIII.28. Fie a, b, c numere reale strict pozitive diferite două cîte două. Demonstrați că dacă $a - b = \dfrac{b-c}{bc}$, $b - c = \dfrac{c-a}{ac}$ și $c - a = \dfrac{a-b}{ab}$, atunci $a = b = c$ sau $a^2b^2c^2 = 1$.

R. Înmulțim membru cu membru egalitățile din ipoteză:

$(a-b)(b-c)(c-a) = \dfrac{(b-c)(c-a)(a-b)}{a^2b^2c^2}$ ceea ce este echivalent cu $(a-b)(b-c) \times (c-a)\left(1 - \dfrac{1}{a^2b^2c^2}\right) = 0$, de unde rezultă $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$, adică $a = b = c$, sau $1 - \dfrac{1}{a^2b^2c^2} = 0$, adică $a^2b^2c^2 = 1$.

VIII.29. Dacă a, b, c, d sînt numere reale oarecare, demonstrați că:

1) $3(a^2+b^2+c^2) = (a+b+c)^2$ implică $a = b = c$.

2) $4(a^2+b^2+c^2+d^2) = (a+b+c+d)^2$ implică $a = b = c = d$.

R. 1) $3(a^2+b^2+c^2) = (a+b+c)^2$ este echivalentă cu $3a^2+3b^2+3c^2-a^2-b^2-c^2-2ab-2ac-2bc = 0$ sau $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc = 0$ sau $(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2ac+c^2)+(b^2-2bc+c^2) = 0$, adică sumă de pătrate nulă: $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 = 0$, de unde rezultă singura posibilitate $a-b=0$, $a-c=0$, $b-c=0$. Deci $a = b = c$.

2) rezultă în mod analog.

VIII.30. Demonstrați că:

$$\frac{2}{a}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\frac{2}{b}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+\frac{2}{c}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)=0$$ implică $a = b = c$, oricare ar fi a, b, c numere reale strict pozitive.

R. Efectuînd produsele obținem: $\frac{2}{a^2}-\frac{2}{ab}+\frac{2}{b^2}-\frac{2}{bc}+\frac{2}{c^2}-\frac{2}{ca}=0$, ceea ce este echivalent cu

$$\left(\frac{1}{a^2}-\frac{2}{ab}+\frac{1}{b^2}\right)+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{2}{ac}+\frac{1}{c^2}\right)+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{2}{bc}+\frac{1}{c^2}\right)=0,$$

adică $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2=0$, de unde rezultă $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}=\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$. Deci $a=b=c$.

VIII.31.[PO] Fie a un număr real oarecare nenul. Notăm $a+\frac{1}{a}=t$. Verificați că:

1) $a^2+\frac{1}{a^2}=t^2-2$,

2) $a^3+\frac{1}{a^3}=t^3-3t$,

3) $a^4+\frac{1}{a^4}=t^4-4t^2+2$.

R. 1) Ridicăm la pătrat $a+\frac{1}{a}=t$. Obținem: $a^2+\frac{1}{a^2}+2=t^2$, adică $a^2+\frac{1}{a^2}=t^2-2$.

2) Ridicăm la cub $a+\frac{1}{a}=t$. Obținem: $a^3+\frac{1}{a^3}+3a+3\cdot\frac{1}{a}=t^3$, de unde $a^3+\frac{1}{a^3}=t^3-3\left(a+\frac{1}{a}\right)=t^3-3t$.

3) Ridicăm la pătrat $a^2+\frac{1}{a^2}=t^2-2$. Obținem

$a^4+\frac{1}{a^4}+2=t^4-4t^2+4$, de unde $a^4+\frac{1}{a^4}=t^4-4t^2+2$.

VIII.32. 1) Fie a un număr real strict pozitiv și m, n numere naturale, $m>n$. Demonstrați identitatea:

$$a^{m+n}+\frac{1}{a^{m+n}}=\left(a^m+\frac{1}{a^m}\right)\left(a^n+\frac{1}{a^n}\right)-\left(a^{m-n}+\frac{1}{a^{m-n}}\right).$$

2) Dacă $a+\frac{1}{a}=t$ calculați $a^5+\frac{1}{a^5}$ în funcție de t.

R. 1) Folosind proprietățile operațiilor cu puteri:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ și $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, obținem:

$$\left(a^m + \frac{1}{a^m}\right)\left(a^n + \frac{1}{a^n}\right) - \left(a^{m-n} + \frac{1}{a^{m-n}}\right) = a^{m+n} + a^{m-n} + a^{n-m} + \frac{1}{a^{m+n}} -$$

$$- a^{m-n} - \frac{1}{a^{m-n}} = a^{m+n} + a^{m-n} + \frac{1}{a^{m-n}} + \frac{1}{a^{m+n}} - a^{m-n} - \frac{1}{a^{m-n}} = a^{m+n} + \frac{1}{a^{m+n}}.$$

2) $a^5 + \frac{1}{a^5} = \left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) - \left(a + \frac{1}{a}\right)$ și ținînd cont de identitățile de la exercițiul VIII. 31. avem:

$$a^5 + \frac{1}{a^5} = (t^3 - 3t)(t^2 - 2) - t = t^5 - 5t^3 + 5t.$$

VIII.33. 1) Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$, arătați că:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)\,[(b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2].$$

2 Dacă $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, atunci $a + b + c = 0$ sau $a = b = c$.

R. 1) Se efectuează calculele în membrul drept.

2) $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ este echivalentă cu $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc=0$, sa ținînd cont de 1): $\frac{1}{2}(a + b + c)[(b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2] = 0$, de unde rezultă $a + b + c = 0$ sau $(b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2 = 0$, adică $a = b = c$.

VIII.34.[PO] Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$, arătați că:

$$(a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) = 3(b + c)(c + a)(a + b).$$

Deduceți de aici că dacă: $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3$, atunci:

1) $(a + b + c)^5 = a^5 + b^5 + c^5$

2) $(a + b + c)^7 = a^7 + b^7 + c^7$

3) $(a + b + c)^{2n+1} = a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

R. Se efectuează calculele indicate în ambii membri. 1) Identitatea $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3$ este echivalentă cu $3(b + c)(c + a)(a + b) = 0$, de unde rezultă $a = -b$ sau $b = -c$ sau $c = -a$.

Fie deci $a = -b$. Atunci $(a + b + c)^5 = a^5 + b^5 + c^5$ este echivalent cu $c^5 = c^5$.

În mod analog identitatea este satisfăcută în celelalte cazuri. Identitățile de la 2) și 3) rezultă în același mod. La 3):

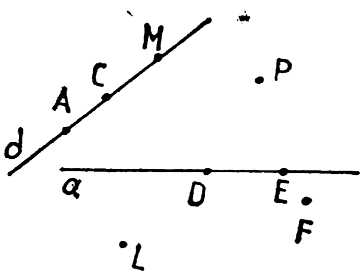
$$a^{2n+1} + (-a)^{2n+1} = a^{2n+1} + (-1)^{2n+1}a^{2n+1} = a^{2n+1} - a^{2n+1} = 0,$$

deoarece $(-1)^{2n+1} = -1$, $2n + 1$ fiind un număr natural impar.

CLASA A VIII-A

GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

§1. Puncte, drepte și plane în spațiu



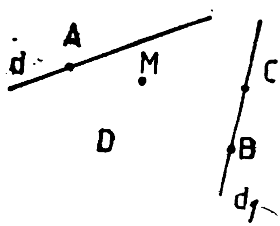
1.1 Folosiți desenul alăturat și găsiți valoarea logică a fiecăreia din afirmațiile:

a) $C \in d$; b) $C \in a$; c) $M \notin d$; d) $P \in a$; e) $D \notin d$; f) $F \notin a$; g) $A \in a$; h) $L \notin d$; i) $L \notin a$.

R. Afirmațiile au valoarea logică a) 1; b) 0; c) 0; d) 0; e) 1; f) 1; g) 0; h) 1; i) 1.

1.2. Puneți în evidență, într-un același desen, folosind convențiile învățate, următoarele propoziții adevărate: $A \in d$; $B \in d_1$; $C \in d_1$; $D \notin d$ și $D \notin d_1$; $M \notin d_1$ și $M \notin d$.

R Avem desenul:



1.3. Se dau punctele A, B, C, D diferite între ele. Cîte drepte se pot pune în evidență care să conțină cel puțin două din aceste puncte?

R. Folosim propoziția adevărată: dacă sînt date două puncte distincte, atunci ele determină o singură dreaptă.

Distingem trei cazuri:

a) 6 drepte: acestea sînt dr. AB, dr. AC, dr. AD, dr. BC, dr. BD, dr. CD; acestea există în cazul cînd oricare trei puncte sînt necoliniare.

b) 4 drepte: acestea sînt dr. AB, dr. AD, dr. BD și dr. CD în cazul cînd, de exemplu, A, B, C sînt coliniare, iar $D \notin$ dr. AB.

c) o singură dreaptă în cazul cînd toate punctele date sînt coliniare.

1.4. Scrieți toate dreptele determinate de punctele A, B, C, M, P în cazul cînd ele sînt puncte diferite între ele două cîte două și oricare trei necoliniare.

R. Avem dr. AB, dr. AC, dr. AM, dr. AP, dr. BC, dr. BM, dr. BP, dr. CM, dr. CP, dr. MP.

1.5. Scrieți dreptele care se pot determina știind că din patru puncte date A, B, E, D, diferite între ele, două cîte două, doar B, A, D aparțin unei drepte date d.

R. Deoarece $E \notin d$ (nu ,,se află'' pe d) avem dreptele : d, dr. BE, dr. AE, dr. DE.

1.6. Care este numărul cel mai mic de drepte determinate de 6 puncte diferite între ele, două cîte două? Dar numărul cel mai mare?

R. O singură dreaptă în cazul cînd cele 6 puncte sînt coliniare. Numărul cel mai mare este 15, dacă punctele sînt, de exemplu : vîrfurile unui hexagon convex.

1.7.PP;OP. Fie $A_1A_2A_3 \ldots A_9A_{10}$ un decagon convex. Cîte drepte care să conțină diagonalele lui se pot pune în evidență?

R. Vom enumera toate dreptele diferite ce se pun în evidență cu cele 10 puncte $A_1, A_2, \ldots, A_9, A_{10}$ folosind propoziția adevărată : dacă se dau două puncte diferite atunci există o singură dreaptă astfel încît punctele să aparțină ei. Pentru comoditate vom așeza dreptele astfel :

$$\begin{array}{lllllllll}
A_1A_2 & A_1A_3 & A_1A_4 & A_1A_5 & A_1A_6 & A_1A_7 & A_1A_8 & A_1A_9 & A_1A_{10} \\
 & A_2A_3 & A_2A_4 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & A_2A_9 & A_2A_{10} \\
 & & A_3A_4 & A_3A_5 & \ldots & \ldots & \ldots & A_3A_9 & A_3A_{10} \\
 & & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & & & & & & A_7A_8 & A_7A_9 & A_7A_{10} \\
 & & & & & & & A_8A_9 & A_8A_{10} \\
 & & & & & & & & A_9A_{10}
\end{array}$$

Se observă că există $9 + 8 + 7 + 6 + \ldots + 2 + 1$ drepte, adică $(9 + 1) + (8 + 2) + (7 + 3) + (6 + 4) + 5$, deci $4 \cdot (9 + 1) + 5 = 45$ drepte. Din acestea, conțin laturile următoarele : A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, $\ldots$, A_8A_9, A_9A_{10}, $A_{10}A_1$ adică 10.

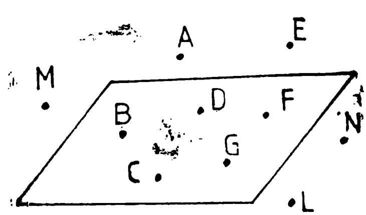
Rămîn $45 - 10 = 35$ drepte de tipul cerut.

1.8.PO. Fie $A_1A_2A_3 \ldots A_{11}A_{12}$ un dodecagon convex. Cîte drepte care să conțină diagonalele lui se pot pune în evidență?

R. Se pot pune, în evidență judecînd analog ca în problema precedentă, $66 - 12 = 54$ drepte.

1.9. Folosind desenul alăturat și convențiile învățate, scrieți valoarea logică a propozițiilor :

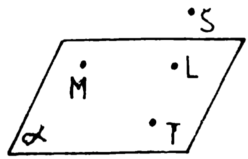
a) $A \notin \alpha$; b) $E \in \alpha$; c) $B \in \alpha$; d) $L \notin \alpha$; e) $D \in \alpha$; f) $D \notin \alpha$; g) $F \notin \alpha$; h) $M \in \alpha$; i) $G \notin \alpha$.



R. a) 1 ; b) 0 ; c) 1 ; d) 1 ; e) 1 ; f) 0 ; g) 0 ; h) 0 ; i) 0.

1.10. M, L, S, T sînt puncte diferite două cîte două, iar α este un plan. Folosind convențiile de desen învățate, realizați un desen știind că următoarele propoziții sînt adevărate simultan: $M \in \alpha$, $L \in \alpha$, $S \notin \alpha$, $T \in \alpha$.

R. Avem desenul:



1.11^{M}. Se dau dreapta d, planul α ($d \not\subset \alpha$), punctele A și B, care nu sînt situate nici în plan, nici pe dreaptă. Să se determine punctele $D \in d$ și $C \in \alpha$ astfel încît $ACBD$ (cu vîrfurile în această ordine) să fie paralelogram. *Discuție.*

R. Fie $D \in d$ și $C \in \alpha$ astfel încît $ACBD$ să fie paralelogram. Vom cerceta dacă este posibilă această alegere și în cîte moduri se poate face. Fie O punctul de intersecție al dreptelor AB și CD. Diagonalele paralelogramului se intersectează în O și O le împarte în segmente de aceeași lungime. Dacă dreapta d este mediatoarea segmentului $[AB]$, atunci alegem punctul C ca intersecție dintre α și d, iar D simetricul în raport cu O a lui C. Dacă $d \cap |AB| = \Phi$, atunci construim simetrica d' a dreptei d în raport cu O. Punem $d' \cap \alpha = \{C\}$, apoi punctul D este definit ca intersecție între dr. CO și d.

În cazul cînd $d \parallel \alpha$, construcția este posibilă numai dacă simetrica dreptei d în raport cu O se află inclusă în planul α, problema admițînd, în acest caz, o infinitate de soluții.

1.12. Fie α un plan, d o dreaptă și A, B, C trei puncte distincte. Este posibil să avem simultan relațiile $A \in d$, $B \in d$, $C \in d$, $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \notin \alpha$?

R. Folosim propozițiile $A \in d$, $B \in d$, $A \in \alpha$ și $B \in \alpha$. Conform afirmației: dacă o dreaptă are două puncte comune cu un plan atunci dreapta este inclusă în acel plan, rezultă că $d \subset \alpha$. Aceasta înseamnă că toate punctele lui d aparțin planului α. Dar atunci relațiile $C \in d$ și $C \notin \alpha$ se contrazic. Deci relațiile nu sînt posibile simultan.

1.13^{M}. Fie d și g două drepte coplanare, iar A și B două puncte astfel încît $A \in d$ și $B \in g$. Arătați că M, mijlocul lui (AB), aparține planului în care sînt incluse d și g.

R. Notăm cu α planul în care sînt incluse d și g. Deoarece $A \in d$ și $d \subset \alpha$, rezultă $A \in \alpha$. Deoarece $B \in g$ și $g \subset \alpha$ rezultă $B \in \alpha$.

În cazul cînd A și B sînt diferite, ele determină o singură dreaptă, dr. AB.

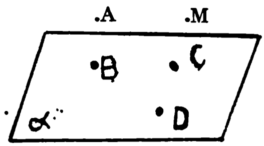
Se știe că dacă o dreaptă are două puncte distincte comune cu un plan, atunci dreapta este inclusă în acel plan.

Folosind această afirmație, din rezultatele precedente obținem că dr. $AB \subset \alpha$. Așadar, toate punctele dreptei AB aparțin planului α deci și M, mijlocul segmentului (AB), aparține lui α.

1.14. Paralelogramul $ABCD$ are diagonalele (AC) și (BD) incluse într-un plan α. Cercetați relațiile care există între laturile paralelogramului și planul α.

R. Deoarece (AC) și (BD) sînt incluse în planul α rezultă că cele patru puncte A, B, C, D aparțin planului α. Folosind proprietatea : dacă două puncte diferite ale unei drepte aparțin unui plan atunci dreapta este inclusă în acel plan, rezultă că $(AB) \subset \alpha$, $(BC) \subset \alpha$, $(CD) \subset \alpha$ și $(DA) \subset \alpha$.

1.15. Folosind desenul alăturat și convențiile învățate, găsiți relațiile (pozițiile) între dreptele diferite ce se pot determina cu ajutorul celor cinci puncte și planul α.



R. Avem situațiile : a) dr. AB, dr. AC, dr. AD, dr. MB, dr. MC, dr. MD concurente cu planul α.

b) dr. BC, dr. BD, dr. CD incluse în planul α. c) Despre dr. AM nu putem decide : ea poate fi ori paralelă cu planul α, ori concurentă cu planul α.

1.16^{M}. Dîndu-se patru puncte dintre care oricare trei sînt coliniare, cîte drepte determinate (de cîte două dintre ele) există?

R. Notăm punctele date astfel : A, B, C, D. Conform ipotezei, să presupunem, de exemplu, că A, B, C sînt coliniare și că ele determină dreapta d_1 ; de asemenea că B, C, D sînt coliniare, determinînd dreapta d_2.

Constatăm că $B \in d_1$ și $C \in d_1$, dar $B \in d_2$ și $C \in d_2$. Se cunoaște propoziția adevărată : dacă două puncte diferite aparțin la două drepte atunci dreptele coincid. Aplicînd acest rezultat în cazul nostru obținem că $d_1 = d_2$ deci cele două drepte coincid și putem vorbi de o singură dreaptă.

1.17. Fie punctele A, B, E, F, M, dintre care oricare trei sînt necoliniare, iar α și β sînt plane. Sînt date următoarele propoziții simultan adevărate : $A \in \alpha$, $B \in \beta$, $A \in \beta$, $F \in \beta$, $E \in \beta$, $M \in \alpha$, $B \in \alpha$, $M \in \beta$.

a) Cercetați în ce relație (poziție) se găsesc planele α și β;

b) Sînt adevărate propozițiile : $F \in \alpha$ și respectiv, $E \in \alpha$?

R. a) Se știe că dacă trei puncte necoliniare aparțin la cîte două plane atunci cele două plane coincid. În cazul nostru avem :

$$A \in \alpha \text{ și } A \in \beta,\ B \in \alpha \text{ și } B \in \beta,\ M \in \alpha \text{ și } M \in \beta$$

deci $\alpha = \beta$.

b) Deoarece α și β coincid și cum $F \in \beta$ și $E \in \beta$ rezultă că $F \in \alpha$ și $E \in \alpha$ și deci cele două propoziții sînt adevărate.

1.18. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare, diferite două cîte două. Scrieți planele diferite ce se pot pune în evidență cu aceste puncte.

R. Avem planele $\alpha_1 = (A, B, C)$, $\alpha_2 = (A, B, D)$, $\alpha_3 = (A, C, D)$, $\alpha_4 = (B, C, D)$.

1.19. Dîndu-se cinci puncte A, B, C, D E, dintre care oricare patru sînt coplanare și nu toate coliniare, cîte plane determinate (de cîte trei dintre ele) există?

R. Fie, de exemplu, A, B, C, D coplanare oricare trei necoliniare, Notăm cu α planul la care aparțin ele. Conform ipotezei, și punctele B, C, D, E sînt coplanare. Notăm cu β planul la care aparțin ele. Se știe că dacă două plane au cîte trei puncte necoliniare comune atunci planele coincid. În cazul nostru $B \in \alpha$ și $B \in \beta$, $C \in \alpha$ și $C \in \beta$, $D \in \alpha$ și $D \in \beta$. Rezultă că $\alpha = \beta$ și deci există un singur plan.

Dacă există trei puncte — fie acestea, de exemplu, A, B, C — coliniare, există o infinitate de plane ce conțin aceste puncte.

1.20^M^. Se dau cinci puncte, printre care nu există trei coliniare. Cîte plane, care să conţină trei dintre ele, se pot duce?

R. Presupunem că oricare patru puncte sînt necoplanare. Deoarece trei puncte determină un plan, notînd cu P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 punctele date vom avea 10 plane determinate de cîte trei din cele cinci puncte şi anume:

(P_1, P_2, P_3), (P_1, P_2, P_4), (P_1, P_2, P_5), (P_1, P_3, P_4), (P_1, P_3, P_5), (P_2, P_3, P_4), (P_2, P_3, P_5), (P_1, P_4, P_5), (P_2, P_4, P_5), (P_3, P_4, P_5).

Să presupunem, acum, că patru puncte sînt coplanare — fie ele P_1, P_2, P_3, P_4 — iar al cincilea, P_5 nu aparţine planului determinat de primele patru. În acest caz vom avea planel (P_1, P_2, P_3, P_4), (P_5, P_1, P_2), (P_5, P_1, P_3), (P_5, P_1, P_4), (P_5, P_2, P_3), (P_5, P_2, P_4), (P_5, P_3, P_4).

Cînd toate punctele sînt coplanare, evident, ele determină un singur plan.

1.21. Se dau 6 puncte, printre care nu există trei coliniare. Cîte plane, care să conţină trei dintre ele, pot fi determinate?

1.22. Triunghiul ABC are latura $[BC]$ inclusă într-un plan α. Se ştie că $A \notin \alpha$. a) Cîte plane distincte sînt determinate?

b) Dar dacă se mai dă punctul D astfel încît $D \in \alpha$ şi $D \notin$ dr. BC?

R. a) (A, B, C) şi α;

b) (A, B, C); (A, B, D); (A, C, D); $(B, C, D) = \alpha$.

1.23. Fie A, B, C, D, M, S şase puncte, dintre care oricare trei sînt necoliniare, iar α şi β două plane distincte.

Decideţi relaţia dintre planele α şi β în cazul cînd sînt adevărate simultan următoarele propoziţii: $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $M \in \beta$, $C \in \alpha$, $D \in \alpha$, $B \in \beta$, $S \in \beta$, $M \notin \alpha$, $S \notin \alpha$.

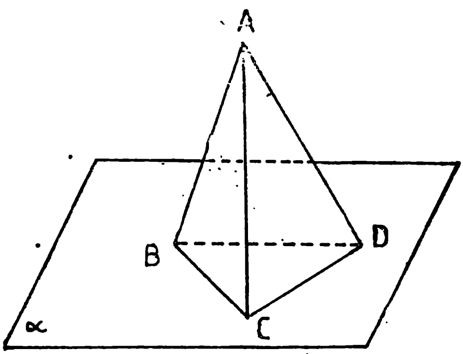
R. Constatăm că $B \in \alpha$ şi $B \in \beta$ adică cele două plane distincte au un punct comun, deci ele sînt concurente.

1.24. Se dau planele distincte α şi β. Se ştie că $\alpha \cap \beta = d$, $A \in \alpha$ şi $A \in \beta$. Ce se poate spune despre A şi d?

R. Faptul că $\alpha \cap \beta = d$ se traduce astfel: planele α şi β sînt concurente şi au în comun dreapta d. Relaţiile $A \in \alpha$ şi $A \in \beta$ se traduc prin faptul că punctul A este comun planelor α şi β. Punctele comune celor două plane concurente aparţin dreptei de intersecţie d. Aşadar, $A \in d$.

1.25. Se dau planele α şi β astfel încît $\alpha \cap \beta = d$ şi un punct A cu proprietatea că $A \in \alpha$ şi $A \in \beta$ şi $A \notin d$. În ce relaţie sînt planele α şi β?

R. Din ipoteză, $\alpha \cap \beta = d$. Înseamnă că planele α şi β au comună dreapta d. Există cel puţin două puncte B şi C distincte ce aparţin dreptei d, deci şi planelor α şi β. De asemenea, punctul A, potrivit ipotezei, este comun celor două plane. Cum $A \notin d$, punctele A, B şi C sînt puncte necoliniare. Deoarece ele sînt comune celor două plane şi sînt necoliniare, rezultă că planele coincid şi putem scrie $\alpha = \beta$.



1.26^M. Fiind date patru puncte necoplanare, după cîte drepte se intersectează planele determinate de cîte trei din aceste puncte?

R. Fie A, B, C, D punctele date. Se observă că se obţin şase drepte de intersecţie, după cum urmează:

$(ABC) \cap (BCD) =$ dr. BC; $(ABC) \cap (ACD) =$ dr. AC; $(ABC) \cap (ABD) =$ dr. AB; $(ACD) \cap (BCD) =$ dr. CD; $(ACD) \cap (ABD) =$ dr. AD; $(ABD) \cap (BCD) =$ dr. BD.

1.27. Dacă în ipoteza unei probleme sau teoreme sînt date o dreaptă d şi un punct $A \notin d$, ce concluzie se poate desprinde?

R. Putem afirma că este determinat un singur plan.

1.28. Fie dreapta d şi punctele A şi B distincte astfel încît $A \notin d$ şi $B \notin d$.

a) În ce relaţie este dr. AB cu dreapta d?

b) Cîte plane distincte se pot pune în evidenţă?

c) În ce relaţie este dr. AB cu planele găsite la punctul b)?

R. a) Avem situaţiile: dr. $AB \parallel d$, dr. AB concurentă cu d, dr. AB este necoplanară cu d.

b) Se ştie că dacă avem două drepte paralele atunci avem un singur plan în aşa fel încît cele două drepte să fie incluse în el. Deci, dacă dr. $AB \parallel d$, avem un singur plan α.

Se ştie că dacă avem două drepte concurente atunci avem un singur plan în aşa fel încît cele două drepte să fie incluse în el. Deci dacă dr. AB este concurentă cu d, avem un singur plan β. În cazul cînd dr. AB este necoplanară cu d, avem două plane diferite (d, A) şi (d, B).

c) Avem, respectiv: dr. $AB \subset \alpha$; dr. $AB \subset \beta$; dr. AB concurentă cu (d, A), şi dr. AB concurentă cu (d, B).

1.29. Triunghiul ABC are latura $[BC]$ inclusă într-un plan α. Se ştie că $A \in \alpha$.

a) Cîte plane distincte se pot pune în evidenţă cu datele respective?

b) Ce relaţie este între dr. AM şi α, dacă M este mijlocul lui $[BC]$?

R. a) Dreapta BC şi punctul $A \notin$ dr. BC determină un plan β, căruia îi aparţin punctele A, B şi C. Aceste puncte A, B, şi C aparţin şi planului α. Deci, cele două plane au cîte trei puncte necoliniare comune. Rezultă $\alpha = \beta$. Aşadar, există un singur plan.

b) Deoarece dr. $BC \subset \alpha$, rezultă că şi $[BC] \subset \alpha$. Obţinem că $M \in \alpha$. Cum $A \in \alpha$, avem că dr. $AM \subset \alpha$.

1.30. Paralelogramul $ABCD$ are (BC) inclusă într-un plan α. Punctul O, intersecţia diagonalelor paralelogramului, aparţine planului α.

a) Demonstraţi că planul determinat de dr. BC şi punctul O este confundat cu planul α.

b) În ce relaţie este dr. AB faţă de α? Dar dr. AC? Dar dr. BD?

R. a) Notăm cu β planul determinat de dr. BC şi punctul O. Constatăm că dr. BC este inclusă în cele două plane α şi β. Aceasta înseamnă că cel puţin două puncte B şi C ale dreptei aparţin celor două plane. Cele două plane mai au comun şi punctul O.

Rezultă că cele două plane au trei puncte necoliniare comune deci planele coincid.

b) $A \in \beta$, dar $\alpha = \beta$; rezultă că $A \in \alpha$. Dar şi B aparţine celor două plane. Dacă o dreaptă are două puncte comune cu un plan atunci acea dreaptă este inclusă în acel plan. Aşadar, dr. $AB \subset \alpha$. Asemănător raţionăm şi găsim că: dr. $AC \subset \alpha$; dr. $BD \subset \alpha$.

1.31[PO]. a) Găsiţi valoarea logică a afirmaţiilor: p_1: „$|2 - 5| = |5 - 2|$"; p_2: „$|a - b| = |b - a|$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$".

b) Se dă un plan α. Dreapta d intersectează pe α în P. Fie A, B şi Q trei puncte astfel încît $A \notin \alpha$, $B \notin \alpha$, $Q \in \alpha$, $A \in d$, $B \in d$ şi $P \neq Q$. Dacă ordinea pe d este A, B, P, exprimaţi măsurile următoare:

$$PA - PB,\ AB + BP,\ BP.$$

Găsiţi valoarea logică a afirmaţiilor:
p_3: „$PA - AB \geqslant |QP - QB|$", p_4: „$|QB - QP| \leqslant PA - AB$".

R. a) Avem $|2 - 5| = |-3| = 3$; $|5 - 2| = |3| = 3$. Deci p_1 este adevărată.

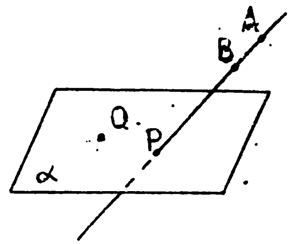
În continuare:

$$|b - a| = |-a + b| = |-(a - b)| =$$
$$= |-1| \cdot |a - b| = |a - b|.$$

Această relaţie arată că p_2 este adevărată.

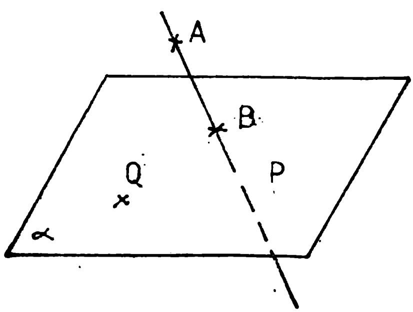
b) Avem:

$$PA - PB = AB;\ AB + BP = AP,\ BP = PA - AB.$$



Deoarece $PA - AB = BP$, p_3 devine $BP \geqslant |QP - QB|$. Punctele Q, P, B sînt necoliniare şi formează triunghiul QPB la care măsura laturii (BP) este mai mare ca modulul diferenţei măsurilor celorlalte două laturi deci p_3 adevărată.

Asemănător, $PA - AB = BP$; din nou în triunghiul QPB avem $|QB - QP| < BP$ şi deci p_4 e adevărată.



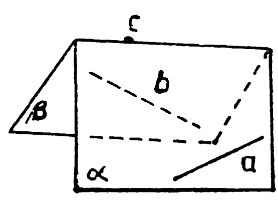
1.32[M]. În desenul alăturat punctele A şi B nu aparţin planului α. Dacă $\{P\} = $ dr. $AB \cap \alpha$ şi Q un punct oarecare al planului, arătaţi că:

$$PA - PB \geqslant |QA - QB|.$$

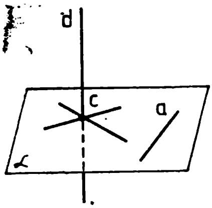
R. Pentru triunghiul ABQ putem scrie relaţia $AB \geqslant |QA - QB|$. Cum se constată că $PA - PB = AB$, rezultă:

$$PA - PB \geqslant |QA - QB|.$$

1.33[V]. Se dau două drepte necoplanare a şi b şi un punct C. Să se arate că există (şi să se construiască) prin C o dreaptă coplanară atît cu a cît şi cu b.



R. Presupunem că $C \notin a$ şi $C \notin b$ ca în desenul alăturat. Din ipoteză avem o dreaptă a şi un punct C care nu-i aparţine, deci există un unic plan pe care-l notăm cu $\alpha(a;\ C)$. Tot din ipoteză avem o dreaptă b şi un punct C care nu-i aparţine deci există un alt plan unic, pe care-l notăm cu $\beta(b,\ C)$. Cele două plane α şi β au punctul C comun deci sînt concurente



după o dreaptă, dreapta lor de intersecție fiind dreapta cerută și ea este unică.

Presupunem că avem $C \in b$, ca în desenul alăturat. Avem planul $\alpha(a, C)$. În planul α există o infinitate de drepte ce sînt concurente în C (coplanare deci cu a). Fiecare este concurentă în C și cu dreapta b, deci coplanară și cu b. Deci există o infinitate de drepte care satisfac enunțul problemei.

Demonstrăm asemănător situația cînd $C \in a$.

1.34. Triunghiul ABC are laturile (AB) și (AC) incluse într-un plan α.

a) Enumerați planele ce se pot pune în evidență; b) În ce relații (poziții) sînt aceste plane? c) Piciorul înălțimii din A aparține planului α?

R. a) Avem următoarele plane: α, $\alpha_1(A; B; C)$, α_2 (dr. AB; C), α_3(dr. BC; A), α_4(dr. AC; B), α_5(dr. BC; dr. BA), α_6(dr. AB; dr. AC), α_7(dr. AC; dr. BC).

b) Confundate (de egalitate) pentru că toate au punctele A, B, C necoliniare comune.

c) Da. Piciorul înălțimii din A aparține dreptei BC. Dreapta BC este inclusă în planul α, deci piciorul înălțimii aparține planului α.

1.35. Paralelogramul $ABCD$ are laturile (AB) și (CD) incluse în planul α.

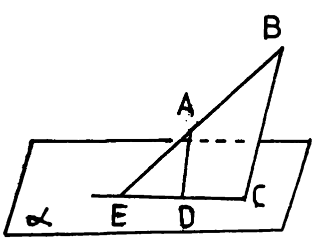
a) Enumerați planele ce se pot pune în evidență folosind teorema: dacă avem două drepte paralele, atunci avem un singur plan astfel încît cele două drepte să fie incluse în el.

b) În ce relații se află aceste plane cu planul α?

c) Punctul O de intersecție al diagonalelor paralelogramului aparține planului α?

R. a) Avem planele α_1(dr. AB; dr. CD), α_2(dr. AD; dr. CB). b) $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \alpha$. c) Deoarece dr. $AB \subset \alpha$, rezultă că $A \in \alpha$. Deoarece dr. $CD \subset \alpha$, rezultă că $C \in \alpha$. Cum $A \in \alpha$ și $C \in \alpha$ înseamnă că dr. $AC \subset \alpha$. Punctul O aparține diagonalei (AC), deci $O \in \alpha$.

1.36^{PP}. Trapezul $ABCD$ are numai una din laturile neparalele, (DC), inclusă într-un plan α. Notăm cu E intersecția dintre dr. AB și α. Cercetați dacă punctele D, C, E formează un triunghi.



R. Se știe din ipoteză că (DC) este latură neparalelă deci avem dr. $AD \parallel$ dr. BC. Aceste două drepte paralele determină un singur plan pe care-l notăm cu β.

Intersecția dintre α și β este dr. DC. Deoarece $E \in$ dr. AB și dr. $AB \subset \beta$ rezultă că $E \in \beta$, dar $E \in \alpha$ (din ipoteză).

Așadar, punctul E aparține intersecției celor două plane care este dr. DC. Deci $E \in$ dr. DC, adică punctele E, D, C sînt puncte coliniare și nu formează un triunghi.

1.37^{M}. Trapezul $ABCD$ are latura neparalelă (CD) situată în planul α. Punctele A și B nu aparțin planului α.

Dacă $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm, $CD = 4$ cm, $AD = 6$ cm, calculați DE, E fiind punctul în care dr. AB intersectează planul α.

R. Folosim problema anterioară și deducem că D, C, E sînt coliniare. Deci punctul E aparține planului în care este inclus trapezul. Deoarece dr. $AD \parallel$ dr. BC, din teorema fundamentală a asemănării avem că triunghiurile ADE și BCE sînt asemenea.

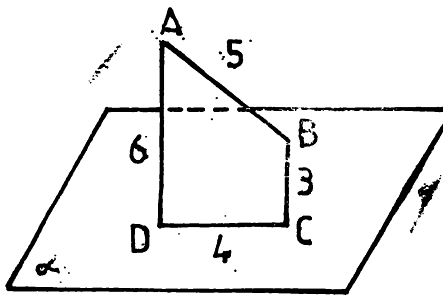
Deci :

$$\frac{BE}{AE}=\frac{CE}{DE}=\frac{BC}{AD}$$

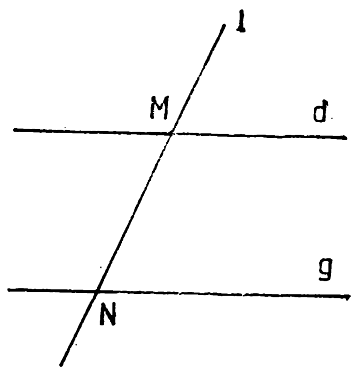
Dar $DE = CE + 4$; $BC = 3$; $AD = 6$, de unde :

$$\frac{CE}{4+CE}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Din aceasta, obținem $2CE = 4 + CE$, de unde $CE = 4$ cm și deci $DE = CE + 4 = 4 + 4 = 8$ (cm).

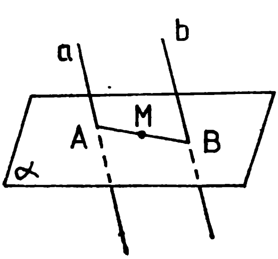


1.38[M]**.** Se dau dreptele paralele d și g. Arătați că toate dreptele care au un punct comun cu d și unul cu g sînt conținute în planul determinat de d și g.



R. Fie π planul determinat de dreptele d și g care sînt paralele și fie l o dreaptă care intersectează dreapta d în punctul M și dreapta g în punctul N. Atunci, deoarece $M \in d$ și $d \subset \pi$, avem $M \in \pi$. La fel, $N \in g$ și cum $g \subset \pi$, rezultă $N \in \pi$.

Deci dreapta l, avînd două puncte diferite ce aparțin planului π, este inclusă în acest plan.

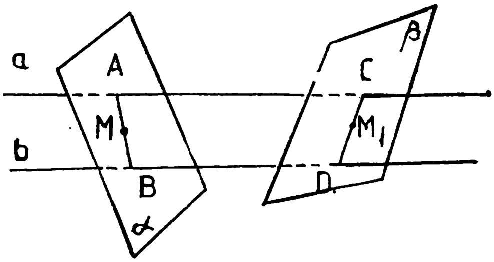


1.39. Două drepte paralele a și b intersectează un plan α în punctele A și respectiv B. În ce relație se află mijlocul lui (AB) cu planul determinat de dreptele a și b? Dar cu planul α?

R. Notăm cu β planul determinat de dreptele paralele a și b. Avem deci $a \subset \beta$ și $b \subset \beta$. Din ipoteză știm că $a \cap \alpha = \{A\}$, deci $A \in a$. Cum $a \subset \beta$ rezultă că $A \in \beta$ (1). Din ipoteză știm că $b \cap \alpha = \{B\}$, deci $B \in b$. Cum $b \subset \beta$ rezultă că $B \in \beta$ (2). Punctele A și B fiind diferite, determină dr. AB. Din (1) și (2), dr. AB are două puncte comune cu planul β; obținem că dr. $AB \subset \beta$. Mijlocul M al lui (AB) aparține dreptei AB, deci $M \in \beta$. Demonstrăm asemănător că $M \in \alpha$.

1.40[PO]. Un plan α intersectează dreptele paralele a și b în punctele A și respectiv B. Un alt plan β intersectează dreptele a și b în punctele C și respectiv D. Notăm cu M mijlocul lui (AB) și cu M_1 mijlocul lui (CD). Cercetați dacă:

a) dr. MM_1 este inclusă în planul determinat de dreptele a și b; b) dr. $MM_1 \parallel a$.

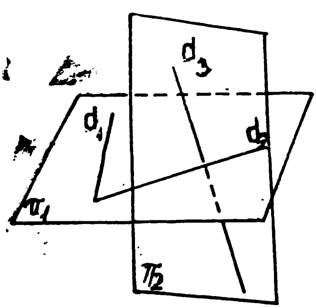


R. a) Din ipoteză, $a \parallel b$. Ele determină un singur plan. Notăm acest plan cu γ. Din ipoteză avem $a \cap \alpha = \{A\}$ și $b \cap \alpha = \{B\}$. Rezultă că $A \in a$ și $B \in b$. Deoarece $a \subset \gamma$ și $b \subset \gamma$, obținem că dr. $AB \subset \gamma$ (1). Din ipoteză, M este mijlocul lui (AB). Avem $M \in (AB)$. Dar $(AB) \subset$ dr. AB și deci $M \in$ dr. AB. Folosim (1) și rezultă că $M \in \gamma$ (2).

Din ipoteză avem $a \cap \beta = \{C\}$ și $b \cap \beta = \{D\}$. Rezultă că $C \in a$ și $D \in b$. Deoarece $a \subset \gamma$ și $b \subset \gamma$, obținem că dr. $CD \subset \gamma$ (3). Din ipoteză, M_1 este mijlocul lui (CD). Avem $M_1 \in (CD)$. Dar $(CD) \subset$ dr. CD și deci $M_1 \in$ dr. CD. Folosim (3) și rezultă că $M_1 \in \gamma$ (4). Din (2) și (4) găsim că dr. $MM_1 \subset \gamma$.

b) În planul γ patrulaterul convex $ABDC$ este un trapez, iar (MM_1) este linie mijlocie și deci dr. $MM_1 \parallel a$.

1.41[M]. Dacă dreapta d_1 este coplanară cu d_2, și d_2 este coplanară cu d_3, rezultă că d_1 este coplanară cu d_3?

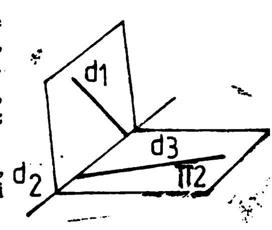


R. Dreptele d_1 și d_2 determină un plan π_1; la fel, dreptele d_2 și d_3 determină un plan π_2. Avem relația $\pi_1 \cap \pi_2 = d_2$, deci d_1 și d_3 pot fi situate în plane diferite, nu neapărat coplanare, cum se poate vedea și în desenele alăturate.

Comentariu. Problema ne conduce la concluzia că relația „... este coplanară cu..." în mulțimea de drepte nu este o relație tranzitivă. Pentru a demonstra acest adevăr a fost suficient un contraexemplu, adică un exemplu în care proprietatea nu este adevărată.

S-au întîlnit în școală multe relații tranzitive. Astfel, relația: „...divide pe..." în mulțimea $\mathbb{Z}$ este o relație tranzitivă, adică: dacă a, b și c sînt numere întregi în așa fel încît a divide pe b și b divide pe c atunci a divide pe c.

Relația „... este divizibil cu...", în mulțimea $\mathbb{Z}$, este o relație tranzitivă, adică: dacă a, b și c sînt numere întregi în așa fel încît a este divizibil cu b și b este divizibil cu c atunci a este divizibil cu c.



Relația „...este paralelă cu...", în mulțimea de drepte incluse în același plan, este o relație tranzitivă, adică: dacă d_1, d_2, d_3 sînt drepte coplanare în așa fel încît $d_1 \parallel d_2$ și $d_2 \parallel d_3$ atunci $d_1 \parallel d_3$.

Relația „...este mai mic...", în $\mathbb{R}$, este o relație tranzitivă, adică: dacă x, y, z sînt numere reale astfel încît $x < y$ și $y < z$ atunci $x < z$.

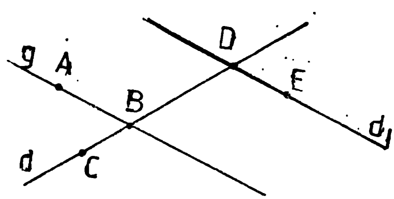
Relația „...este egal cu..." în $\mathbb{R}$, este o relație tranzitivă, adică: dacă $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ astfel încît $a = b$ și $b = c$ atunci $a = c$.

Relaţia „...este congruent cu...", în mulţimea de triunghiuri, este o relaţie tranzitivă, adică : dacă $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ şi $\Delta MNP \equiv \Delta STP$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta STP$.

1.42. Se dau dreptele d şi g concurente în M şi o dreaptă d_1 concurentă şi cu d şi cu g în A şi respectiv B. În ce relaţii este dreapta d_1 cu planul determinat de d şi g? Dar o altă dreaptă d_2 concurentă cu d şi g?

R. Notăm cu α planul determinat de d şi g. Avem $d \subset \alpha$ şi $g \subset \alpha$. Din ipoteză avem d_1 concurentă cu d, înseamnă că $d_1 \cap d = \{A\}$. Aşadar, $A \in d$. Cum $d \subset \alpha$, rezultă că $A \in \alpha$ (1). Din ipoteză avem d_1 concurentă cu g. Înseamnă că $d_1 \cap g = \{B\}$. Aşa dar, $B \in g$. Cum $g \subset \alpha$ rezultă că $B \in \alpha$ (2). Din (1) şi (2) obţinem că dr. $AB \subset \alpha$. Dar dr. $AB = d_1$, adică $d_1 \subset \alpha$. Asemănător demonstrăm pentru orice dreaptă, d_2, concurentă cu d şi g. Deci $d_2 \subset \alpha$.

1.43[PO.PP]**.** Se dau dreptele d şi g concurente în B şi o dreaptă d_1 concurentă cu d în alt punct notat cu D şi paralelă cu g. În ce relaţie este d_1 cu planul determinat de dreptele d şi g?



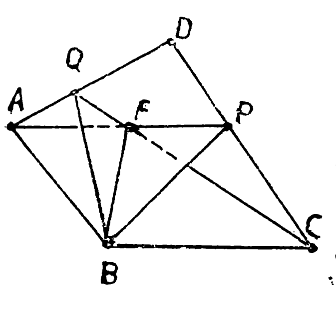
R. Notăm cu α planul determinat de d şi g. Considerăm $A \in g$ şi $C \in d$ astfel încît $A \neq B$ şi $C \neq B$. Avem, deci, $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$, $D \in \alpha$ (1). Notăm cu β planul determinat de d_1 şi d. Considerăm $E \in d_1$, $E \neq D$. Avem, deci, $B \in \beta$, $C \in \beta$, $D \in \beta$, $E \in \beta$ (2). Notăm cu γ planul determinat de d_1 şi g.

Avem, deci, $A \in \gamma$, $B \in \gamma$, $D \in \gamma$, $E \in \gamma$ (3). Din (1) şi (2) se observă că planele α şi β au comune punctele B, C şi D, deci $\alpha = \beta$ (4). Din (2) şi (3) se observă că planele β şi γ au comune punctele B, D şi E, deci $\beta = \gamma$ (5). Din (4) şi (5), datorită faptului că relaţia „... este confundat cu..." în mulţimea de plane este o relaţie tranzitivă, avem că $\alpha = \gamma$. Deoarece $d_1 \subset \gamma$, rezultă că $d_1 \subset \alpha$.

1.44[M.PO]**.** Dîndu-se două drepte concurente d şi g, găsiţi în care mulţime de puncte este inclusă mulţimea de puncte ce aparţin tuturor dreptelor care „se sprijină" pe d şi sînt paralele cu g. Prin „se sprijină" se înţelege că sînt concurente.

R. În problema anterioară, dreapta d_1 este una din dreptele care „se sprijină" pe d, în D, şi este paralelă cu g. S-a demonstrat că această dreaptă este inclusă în planul α determinat de dreptele d şi g. Există o infinitate de puncte cu aceeaşi proprietate ca D, ce aparţin dreptei d. Prin fiecare se poate pune în evidenţă cîte o dreaptă cu aceeaşi proprietate ca d_1. Fiecare din aceste drepte este inclusă în planul α. Aşadar, toate punctele acestor drepte formează o mulţime inclusă în planul determinat de dreptele d şi g.

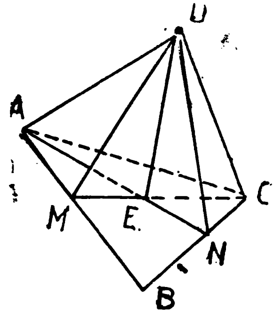
1.45[PO]**.** Se dau punctele A, B, C, D necoplanare, iar $Q \in (AD)$ şi $P \in (DC)$. a) Puneţi în evidenţă într-un desen intersecţia planelor (P, A, B) şi (Q, B, C); b) Ce fel de plane sînt planele (A, D, C), (P, A, B), (Q, B, C)?



R. a) Avem desenul alăturat unde intersecţia aste dr. FB.

b) Demonstraţia este asemănătoare ca la problema ce urmează. Cele trei plane sînt plane concurente într-un singur punct F.

1.46[PO.PP]**.** Se dau punctele A, B, C, D necoplanare, iar $M \in (AB)$ şi $N \in (BC)$. a) Puneţi în evidenţă într-un desen intersecţia planelor (M, C, D) şi (N, D, A); b) Ce fel de plane sînt planele (A, B, C), (M, C, D) şi (N, D, A)?



R. a) În desenul alăturat, intersecţia cerută este dr. DE.

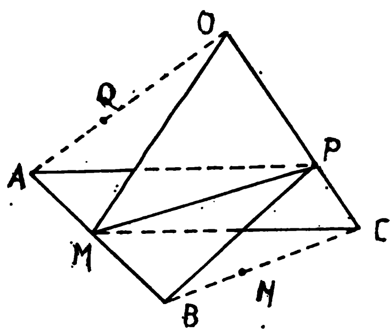
b) Deoarece $M \in (AB)$ şi $N \in (BC)$, din ipoteză, rezultă că (AN) şi (CM) au un singur punct comun, pe care-l notăm cu E. Deoarece $N \in (BC)$ şi dr. $BC \subset (A, B, C)$ rezultă că $N \in (A, B, C)$. Cum $E \in (AN)$ şi dr. $AN \subset (A, B, C)$, avem că $E \in (A, B, C)$. (1). De asemenea din $E \in (AN)$ şi dr. $AN \subset (N, D, A)$ rezultă că $E \in (N, D, A)$ (2).

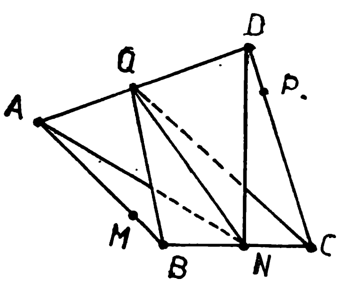
Din $E \in (CM)$ şi dr. $CM \subset (M, C, D)$ rezultă că $E \in (M, C, D)$ (3). Punctul D este comun planelor (M, C, D) şi (N, D, A). Din (2) şi (3), E este comun planelor (M, C, D) şi (N, D, A). Avem, deci, $(N, D, A) \cap (M, C, D) =$ dr. DE, care are, conform cu (1) un singur punct, pe E, comun cu (A, B, C). Aşadar, cele trei plane sînt plane concurente într-un singur punct E.

1.47[PO.PP]**.** Se dau punctele A, B, C, D, necoplanare şi M, N, P, Q coplanare astfel încît $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (DC)$, $Q \in (AD)$. a) Puneţi în evidenţă în desen planele (M, C, D) şi (P, A, B) şi apoi găsiţi relaţia dintre ele. b) Ce fel de plane sînt planele (M, C, D), (P, A, B) şi (M, N, P, Q)?

R. a) Avem $M \in (M, C, D)$; $M \in (AB)$ şi dr. $AB \subset (P, A, B)$ deci $M \in (P, A, B)$. Rezultă că $M \in (M, C, D) \cap (P, A, B)$ (1). Avem $P \in (P, A, B)$; $P \in (DC)$ şi dr. $DC \subset (M, C, D)$, deci $P \in (M, C, D)$. Rezultă că $P \in (P, A, B) \cap (M, C, D)$ (2). Din (1) şi (2) avem că cele două plane (M, C, D) şi (P, A, B) au comună dr. MP.

b) S-a demonstrat că planele (M, C, D) şi (P, A, B) au ca dreaptă comună dr. MP. Dar dr. $MP \subset (M, N, P, Q)$ căci au punctele M şi P comune. Rezultă că cele trei plane sînt trei plane concurente după dr. MP.





1.48[PO.PP]**.** Se dau punctele A, B, C, D necoplanare şi M, N, P, Q coplanare astfel încît $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (DC)$, $Q \in (AD)$.

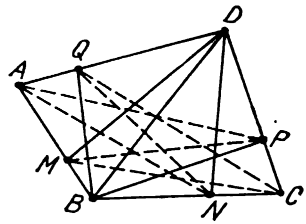
a) Puneţi în evidenţă în desen planele (N, D, A) şi (Q, B, C) şi apoi găsiţi relaţia dintre ele. b) Ce fel de plane sînt planele (N, D, A), (Q, B, C) şi (M, N, P, Q)?

R. a) Se demonstrează asemănător ca la problema anterioară că planele (N, D, A) şi (Q, B, C) au comună dr. QN.

b) Cele trei plane sînt trei plane concurente după dr. QN.

1.49[PO]**.** Se dau punctele A, B, C, D necoplanare şi un plan care intersectează pe (AB), (BC), (CD) şi (DA) respectiv în punctele M, N,

P, Q. Arătaţi că planele (M, C, D), (N, D, A), (P, A, B), (Q, B, C) au nn punct comun.



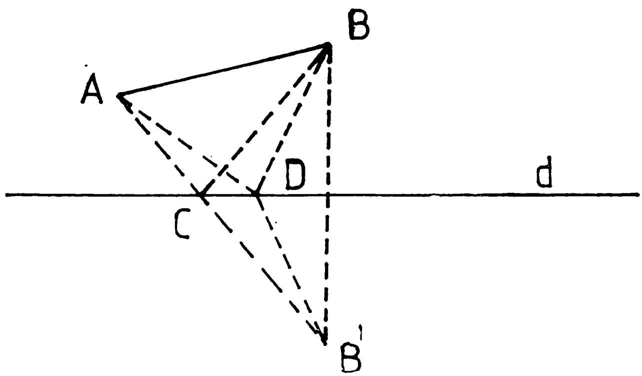
R. Din rezolvarea celor două probleme anterioare s-a găsit că planele (M, C, D), $(P\ A, B)$ şi (M, N, P, Q) au dreaptă comună, dr. MP. Apoi că planele (N, D, A), (Q, B, C) şi (M, N, P, Q) au în comun dr. NQ.

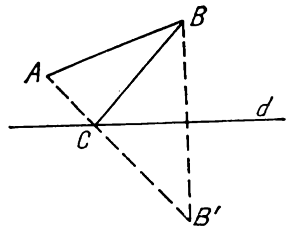
Deoarece punctele M, N, P, Q sînt coplanare, dreptele MP şi NQ conţinînd diagonalele patrulaterului $MNPQ$ au un singur punct comun, comun şi celor patru plane.

1.50.[PO]. Se dau dreapta d şi punctele A şi B situate în acelaşi semiplan (determinat de dreapta d). Construiţi un triunghi care să aibă vîrfurile în punctele A şi B, iar vîrful al treilea să fie pe dreapta d astfel încît perimetrul triunghiului să fie minim.

R. Considerăm construcţia ca în desenul alăturat. Dreapta d şi punctele A şi B sînt coplanare, din ipoteză.

Punctele A şi B fiind fixe, lungimea segmentului AB este constantă. Perimetrul triunghiului ABC va fi minim cînd suma lungimilor laturilor (AC) şi (CB) este minimă.





Fie B' simetricul punctului B faţă de dreapta d. Dreapta AB' intersectează dreapta d în punctul C. Mai considerăm punctul oarecare D pe dreapta d, $D \neq C$. Rezultă egalităţile : $BC = B'C$ şi $BD = B'D$.

În triunghiul $AB'D$ avem : $AC + CB' < AD + DB'$ adică :

$$AC + CB < AD + DB.$$

Deci construcţia o efectuăm astfel : Construim simetricul punctului B (sau al punctului A) faţă de dreapta d. Punctul obţinut îl unim cu punctul A (în cazul celălalt cu B). Această dreaptă intersectează dreapta d în punctul care este al treilea vîrf al triunghiului cerut.

Observaţii. 1. Dacă (AB) este paralel cu dreapta d atunci al treilea vîrf al treilea vîrf al unghiului cerut este punctul în care mediatoarea lui (AB) intersectează dreapta d. 2. Dacă $(AB) \perp d$, atunci problema nu are soluţie.

§ 2. PARALELISM ÎN SPAŢIU

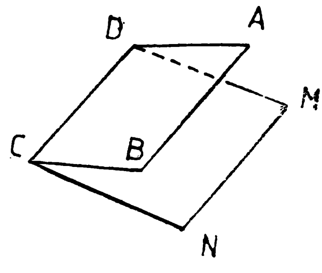
2.1. Două trapeze $ABCD$ şi $MNCD$ au ca bază comună pe (CD) şi sînt situate în plane diferite. În ce relaţie este dr. AB cu dr. MN?

R. Din ipoteză $ABCD$ este trapez unde (CD) este bază, deci şi (AB) este bază. Rezultă că dr. $AB \parallel$ dr. CD (1).

Din ipoteză $MNCD$ este trapez unde (CD) este bază, deci şi (MN) este bază. Rezultă că dr. $CD \parallel$ dr. MN (2).

Din (1) şi (2), datorită faptului că relaţia „este paralelă" în mulţimea de drepte din spaţiu este o relaţie tranzitivă, rezultă că dr. $AB \parallel$ dr. MN.

2.2. Paralelogramele $ABCD$ şi $CDMN$ au latura (CD) comună şi sînt în plane diferite. a) Demonstraţi că dr. AN este concurentă cu dr. BM. b) Demonstraţi că dr. $AM \parallel$ dr. BN.



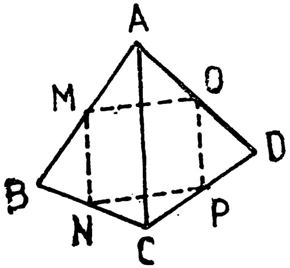
R. a) $ABCD$ fiind paralelogram rezultă că dr. $AB \parallel$ dr. CD (1) şi că $AB=CD$ (2). $CDMN$ fiind paralelogram rezultă că dr. $CD \parallel$ dr. MN (3) şi că $CD = MN$ (4). Conform tranzitivităţii, din (1) şi (2) obţinem că dr. $AB \parallel$ dr. MN (5), iar din (2) şi (4) avem că $AB = MN$ (6). Din (5) şi (6) găsim că patrulaterul $ABNM$ este paralelogram în care (AN) şi (BM) au un punct comun fiind diagonale. Aşa dar, dr. AN este concurentă cu dr. BM.

b) S-a demonstrat anterior că $ABNM$ este paralelogram, deci dr. $AM \parallel$ dr. BN.

2.3[M]**.** Dacă dreptele a, b, c au proprietatea că $a \parallel b \parallel c$, rezultă că sînt toate coplanare?

R. Răspunsul este negativ. Într-adevăr, fie $a \parallel b$. Atunci dreptele a şi b determină un plan π. Să considerăm o dreaptă c în spaţiu, $c \not\subset \pi$, astfel încît $c \parallel b$. Evident, c este paralelă cu dreapta a şi cu planul π, dar, de exemplu c şi b determină un plan care poate să nu conţină dreapta a intersectînd pe π, după dreapta b.

2.4[M]**.** Fie patru puncte necoplanare A, B, C, D şi M, N, P, O mijloacele respective ale segmentelor AB, BC, CD, DA. Arătaţi că M, N, P, O sînt coplanare.

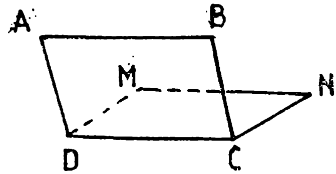


R. În triunghiul ABC avem M mijlocul lui (AB) şi N mijlocul lui (BC) rezultă de aici că dr. $MN \parallel$ dr. AC.

La fel, în triunghiul ACD avem (PO) linie mijlocie de unde dr. $OP \parallel$ dr. AC.

Din relaţiile de mai sus avem că dr. $MN \parallel$ dr. PO şi deci, dreptele fiind paralele, ele determină uu plan, adică punctele M, N, P, O sînt coplanare.

2.5. Dreptunghiurile $ABCD$ şi $MNCD$ au latura (CD) comună şi sînt incluse în plane diferite. Cercetaţi dacă: a) dr. $AB \parallel (MNC)$; b) dr. $MN \parallel (ACD)$.

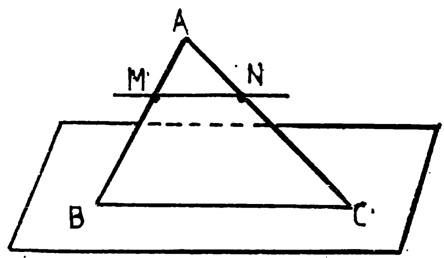


R. a) În planul (MNC) este inclusă şi dr. CD. Din ipoteză $ABCD$ este dreptunghi, deci dr. $AB \parallel$ dr. CD. Folosim teorema: dacă o dreaptă este paralelă cu o dreaptă inclusă într-un plan, atunci acea dreaptă este paralelă cu planul. În cazul nostru, dr. $AB \parallel$ dr. CD iar dr. $CD \subset (MNC)$ deci dr. $AB \parallel (MNC)$.

b) Demonstraţia este asemănătoare.

Observaţie: cerinţa rămîne valabilă în cazul cînd $ABCD$ şi $MNCD$ sînt paralelograme oarecare sau trapeze cu una din baze comune.

2.6^{M}. Un triunghi ABC are latura (BC) conţinută în planul α, iar $M \in$ dr. AB şi $N \in$ dr. AC. Stabiliţi poziţia dreptei MN faţă de planul α dacă: a) $AM = 5$ cm, $AN = 10$ cm, $MB = 3$ cm, $NC = 6$ cm; b) $AM = 1$ cm, $AN = 3$ cm, $MB = 1$ cm, $NC = 5$ cm.



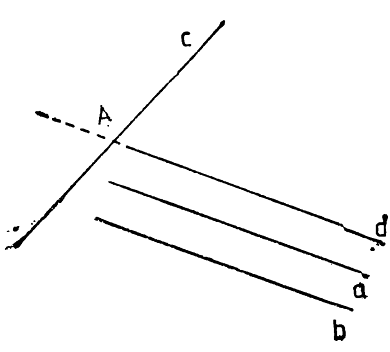
R. a) Se observă că $\frac{AM}{MB} = \frac{5}{3}$ iar $\frac{AN}{NC} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ deci, $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$.

Aşadar, conform reciprocei teoremei lui THALES aplicată triunghiului ABC obţinem că dr. $MN \parallel$ dr. BC. Deoarece dr. $BC \subset \alpha$ rezultă că dr. $MN \parallel \alpha$.

b) Calculăm $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{1} = 1$; $\frac{AN}{NC} = \frac{3}{5}$. Deci: $\frac{AM}{MB} \neq \frac{AN}{NC}$. Rezultă că dr. $MN \nparallel$ dr. BC.

Aşadar dr. $MN \cap$ dr. $BC = \{D\}$. Deoarece $D \in$ dr. BC şi dr. $BC \subset \alpha$ avem că $D \in \alpha$. Cum $D \in$ dr. MN şi $D \in \alpha$ înseamnă că $\{D\} =$ dr. $MN \cap \alpha$, adică dr. MN este concurentă cu planul α.

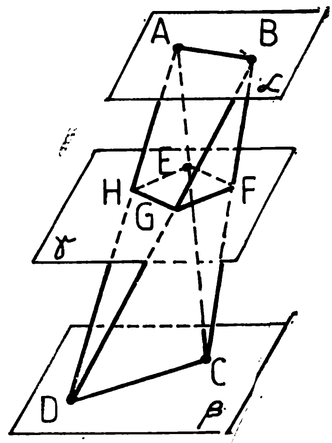
2.7^{M}. Se dau: dreapta a paralelă cu b şi c neparalelă cu ele şi necoplanară cu nici una din ele. Punctul A „parcurge" dreapta c. Planele determinate de a şi A şi de b şi A se intersectează după o dreaptă d. Aflaţi locul geometric al punctelor dreptei d.



R. Fie $\alpha = (A, a)$; $\beta = (A, b)$. Conform enunţului, $\alpha \cap \beta = d$. Dar cum $a \parallel b$ şi $d \subset \alpha$, $d \subset \beta$, avem $d \parallel b$ şi $d \parallel a$ şi, în plus, $d \subset (c, d)$.

Astfel, locul geometric al punctelor dreptei d este un plan ce conţine dreapta c şi este paralel cu dreptele a şi b.

2.8[M]**.** Se dau trei plane paralele α, β, γ şi punctele A, B în planul α, C, D în planul β. Dreptele AC, BC, BD, AD intersectează planul γ în punctele E, F, G, H. Să se arate că $EFGH$ este un paralelogram. În ce condiţii devine romb, dreptunghi, pătrat?



R. Să arătăm mai întîi că $EFGH$ este paralelogram. Să considerăm planele paralele α şi γ. Avem:

$$\alpha \cap (ABD) = \text{dr. } AB;\ \gamma \cap (ABD) = \text{dr. } HG$$

de unde dr. $AB \parallel$ dr. HG. De asemenea:

$$\alpha \cap (ABC) = \text{dr. } AB;\ \gamma \cap (ABC) = \text{dr. } EF$$

de unde dr. $AB \parallel$ dr. EF. Deci, rezultă dr. $EF \parallel$ dr. HG, (1).

Analog, considerînd $\beta \parallel \gamma$, avem:

$$\beta \cap (ADC) = \text{dr. } DC;\ \gamma \cap (ADC) = \text{dr. } HE$$

deci dr. $DC \parallel$ dr. HE

Din:

$$\beta \cap (BDC) = \text{dr, } DC;\ \gamma \cap (BDC) = \text{dr. } GF$$

rezultă dr. $GF \parallel$ dr. DC.

Din ultimele două relaţii, avem dr. $HE \parallel$ dr. GF (2). Conform relaţiilor (1) şi (2), rezultă că patrulaterul $EFGH$ este paralelogram.

Condiţia ca paralelogramul să fie romb este ca:

$$HG = HE$$

adică:

$$AB = CD$$

iar planul γ să fie echidistant de planele α şi β.

Paralelogramul $EFGH$ este dreptunghi dacă dr. $EH \perp$ dr. HG, echivalent cu dr. $AB \perp$ dr. DC.

Dacă dr. $AB \perp$ dr. DC, $AB = DC$ şi γ echidistant de α şi β, atunci $EFGH$ este pătrat.

2.9[M]**.** Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare şi M, N, P, Q, R, S mijloacele segmentelor AB, BC, CD, DA, AC, BD (în această ordine).

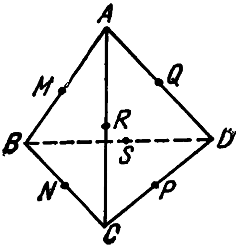
Să se arate că:

a) $MNPQ$ este paralelogram;

b) $MRPS$ este paralelogram;

c) $NRQS$ este paralelogram;

d) dreptele MP, NQ şi RS sînt concurente.



R. a) Cum în triunghiul ABC avem $MA = MB$ şi $NB = NC$, atunci:

$$\text{dr. } MN \parallel \text{dr. } AC;\ MN = \frac{1}{2} AC.$$

La fel, din triunghiul ADC, unde $AQ = QD$ şi $DP = PC$, avem:

$$\text{dr. } QP \parallel \text{dr. } AC;\ QP = \frac{1}{2} AC.$$

Din aceste relații rezultă :

$$\text{dr. } MN \parallel \text{dr. } QP ; \; MN = QP,$$

deci $MNQP$ este paralelogram.

b) În triunghiul ABD, unde $MA = MB$ și $SB = SD$, avem :

$$\text{dr. } MS \parallel \text{dr. } AD ; \; MS = \frac{1}{2} AD.$$

În triunghiul CAD, unde $PC = PD$ și $RC = RA$, avem :

$$\text{dr. } RP \parallel \text{dr. } AD ; \; RP = \frac{1}{2} AD.$$

Din aceste relații rezultă :

$$\text{dr. } PR \parallel \text{dr. } MS ; \; PR = MS,$$

deci $MRPS$ este paralelogram.

c) Din triunghiul BCD, unde $NC = NB$ și $SB = SD$, avem :

$$\text{dr. } SN \parallel \text{dr. } CD ; \; SN = \frac{1}{2} CD.$$

De asemenea, în triunghiul CAD, din $AR = RC$ și $AQ = QD$, rezultă :

$$\text{dr. } RQ \parallel \text{dr. } CD ; \; RQ = \frac{1}{2} CD.$$

Din relațiile anterioare rezultă :

$$\text{dr. } QR \parallel \text{dr. } NS ; \; QR = NS$$

deci $NRQS$ este paralelogram.

d) În paralelogramul $MNPQ$, MP și QN sînt diagonale, ele intersectîndu-se într-un punct O, cu :

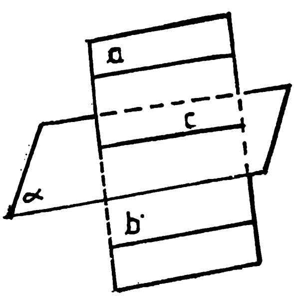
$$MO = OP ; \; QO = ON, \; (1).$$

În paralelogramul $MRPS$, diagonalele MP și RS se intersectează în punctul O', unde :

$$MO' = O'P, \; (2).$$

Din (1) și (2) rezultă că O și O' coincid, deci :

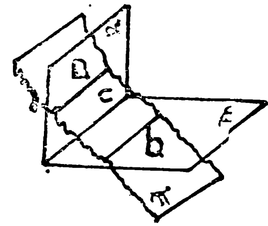
$$\text{dr. } MP \cap \text{dr. } NQ \cap \text{dr. } RS = \{O\}.$$



2.10. Un plan α este paralel cu două drepte paralele a și b. Se poate spune că α este paralel cu planul determinat de dreptele a și b?

R. În general, nu. Un contraexemplu este sugerat în desenul alăturat, unde planul determinat de dreptele a și b intersectează pe α după dreapta c.

2.11^{PP}. Două plane α și β se intersectează după dreapta c; a și b sînt două drepte astfel încît $a \subset \alpha$, $a \| \beta$, $b \subset \beta$ și $b \| \alpha$. Găsiți în ce relație se află a cu c și apoi în ce relație se află b cu c.

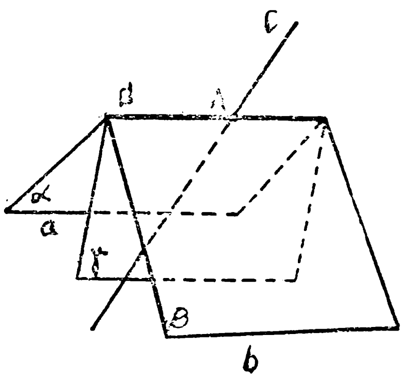


R. Deoarece $\alpha \cap \beta = c$ obținem că $c \subset \alpha$. Cum $a \subset \alpha$ înseamnă că a și c sînt coplanare adică sînt concurente sau paralele. Concurente nu pot fi căci a și c ar avea un punct comun care ar aparține dreptei c care este inclusă și în β; deci dreapta a ar avea un punct comun cu planul β, dar se contrazice afirmația din ipoteză : $a \| \beta$. Rămîne că $a \| c$. Asemănător, demonstrați că $b \| c$.

2.12^{M}. Se dau două plane α și β și două drepte $a \subset \alpha$ și $b \subset \beta$. Dacă $a \| \beta$ și $b \| \alpha$ și a nu este paralelă cu b, demonstrați că planele α și β sînt paralele.

R. Presupunem că α și β nu sînt paralele și deci se intersectează după o dreaptă c. Folosim o parte din ipoteză : $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $a \| \beta$ și $b \| \alpha$. Aceasta este tocmai problema anterioară la care s-a demonstrat că $a \| c$ și $c \| b$, deci $a \| b$, rezultat ce contrazice în continuare ipoteza că a nu e paralelă cu b. Deci, rămîne că $\alpha \| \beta$.

2.13. Fie a, b și c trei drepte astfel încît $a \| b$ și c neparalelă cu a și necoplanară cu nici una din ele. Fie punctul $A \in c$, dar care să nu aparțină planului δ determinat de a și b. Notăm : $\alpha = (a; A)$, $\beta = (b; A)$, $\alpha \cap \beta = d$ și $\gamma = (d; c)$. Demonstrați că : a) $a \| \gamma$; b) $b \| \gamma$.



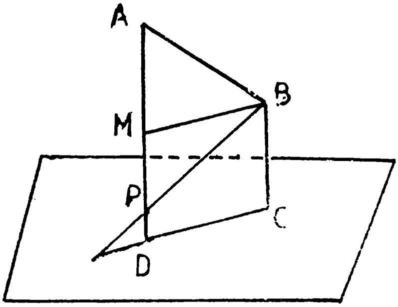
R. a) Din ipoteză, α și β au un punct comun punctul A, deci dreapta comună d. Aplicăm lema: dacă două drepte paralele sînt incluse, respectiv, în două plane care se intersectează după o dreaptă, atunci această dreaptă este paralelă cu fiecare din cele două drepte paralele.

Deci, cum $a \| b$ și $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $\alpha \cap \beta = d$ rezultă că $d \| a$ și $d \| b$. Deoarece $a \| d$ și $d \subset \gamma$ rezultă că $a \| \gamma$ conform teoremei : dacă o dreaptă este paralelă cu o dreaptă inclusă într-un plan, atunci acea dreaptă este paralelă cu planul.

b) $b \| d$ și $d \subset \gamma$ implică, conform aceleiași teoreme $b \| \gamma$.

2.14. Trapezul $ABCD$ are $(CD) \subset \alpha$, α fiind un plan, $A \notin \alpha$, $AD = 2BC$ și dr. $BC \|$ dr. AD. Găsiți : a) relația dintre dr. BM și planul α, M fiind mijlocul lui $[AD]$; b) relația dintre dr. AB și planul α; c) relația dintre dr. BP și planul α unde $P \in (MD)$.

R. a) Din ipoteză, dr. $BC \|$ dr. AD deci dr. $BC \|$ dr. MD (1). Din ipoteză, M este mijlocul lui $[AD]$ așadar $MD = \frac{AD}{2}$. Folosind relația din ipoteză, $AD = 2BC$, avem că $MD = \frac{2BC}{2} = BC$ (2). Din (1) și (2) obținem că patrulaterul $CBMD$ este paralelogram și găsim că dr. $MB \|$ dr. CD (3). Dar, din ipoteză, $(CD) \subset \alpha$, deci și dr. $CD \subset \alpha$ (4). Aplicăm teorema : dacă o dreaptă

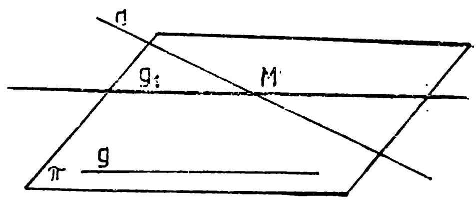


este paralelă cu o dreaptă inclusă într-un plan atunci acea dreaptă este paralelă cu planul. Rezultă din (3) şi (4) că dr. $BM \parallel \alpha$.

b) $ABCD$ fiind trapez şi avînd bazele $[BC]$ şi $[AD]$ rezultă că dr.AB este concurentă cu dr.DC într-un punct ce aparţine dreptei DC. Dar dr.$DC \subset \alpha$. Rezultă că dr. AB are un singur punct comun cu planul α, deci dr. AB este concurentă cu planul α.

c) Deoarece $P \in (MD)$ înseamnă că $PD < MD$. Cum $MD = BC$ rezultă că $PD < BC$ şi deci patrulaterul $CBPD$ este de asemenea trapez. Demonstraţi în continuare asemănător ca la b) şi găsiţi că dr.BP este concurentă cu planul α.

2.15^{op}. Dacă d şi g sînt două drepte necoplanare, atunci există un plan şi numai unul care să conţină pe d şi să fie paralel cu g.

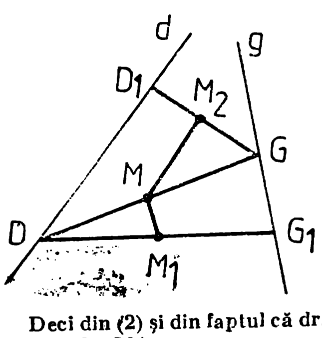


R. Fie pe dreapta d un punct M. Dreptele d şi g sînt din ipoteză necoplanare deci nu au puncte comune. Aşadar $M \notin g$. Punctul M şi dreapta g determină un plan pe care-l notăm cu π.

Să „ducem" în planul π, o dreaptă g_1 prin M, paralelă cu g. Planul determinat de dreptele d şi g_1 va fi planul căutat. Planul este unic, pentru că dacă ar mai exista încă un plan distinct paralel cu g, repetînd raţionamentul de construcţie pentru acest plan, ar rezulta existenţa unei alte drepte, g_2, prin M, paralelă cu g. Deci, am obţinut două drepte distincte g_1 şi g_2 ce „trec" prin acelaşi punct M şi sînt paralele cu g, fals. Deci g_1 coincide cu g_2 şi planul este unic.

2.16$^{op \cdot pp}$. Se dau două drepte d şi g necoplanare. Fie $D \in d$, $D_1 \in d$ $(D \neq D_1)$, $G \in g$, $G_1 \in g$, $(G \neq G_1)$ şi M, M_1 şi M_2 mijloacele segmentelor (DG), (DG_1) şi respectiv (GD_1).

Găsiţi relaţia dintre d şi planul (M, M_1, M_2) şi apoi relaţia dintre g şi planul (M, M_1, M_2).



R. Din ipoteză M este mijlocul lui (DG) iar M_2 mijlocul lui (GD_1) rezultă că în triunghiul DGD_1, (MM_2) este linie mijlocie şi deci dr.$MM_2 \parallel d$, adică $d \parallel$ dr.MM_2 (1).

Aplicăm teorema : dacă o dreaptă este paralelă cu o dreaptă inclusă într-un plan, atunci acea dreaptă este paralelă cu planul. Deci din (1) şi din faptul că dr. $MM_2 \subset (M, M_1, M_2)$ rezultă, conform teoremei enunţate, că $d \parallel (M, M_1, M_2)$.

Asemănător, rezultă că în triunghiul DGG_1, (MM_1) este linie mijlocie şi deci dr. $MM_1 \parallel g$, adică $g \parallel$ dr. MM_1 (2).

Deci din (2) şi din faptul că dr. $MM_1 \subset (M, M_1, M_2)$ rezultă, conform teoremei enunţate, că $g \parallel (M, M_1, M_2)$.

2.17$^{pp \cdot M}$. Se dau două drepte necoplanare în spaţiu, d şi g. Arătaţi că mulţimea de puncte $\{M \mid M$ este mijloc al lui (DG), $D \in d$, $G \in g\}$, este inclusă într-un plan α, paralel cu dreptele d şi g.

R. Folosind problema anterioară, punînd în evidență $D_1 \in d$ și $G_1 \in g$ constatăm că există planul α, planul determinat de punctele M, M_1, M_2, care este paralel cu dreptele d și g.

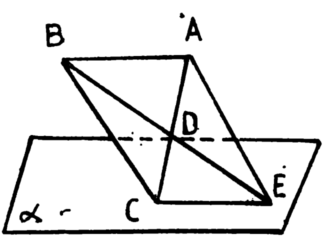
Să demonstrăm că oricare ar fi alt segment, (D_2G_2), unde $D_2 \in d$ și $G_2 \in g$, mijlocul său M_3, aparține planului α. În adevăr, dacă notăm de exemplu cu M_4 mijlocul lui (D_2G), $M_4 \in$ dr. MM_2; cum dr. $MM_2 \subset \alpha$ înseamnă că $M_4 \in \alpha$.

În triunghiul GD_2G_2, (M_4M_3) este linie mijlocie deci, dr. $M_4M_3 \| g$, Cum $g \|$ dr. MM_1 rezultă că dr. $M_4M_3 \|$ dr. MM_1. Dar dr. $MM_1 \subset \alpha$ deci și dr. $M_4M_3 \subset \alpha$ și deci $M_3 \in \alpha$.

Așadar M_3 fiind la întîmplare, el aparține mulțimii din enunțul problemei date, rezultă că mulțimea de puncte respectivă este inclusă în planul α.

Observație: în finalul demonstrației s-a folosit următoarea teoremă: dacă o dreaptă d este inclusă într-un plan α iar $A \in \alpha$ și $A \notin d$, atunci dreapta g paralelă cu d, astfel că $A \in g$, este inclusă în planul α.

2.18. Triunghiul ABC are doar vîrful C comun cu un plan α. Se știe că dr. $AB \| \alpha$ iar D este mijlocul lui (AC). Găsiți natura patrulaterului $ABCE$ unde $\{E\} =$ dr. $BD \cap \alpha$.



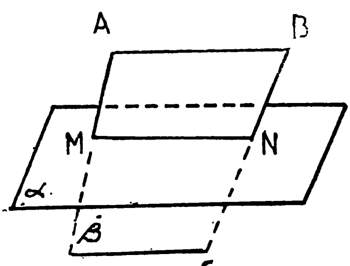
R. Din ipoteză dr. $AB \| \alpha$ iar punctele A, B, C determină un plan β. Folosim teorema: dacă o dreaptă d este paralelă cu un plan α atunci orice plan β în care este inclusă dreapta d și intersectează pe α, îl intersectează după o dreaptă paralelă cu d.

În cazul nostru β intersectează pe α după dr. CE și conform teoremei enunțate avem dr. $AB \|$ dr. CE (1). Datorită secantei, dr. AC, obținem că $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ECD$ (2). Din ipoteză D este mijlocul lui (AC) deci $(AD) \equiv (CD)$ (3). $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CDE$ (4) ca opuse la vîrf. Din (2), (3) și (4) rezultă că $\Delta ADB \equiv \Delta CDE$ din care avem că $(AB) \equiv (CE)$ (5).

Din (1) și (5) găsim că patrulaterul $ABCE$ este paralelogram. Dacă triunghiul ABC este dreptunghic în B atunci patrulaterul este un dreptunghi, iar dacă este isoscel cu $(AB) \equiv (BC)$ devine romb.

Observație. În cazul cînd D nu este mijloc, ci un punct oarecare al lui (AC) patrulaterul este un trapez.

2.19. $ABCD$ este un trapez care are ca baze pe (AB) și (CD). Un plan α intersectează dr. AD în M și dr. BC în N. Se știe că dr. $AB \| \alpha$. a) Găsiți relația dintre dr. MN și dr. AB. b) Este posibil că (MN) să fie linie mijlocie în trapezul $ABCD$?

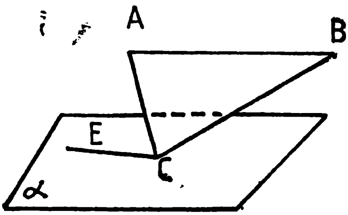


R. a) Din ipoteză $ABCD$ este trapez cu bazele incluse în dr. AB și respectiv dr. CD, deci dr. $AB \|$ $\|$ dr. CD care determină un plan β. Planele α și β au ca puncte comune punctele M și N, deci sînt concurente avînd ca dreaptă de intersecție, dr. MN. Din ipoteză dr. $AB \| \alpha$ dar dr. $AB \subset \beta$. Rezultă că dr. $MN \|$ dr. AB conform teoremei: dacă o dreaptă d este paralelă cu un plan α atunci orice plan β care conține pe d și intersectează pe α, îl intersectează după o dreaptă paralelă cu d.

b) În cazul cînd $M \in (AD)$, $N \in (BC)$ și M, N sînt mijloacele segmentelor respective atunci (MN) este linie mijlocie în trapezul $ABCD$.

Observație: se înțelege că planul α intersectează pe dr. AD nu numai în interiorul lui (AD).

2.20. Se dă un plan α. ABC este un triunghi astfel încît $C \in \alpha$ și dr. $AB \| \alpha$. Fie E un punct în așa fel încît dr. $CE \|$ dr. AB. Demonstrați că $E \in \alpha$.



R. Aplicăm teorema: dacă o dreaptă d este paralelă cu un plan α, atunci printr-un punct al planului, paralela g la d este inclusă în α. În cazul nostru, din ipoteză dr. $AB \parallel \alpha$, $C \in \alpha$, dr. $CE \parallel$ dr. AB. Rezultă conform teoremei enunțate că dr. $CE \subset \alpha$. Deoarece $E \in$ dr. CE și dr. $CE \subset \alpha$, avem că $E \in \alpha$.

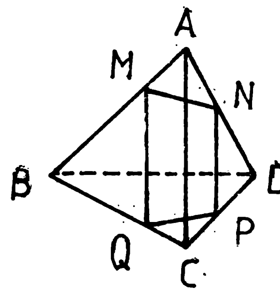
2.21. Dacă dreptele d și g sînt paralele și g este paralelă cu planul α, atunci și dreapta d este paralelă cu planul α (sau conținută în el).

R. Cum d și g determină un plan, să-l notăm cu β, și deosebim cazurile:

$$1)\ \alpha \cap \beta = \Phi,\ 2)\ \alpha \cap \beta \neq \Phi$$

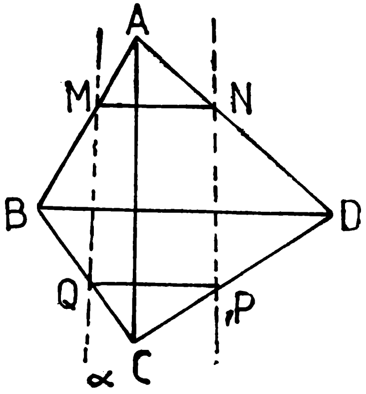
În primul caz, rezultă $\beta \parallel \alpha$ și deci $d \parallel \alpha$. În al doilea caz, fie d_1 dreapta de intersecție dintre planele α și β. Cum $g \parallel \alpha$, $g \subset \beta$, $d_1 = \alpha \cap \beta$, avem $g \parallel d_1$ și cum $d \parallel g$, rezultă $d \parallel d_1$, deci, cum $d_1 \subset \alpha$, avem $d \parallel \alpha$ (sau $d \subset \alpha$).

2.22[M·PP]. Dîndu-se punctele A, B, C, D necoplanare, (AB), (BC), (CD), (DA) alcătuiesc ceea ce se numește un *patrulater strîmb*; (AC) și (BD) sînt diagonalele lui. Intersectînd laturile sale cu un plan paralel cu o diagonală, stabiliți natura poligonului convex cu vîrfurile în aceste puncte de intersecție.



R. Fie π planul paralel cu diagonala (AC). Să notăm cu MQ, dreapta de intersecție dintre planele π și (A, B, C), și cu NP, dreapta de intersecție dintre π și (A, D, C).

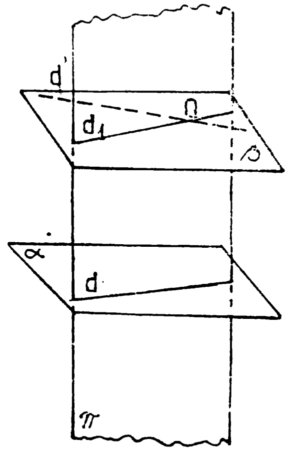
Cum dr. $AC \parallel \pi$ și dr. $AC \subset (A, B, C)$, avem dr. $MQ \parallel$ dr. AC. La fel, dr. $AC \parallel$ dr. NP, deoarece dr. $AC \parallel \pi$ și dr. $AC \subset (A, D, C)$. Din dr. $AC \parallel$ dr. MQ și dr. $AC \parallel$ dr. NP, rezultă dr. $MQ \parallel$ dr. NP, deci patrulaterul $MNPQ$ este trapez.



2.23. Triunghiurile ABC și ACD sînt în plane diferite. Un plan α paralel cu dr. AC intersectează pe (AB), (BC), (CD) și (DA) respectiv în punctele M, Q, P și N. Ce fel de patrulater este $MQPN$? În ce caz este paralelogram?

R. Folosind problema anterioară obținem că $MQPN$ este trapez. Este paralelogram în cazul cînd M, N, P și Q sînt mijloacele segmentelor respective. Mai poate fi paralelogram cînd $\alpha \parallel$ dr. BD

2.24[M]**.** Dîndu-se două plane paralele, orice dreaptă din primul este paralelă cu orice dreaptă din al doilea?



R. Fie α şi β cele două plane paralele şi fie d o dreaptă în planul α iar Q un punct în planul β.

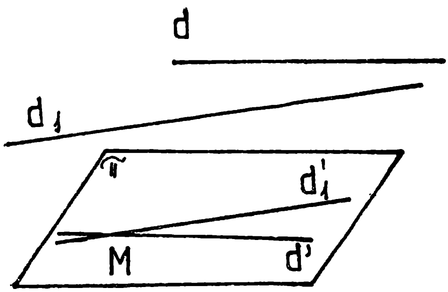
Dreapta d şi punctul Q determină un plan π, care intersectează planul β după o dreaptă pe care o notăm cu d_1.

Se ştie că dîndu-se două plane paralele, orice dreaptă inclusă în unul este paralelă cu al doilea plan.

În cazul nostru $d \parallel \beta$. Folosim teorema: dacă o dreaptă d este paralelă cu un plan β, atunci orice plan π, astfel încît $d \subset \pi$, care intersectează pe β, îl intersectează după o dreaptă paralelă cu d. Deci $d_1 \parallel d$.

Dar prin Q avem o infinitate de drepte incluse în planul β. Fie d' o astfel de dreaptă. Avem $d' \cap d_1 = \{Q\}$ şi deci $d' \cap \pi = \{Q\}$ iar $d \subset \pi$, deci $d' \nparallel d$.

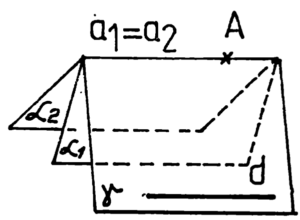
2.25 [M]**.** Două drepte paralele cu acelaşi plan, sînt neapărat paralele între ele?



R. Fie π un plan şi d, d_1 două drepte paralele cu π.

Considerăm M un punct în π. În M există o paralelă d' la dreapta d, $d' \subset \pi$. La fel, tot în M există d_1' o paralelă la d_1, $d_1' \subset \pi$. Dreptele d' şi d_1' pot fi concurente. Deci dreptele d şi d_1 nu pot fi neapărat paralele.

2.26[MFO]**.** Se dă o dreaptă d şi un punct A. Se consideră mulţimea planelor care trec prin A şi sînt paralele cu d. Să se arate că aceste plane au o dreaptă comună.



R. Dreapta d şi punctul A determină un plan pe care-l notăm cu γ.

Fie α_1 un plan paralel cu d astfel încît $A \in \alpha_1$.

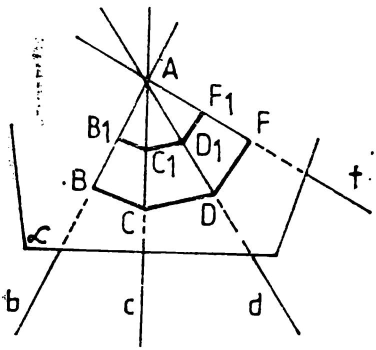
Planele α_1 şi γ au punctul A comun deci se intersectează. Aplicăm teorema: dacă o dreaptă d este paralelă cu un plan α_1 atunci orice plan γ care conţine pe d şi intersectează pe α_1, îl intersectează după o dreaptă a_1 paralelă cu d. Evident $A \in a_1$. Fie acum alt plan α_2, paralel cu d astfel încît $A \in \alpha_2$. Planele α_2 şi γ au punctul A comun deci se intersectează. Conform teoremei enunţate, rezultă că γ care conţine pe d şi intersectează pe α_2, îl intersectează după o dreaptă a_2 paralelă cu d. Evident $A \in a_2$. Cum a_1 şi a_2 sînt incluse în γ şi au punctul A comun înseamnă că prin A, în γ, există două paralele la dreapta d, contrar axiomei paralelelor. Rezultă că $a_1 = a_2$.

2.27. Paralelogramul $ABCD$ are diagonalele $[AC]$ şi $[BD]$, fiecare paralele cu un plan α.

Demonstraţi că fiecare latură a paralelogramului este paralelă cu α.

R. Diagonalele sînt incluse în două drepte, dr. AC şi dr. BD, concurente care determină un plan β. Aplicăm teorema : un plan β ce conţine două drepte concurente paralele cu un alt plan α, este paralel cu α. În cazul nostru, rezultă că $\beta \| \alpha$. Se ştie că dîndu-se două plane paralele, orice dreaptă din primul plan este paralelă cu al doilea.Laturile paralelogramului sînt incluse în drepte incluse în planul β. Deci fiecare, este paralelă cu planul α.

2.28 PO,PP. Fie planul α şi $A \notin \alpha$. Dreptele b, c, d, f concurente în A intersectează pe α în punctele B, C, D şi respectiv F astfel încît oricare trei dintre ele sînt necoliniare. Demonstraţi că punctele B_1, C_1, D_1, F_1, care sînt mijloacele segmentelor la (AB), (AC), (AD) şi respectiv (AF), sînt coplanare.



R. În triunghiul ABC, (B_1C_1) este linie mijlocie deci dr. $B_1C_1 \|$ dr. BC dar dr. $BC \subset \alpha$ rezultă că dr. $B_1C_1 \| \alpha$ (1).

În triunghiul ACD, (C_1D_1) este linie mijlocie deci dr. $C_1D_1 \|$ dr. CD, dar dr.$CD \subset \alpha$; rezultă că dr. $C_1D_1 \| \alpha$ (2).

Punctele B_1, C_1, D_1 sînt necoliniare. Ele determină un singur plan. Acest plan conţine două drepte concurente, dr.B_1C_1 şi dr.C_1D_1 paralele fiecare cu α (conform (1) şi (2)). Avem deci că planul $(B_1, C_1, D_1) \| \alpha$ (3).

În triunghiul ADF, (D_1F_1) este linie mijlocie deci dr. $D_1F_1 \|$ dr. DF, dar dr. $DF \subset \alpha$; rezultă că dr. $D_1F_1 \| \alpha$ (4).

Aplicăm teorema : dacă două plane sînt paralele şi avem într-un punct al unuia o paralelă la al doilea, atunci acea paralelă este inclusă în primul plan.

În cazul nostru, folosind (3) şi (4) rezultă că dr. $D_1F_1 \subset (B_1, C_1, D_1)$ deci punctele B_1, C_1, D_1, F_1, sînt puncte coplanare.

2.29 PO;M. Fie planul α şi $A \notin \alpha$. Demonstraţi că mulţimea de puncte care sînt mijloacele segmentelor (AB), unde B este orice punct ce aparţine planului α, este inclusă într-un plan paralel cu planul α.

R. Problema este o generalizare a problemei anterioare. S-a demonstrat acolo că punctele B_1, C_1, D_1, F_1 care sînt mijloace de segmente cu proprietatea din ipoteza problemei de mai sus sînt coplanare iar planul care le conţine este paralel cu α. Demonstraţia s-a realizat pentru trei segmente : (AB), (AC), (AD) ($B \in \alpha$, $C \in \alpha$, $D \in \alpha$) şi apoi pentru un punct $F \in \alpha$ luat la întîmplare. Deci ea este realizată, pentru orice punct $B \in \alpha$.

Proprietatea se păstrează şi pentru punctele care nu sînt neapărat necoliniare. Existenţa planului (B_1, C_1, D_1) este determinată de faptul că în planul α există cel puţin trei puncte necoliniare.

2.30 PO;M. Fie planul α şi dreapta d, astfel încît $d \| \alpha$. În cazul cînd A este orice punct al dreptei d iar B orice punct ce aparţine planului α, arătaţi că mulţimea $\{M \mid M$ este mijlocul lui $(AB)\}$ este inclusă într-un plan paralel cu α.

R. Rezolvarea este asemănătoare cu problema anterioară. Se consideră punctele A şi A_1 ce aparţin dreptei d şi punctele B şi B_1, puncte ce aparţin planului α, în aşa fel încît dr. $BB_1 \| d$. Se arată că planul determinat de mijloacele segmentelor (AB), (AB_1) şi (A_1B) este paralel cu α şi lui îi aparţine mijlocul segmentului (A_1B_1) ca şi mijlocul oricărui alt segment cu proprietatea din problemă.

2.31. Se dau planele α, β, γ paralele între ele şi punctele A, B, D astfel încît $A \in \alpha$, $B \in \beta$ şi $D \in \beta$. Notăm dr. $AB \cap \gamma = \{C\}$ şi dr. $AD \cap \cap \gamma = \{E\}$. În cazul cînd $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm, $AE = 7$ cm şi $CE = 8$ cm calculaţi măsurile celorlalte segmente care se mai pun în evidenţă.

R. Dreptele AB şi AD fiind concurente determină un plan δ. Deoarece $\beta \parallel \gamma$, planul δ intersectează pe β după dr. BD iar pe γ după dr. CE. Rezultă conform teoremei : două plane paralele se intersectează cu un al treilea după două drepte paralele, că dr. $BD \parallel$ dr. CE.

În planul δ, în triunghiul ACE aplicăm teorema fundamentală a asemănării şi obţinem că $\Delta ABD \sim \Delta ACE$. Deci :

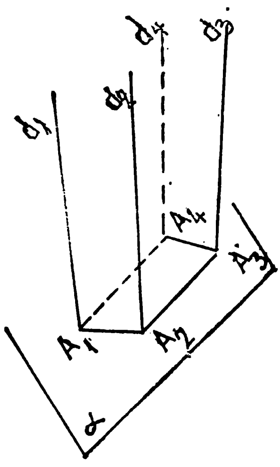
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE}.$$

Înlocuind obţinem : $\frac{4}{6} = \frac{AD}{7} = \frac{BD}{8}$. Din acest şir de rapoarte egale găsim :

$$AD = \frac{14}{3} \text{ cm}, \quad BD = \frac{16}{3} \text{ cm}.$$

În cazul cînd $B \in (AC)$ rezultă că $D \in (AE)$ şi putem calcula $BC = AC - AB = 6 \text{ cm} - 4 \text{ cm} = 2$ cm şi $DE = AE - AD = 7 \text{ cm} - \frac{14}{3} \text{ cm} = \frac{7}{3}$ cm.

În cazul cînd $A \in (BC)$ rezultă că $A \in (DE)$ şi putem calcula $BC = AC + AB = 6 \text{ cm} + 4 \text{ cm} = 10$ cm şi $DE = AE + AD = 7 \text{ cm} + \frac{14}{3} \text{ cm} = \frac{35}{3}$ cm.



2.32PP. Fie planul α. Dreptele d_1, d_2, d_3, d_4 sînt paralele între ele şi intersectează pe α în punctele A_1, A_2, A_3 şi respectiv A_4 în aşa fel încît $A_1A_2A_3A_4$ este paralelogram.

Găsiţi în ce relaţie este planul (d_1, d_2) cu (d_3, d_4). Dar planul (d_2, d_3) cu (d_4, d_1)?

R. Din ipoteză $A_1A_2A_3A_4$ este paralelogram ; avem : dr. $A_1A_2 \parallel$ dr. A_3A_4 (1). Din ipoteză $d_1 \parallel d_4$ (2). Se observă că, dr. A_1A_2 este concurentă cu d_1 iar dr. A_3A_4 este concurentă cu d_4 ; rezultă din (1) şi (2) că $(d_1$; dr. $A_1A_2) \parallel (d_4$; dr. $A_3A_4)$ (3). (S-a aplicat teorema : dacă două plane au cîte două drepte concurente, respectiv paralele, atunci cele două plane sînt paralele).

În planul $(d_1$, dr. $A_1A_2)$ este inclusă dreapta d_2 deci $(d_1$, dr. $A_1A_2) = (d_1, d_2)$. În planul $(d_4$, dr. $A_3A_4)$ este inclusă dreapta d_3 deci $(d_4$, dr. $A_3A_4) = (d_3, d_4)$. Dacă folosim (3), obţinem că $(d_1, d_2) \parallel (d_3, d_4)$.

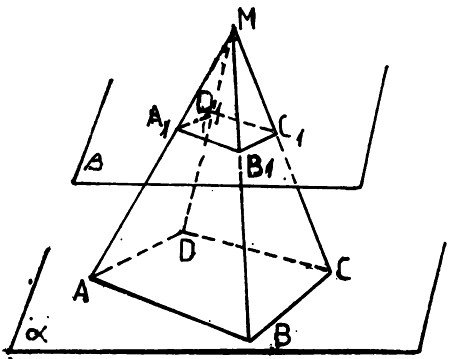
Asemănător demonstrăm că $(d_2, d_3) \parallel (d_4, d_1)$.

2.33M. Demonstraţi că dacă patru drepte paralele determină, pe un plan dat, vîrfurile unui paralelogram, atunci determină pe orice plan care le intersectează vîrfurile unui paralelogram.

R. Notăm cu β planul al doilea. şi $d_1 \cap \beta = \{A_1'\}$, $d_2 \cap \beta = \{A_2'\}$ $d_3 \cap \beta = \{A_3'\}$, $d_4 \cap \cap \beta = \{A_4'\}$. Din problema anterioară avem că $(d_1, d_2) \parallel (d_3, d_4)$. Aceste două plane paralele sînt intersectate de β după dr. $A_1'A_2' \parallel$ dr. $A_3'A_4'$ (1).

Tot din problema anterioară avem că $(d_2, d_3) \parallel (d_4, d_1)$. Aceste două plane paralele sînt intersectate de β după dr. $A_2'A_3' \parallel$ dr. $A_4'A_1'$ (2). Din (1) şi (2) rezultă că patrulaterul $A_1'A_2'A_3'A_4'$ este un paralelogram.

2.34. Considerăm în planul α paralelogramul $ABCD$ şi $M \notin \alpha$. Demonstraţi că dacă planul $\beta \parallel \alpha$ şi β intersectează dreptele MA, MB, MC, MD în punctele A_1, B_1, C_1 şi respectiv D_1, atunci $A_1B_1C_1D_1$ este un paralelogram.



R. Planul (dr. MA ; dr. MB) intersectează pe $\beta \parallel \alpha$ după dr. $A_1B_1 \parallel$ dr. AB (1). $ABCD$ este paralelogram deci dr. $AB \parallel$ dr. CD (2).

Planul (dr.MC; dr.MD) intersectează pe $\alpha \parallel \beta$ după dr. $CD \parallel$ dr. C_1D_1 (3).

Din (1), (2) şi (3) obţinem că dr. $A_1B_1 \parallel$ $\parallel$ dr. C_1D_1. Asemănător demonstraţi că dr.$B_1C_1 \parallel$ $\parallel$ dr.A_1D_1 (5). Din (4) şi (5) rezultă că $A_1B_1C_1D_1$ este paralelogram.

2.35^M. Planele α, β, γ sînt paralele şi dr. $A'C'$, dr. AC sînt două secante. Ştiind că $A'B' = 5$ cm, $B'C' = 3$ cm şi $AC = 12$ cm, calculaţi AB şi BC. ($A, A' \in \alpha$; $B, B' \in \beta$; $C, C' \in \gamma$, $B \in (AC)$, $B' \in (A'C')$).

R. Aplicăm teorema lui THALES în spaţiu : mai multe plane paralele determină pe două drepte oarecare, care le intersectează pe acestea, segmente respectiv proporţionale şi obţinem :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

sau, echivalent :

$$\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AB}{BC}$$

sau încă :

$$\frac{A'B'}{A'B' + B'C'} = \frac{AB}{AB + BC}.$$

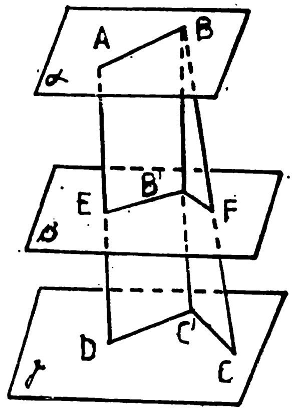
Înlocuind, rezultă $8\,AB = 60$, de unde $AB = 7{,}5$ cm. De aici :

$$BC = AC - AB = 4{,}5 \text{ (cm)}.$$

2.36. Se dau planele α şi γ paralele. A, B, C şi D sînt puncte necoplanare astfel încît $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \gamma$ şi $D \in \gamma$. Demonstraţi că orice plan β paralel cu α determină pe (AD) şi (BC), pe care le intersectează, segmente proporţionale.

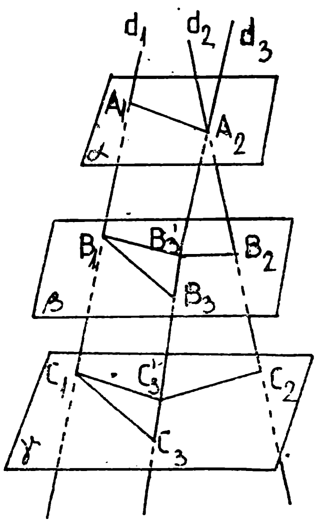
R. Din ipoteză $\beta \parallel \alpha$ şi $\alpha \parallel \gamma$ deci $\beta \parallel \gamma$. Aşadar cele trei plane sînt paralele. Aplicăm teorema lui THALES în spaţiu : mai multe plane paralele determină pe două secante pe care le intersectează, segmente proporţionale.

În cazul nostru α, β, γ sînt paralele, iar dr. AD și dr. BC sînt intersectate de plane și determină segmente proporționale.



Observație: dacă nu aplicăm teorema lui THALES în spațiu putem realiza demonstrația următoare: Considerăm prin B paralela la dr. AD care intersectează pe β în B' și pe γ în C'. Notăm: dr. $AD \cap \beta = \{E\}$ și dr. $BC \cap \beta = \{F\}$. Din paralelogramele formate avem că $(BB') \equiv (AE)$ și $(B'C') \equiv (ED)$ (1). Dr. BC' și dr. BC sînt concurente și determină un plan care intersectează pe $\beta \parallel \gamma$ după dr. $B'F$ paralelă cu dr. $C'C$. În triunghiul $BC'C$ aplicăm teorema lui THALES și obținem: $\frac{BB'}{B'C'} = \frac{BF}{FC}$. Folosim (1): $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$ adică segmente proporționale.

2.37. Dreapta d_1 intersectează planele α, β și γ în punctele A_1, B_1 și respectiv C_1. Dreapta d_2 necoplanară cu d_1, le intersectează în punctele A_2, B_2 și respectiv C_2 astfel încît $\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2}$. Rezultă că planele α, β și γ sînt paralele între ele?



R. Notăm cu d_3 paralela prin A_2 la dreapta d_1, care intersectează pe β în B_3 iar γ în C_3. Din ipoteză nu rezultă că dr. $B_1B_3 \parallel$ dr. A_1A_2.

Fie $B_3' \in d_3$ astfel încît $A_1B_1 = A_2B_3'$ (1) cum dr. $A_1B_1 \parallel$ dr. A_2B_3' avem ca patrulaterul $A_1A_2B_3'B_1$ este paralelogram și deci dr. $B_1B_3' \parallel$ dr. A_1A_2.

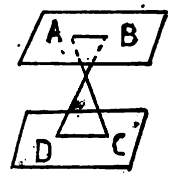
Din ipoteză nu rezultă că dr. $C_1C_3 \parallel$ dr. A_1A_2. Fie $C_3' \in d_3$ astfel încît $B_1C_1 = B_3'C_3'$ /(2).

Asemănător, ca mai sus, demonstrăm că $B_1B_3'C_3'C_1$ este paralelogram și deci dr. $B_1B_3' \parallel$ dr. C_1C_3' (3).

Folosind (1) și (2) relația din ipoteză devine: $\frac{A_2B_3'}{A_2B_2} = \frac{B_3'C_3'}{B_2C_2}$ care ne permite să aplicăm triunghiului $A_2C_3'C_2$ reciproca teoremei lui THALES din care rezultă că dr. $B_3'B_2 \parallel$ dr. $C_3'C_2$ (4).

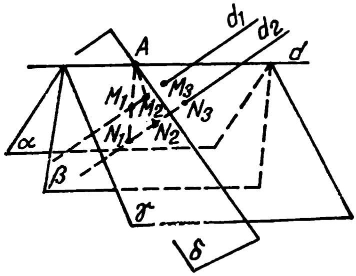
Din (3) și (4) rezultă că sînt paralele planele (B_1, B_3', B_2) și (C_1, C_3', C_2) și nu β și γ. Pot fi paralele β și γ dacă $B_3' \in \beta$ și $C_3' \in \gamma$, dar nu avem condiții suficiente ca să fie paralele și cu α.

2.38.[M] Dacă două plane paralele determină pe două secante segmente congruente, aceste secante sînt paralele? Justificați răspunsul dat.



R. Nu întotdeauna. Se observă că $ABCD$ este un trapez isoscel, adică diagonalele (AC) și (BD) sînt congruente și totuși dr. AC nu este paralelă cu dr. BD.

2.39[PO]. Trei plane α, β, γ sînt concurente după dreapta d. Planul δ intersectează pe d în A. În planul δ fie $d_1 \| d_2$ astfel încît $A \notin d_1$ şi $A \notin d_2$. Dreapta d_1 intersectează planele α, β, γ în punctele M_1, M_2 şi respectiv M_3 iar d_2, în punctele N_1, N_2 şi respectiv în N_3. Arătaţi că $\frac{M_1M_2}{N_1N_2} = \frac{M_2M_3}{N_2N_3}$.



R. Se constată că $\alpha \cap \delta =$ dr. AN_1, $\beta \cap \delta =$ dr. AN_2 şi $\gamma \cap \delta =$ dr. AN_3. Raţionamentul se aplică în planul δ. Din ipoteză $d_1 \| d_2$. Conform teoremei fundamentale avem că: $\Delta AM_1M_2 \sim \Delta AN_1N_2$ (1) şi $\Delta AM_2M_3 \sim \Delta AN_2N_3$ (2).

Din (1) obţinem:

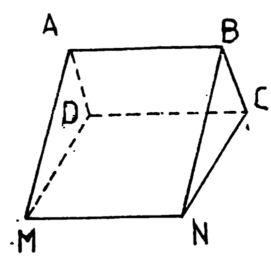
$$\frac{M_1M_2}{N_1N_2} = \frac{AM_2}{AN_2} \quad (3).$$

Din (2) obţinem:

$$\frac{AM_2}{AN_2} = \frac{M_2M_3}{N_2N_3} \quad (4).$$

Din (3) şi (4) rezultă relaţia cerută.

2.40. $ABCD$ şi $CDMN$ sînt paralelograme în plane diferite. Demonstraţi că $\Delta ADM \equiv \Delta BCN$.



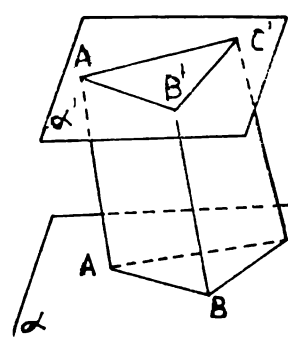
R. Deoarece $ABCD$ este paralelogram avem dr. $AD \|$ dr. BC (1) şi $(AD) \equiv (BC)$ (2).

Deoarece $CDMN$ este paralelogram avem dr. $DM \|$ dr. CN (3) şi $(DM) \equiv (CN)$ (4).

Din (1), şi (3), obţinem $\sphericalangle ADM$ şi $\sphericalangle BCN$ sînt unghiuri cu laturile paralele. Cum $[DA$ şi $[CB$ sînt în acelaşi semiplan determinat de dr. DC ca şi $[DM$ şi $[CN$, din (1) şi (3) obţinem că $\sphericalangle ADM \equiv \sphericalangle BCN$ (5).

Din (2), (5), (4) obţinem $\Delta ADM \equiv \Delta BCN$.

2.41. Se dau planele α şi α' paralele. Fie în α triunghiul ABC şi în α' triunghiul $A'B'C'$ astfel încît dr. $AA' \|$ dr. $BB' \|$ dr. CC'. Demonstraţi că $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.

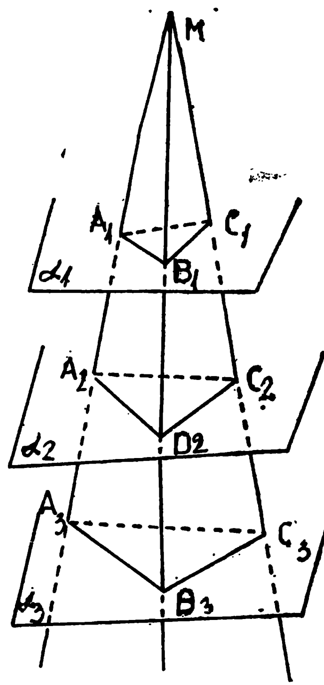


R. Folosim teorema: dacă două plane paralele intersectează două drepte paralele, atunci determină pe aceste drepte, segmente congruente. Din ipoteză: $\alpha \| \alpha'$ şi dr. $AA' \|$ dr. BB'; rezultă că $[AA'] \equiv [BB']$, deci patrulaterul $ABB'A'$ este paralelogram de unde obţinem că $[AB] \equiv [A'B']$ (1). şi dr. $AB \|$ dr. $A'B'$ (2). Asemănător, $\alpha \| \alpha'$ şi dr. $BB' \|$ dr. CC'; rezultă că $[BB'] \equiv [CC']$ deci patrulaterul $BB'C'C$ este paralelogram de unde obţinem că $[BC] \equiv [B'C']$(3) şi dr. $BC \|$ dr. $B'C'$ (4).

Din (2) şi (4) unghiurile ABC şi $A'B'C'$ avînd laturile respectiv paralele ($[BC$ şi $[B'C'$ sînt în acelaşi semiplan determinat de dr. BB', asemănător $[BA$ şi $[B'A')$ rezultă că $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$ (5). Folosim (1), (5) şi (3) şi obţinem că $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.

2.42[PO.M] . Se dau trei drepte concurente în spaţiu, care intersectează trei plane paralele. Demonstraţi că punctele de intersecţie ale dreptelor cu planele, formează în fiecare plan, un triunghi şi că cele trei triunghiuri sînt asemenea.

R. Demonstrăm că în planul α_1 dreptele concurente în M formează un triunghi $A_1B_1C_1$. Aceasta se va întîmpla numai cînd dreptele date sînt concurente necoplanare. În cazul cînd sînt coplanare planul în care sînt incluse intersectează planul α_1 după o dreaptă căreia îi aparţin punctele A_1, B_1 şi C_1 de intersecţie dintre dreptele date cu α_1. Cum acestea sînt coliniare rezultă că nu formează un triunghi. În cazul cînd sînt necoplanare ele determină trei plane diferite concurente în M. Fiecare din aceste plane intersectează planul α_1 după cîte o dreaptă, toate trei concurente două cîte două, deci trei puncte necoliniare care formează în α_1 triunghiul $A_1B_1C_1$. Asemănător, în α_2 se formează triunghiul $A_2B_2C_2$ iar în α_3 se formează triunghiul $A_3B_3C_3$ (notaţiile din desenul alăturat).



Demonstrăm asemănarea :

Dreptele concurente MA_1 şi MB_1 determină un plan care intersectează planele α_1, α_2 şi α_3 după trei drepte paralele : dr.$A_1B_1 \parallel$ dr.$A_2B_2 \parallel$ dr. A_3B_3 (1). În planul determinat de MA_1 şi MB_1, conform teoremei fundamentale a asemănării, avem că : $\Delta MA_1B_1 \sim \Delta MA_2B_2 \sim \sim \Delta MA_3B_3$

Din asemănarea triunghiurilor MA_1B_1 şi MA_2B_2 avem : $\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{MB_1}{MB_2}$ (2) iar din asemănarea triunghiurilor MA_1B_1 şi MA_3B_3 avem $\frac{A_1B_1}{A_3B_3} = \frac{MB_1}{MB_3}$ (3).

Dreptele concurente MB_1 şi MC_1 determină un alt plan care intersectează planele α_1, α_2, şi α_3 după alte trei drepte paralele : dr. $B_1C_1 \parallel$ dr. $B_2C_2 \parallel$ dr. B_3C_3 (4). În planul determinat de dreptele MB_1 şi MC_1, conform teoremei fundamentale a asemănării ,avem că : $\Delta MB_1C_1 \sim \sim \Delta MB_2C_2 \sim \Delta MB_3C_3$.

Din asemănarea triunghiurilor MB_1C_1 şi MB_2C_2 avem

$\frac{MB_1}{MB_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2}$ (5) iar din asemănarea triunghiurilor MB_1C_1 şi MB_3C_3 avem $\frac{MB_1}{MB_3} = \frac{B_1C_1}{B_3C_3}$ (6).

Din relaţiile (2) şi (5) obţinem că $\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2}$ (7) iar din relaţiile (3) şi (6) obţinem că $\frac{A_1B_1}{A_3B_3} = \frac{B_1C_1}{B_3C_3}$ (8).

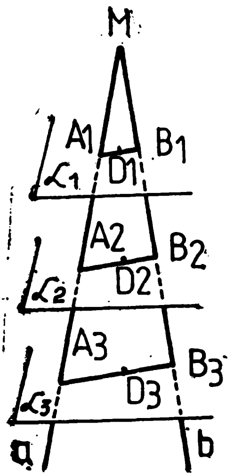
Din relaţiile (1) şi (4) găsim că unghiurile $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ şi $A_3B_3C_3$ sînt unghiuri cu laturile respectiv paralele. Cum laturile lor nu sînt incluse, în fiecare caz, în semiplane opuse, rezultă că sînt toate trei ori ascuţite, ori obtuze.

Obţinem că : $\sphericalangle A_1B_1C_1 \equiv \sphericalangle A_2B_2C_2 \equiv \sphericalangle A_3B_3C_3$ (9).

Folosim (7) şi o parte din (9) şi găsim că $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$ (10). Folosim (8) şi cealaltă parte din (9) şi găsim că $\Delta A_2B_2C_2 \sim \Delta A_3B_3C_3$ (11).

Din (10) şi (11), datorită faptului că în mulţimea de triunghiuri relaţia „este asemenea'' este o relaţie tranzitivă, rezultă că $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_3B_3C_3$, deci cele trei triunghiuri sînt asemenea între ele.

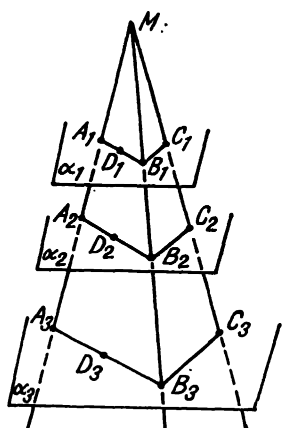
Observaţie! Demonstraţia se poate realiza folosind cazul de asemănare: cîte două unghiuri respectiv congruente. Pentru aceasta trebuia arătat că dr. $A_1C_1 \parallel$ dr. $A_2C_2 \parallel$ dr. A_3C_3 ca apoi să se demonstreze că $\sphericalangle B_1C_1A_1 \equiv \sphericalangle B_2C_2A_2 \equiv \sphericalangle B_3C_3A_3$ [ca unghiuri cu laturile respectiv paralele.



2.43^{PP}. Două drepte a şi b concurente în punctul M intersectează trei plane paralele α_1, α_2, α_3 în punctele A_1, A_2 şi respectiv A_3 şi în B_1, B_2 şi respectiv B_3 (A_1, A_2, A_3 aparţin lui a iar B_1, B_2, B_3 aparţin lui b). Demonstraţi că mijloacele segmentelor A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 sînt trei puncte coliniare cu punctul M.

R. Planul determinat de cele două drepte concurente intersectează cele trei plane paralele după drepte paralele. Deci dr. $A_1B_1 \parallel$ dr. $A_2B_2 \parallel$ dr. A_3B_3. Notăm cu D_1, D_2, D_3 mijloacele celor trei segmente (A_1B_1), (A_2B_2) şi respectiv (A_3B_3). În planul determinat de dreptele a şi b avem o problemă de geometrie plană: în triunghiul MA_3B_3, (MD_3) este mediană; mijloacele segmentelor (A_2B_2) şi (A_1B_1) paralele cu (A_3B_3) sînt coliniare cu M deoarece aparţin medianei (MD_3).

2.44^{PP}. Se dau trei drepte a, b, c concurente în spaţiu în punctul M, care intersectează trei plane paralele $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ după triunghiurile $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ şi respectiv $A_3B_3C_3$ (A_1, A_2, A_3 aparţin lui a, B_1, B_2, B_3 aparţin lui b iar C_1, C_2, C_3 aparţin lui c). *a*) Demonstraţi că punctele D_1, D_2, D_3 care sînt mijloacele segmentelor A_1B_1, A_2B_2 şi respectiv A_3B_3 sînt trei puncte coliniare; b) dr. $C_1D_1 \parallel$ dr. $C_2D_2 \parallel$ dr. C_3D_3.



R. a) Cerinţa respectivă este cerinţa problemei anterioare indiferent că se mai dă dreapta c.

b) Deoarece punctele M, D_1, D_2, D_3 sînt coliniare, determină o dreaptă. Această dreaptă împreună cu c, fiind concurente determină un plan care intersectează planele α_1, α_2 şi α_3 după dreptele C_1D_1, C_2D_2 şi respectiv C_3D_3, paralele între ele conform teoremei: dacă un plan intersectează mai multe plane paralele, el le intersectează după drepte paralele.

2.45[O.M]. Se dau trei drepte concurente în spaţiu, care intersectează trei plane paralele şi formează în fiecare plan cîte un triunghi. Demonstraţi ca centrele de greutate ale acestor triunghiuri sînt coliniare.

R. Folosim notaţiile din desenul de la problema anterioară. Centrele de greutate ale triunghiurilor respective se găsesc la intersecţia cel puţin a două mediane dintr-un triunghi. S-a demonstrat în problema anterioară la punctul b) că medianele (C_1D_1), (C_2D_2), (C_3D_3) sînt incluse în dreptele paralele respective, deci sînt coplanare, ele fiind incluse în planul (c ; dr. MD_1), Dacă notăm cu E_1, E_2 şi E_3 mijloacele segmentelor B_1C_1, B_2C_2 şi respectiv B_3C_3 şi acestea sînt coplanare, incluse în planul (a ; dr. ME_1).

Planele (c: dr. MD_1) şi (a ; dr. ME_1) sînt concurente după dreapta MG_1 unde G_1 este intersecţia medianelor (C_1D_1) şi (A_1E_1) adică centrul de greutate al triunghiului $A_1B_1C_1$. Dreptei MG_1 îi mai aparţine şi intersecţia dintre medianele (C_2D_2) şi (A_2E_2) care este G_2, adică centrul de greutate al triunghiului $A_2B_2C_2$. Asemănător, centrul de greutate al triunghiului $A_3B_3C_3$ notat cu G_3, aparţine dr. MG_1.

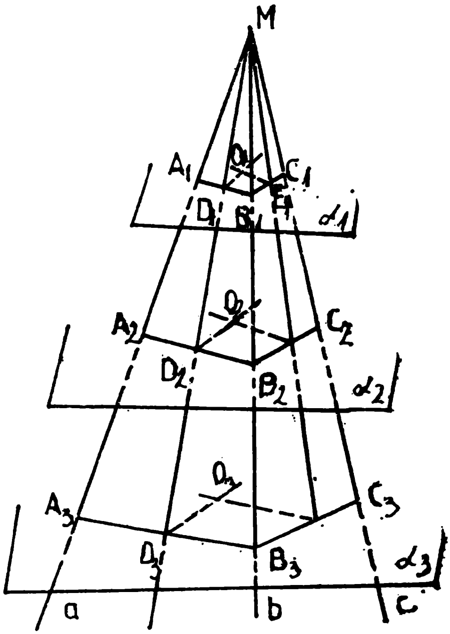
Deci cum G_1, G_2, G_3 aparţin aceleiaşi drepte ele sînt coliniare.

2.46[PO]. Se dau trei drepte concurente în spaţiu, care intersectează trei plane paralele şi formează în fiecare din aceste plane cîte un triunghi. Demonstraţi că centrele cercurilor circumscrise acestor triunghiuri sînt coliniare.

R. Folosim notaţiile din figura alăturată. Se poate demonstra că planul determinat de dr. MD_1 şi mediatoarea lui (A_1B_1) inclusă în α_1 intersectează pe α_2 după mediatoarea lui (A_2B_2) inclusă în α_2 iar pe α_3 după mediatoarea lui (A_3B_3) inclusă în α_3. Considerăm planul determinat de dr. ME_1 (E_1 este mijlocul lui (B_1C_1)) şi mediatoarea lui (B_1C_1) inclusă în α_1. Acest plan va intersecta pe α_2 după mediatoarea lui (B_2C_2) inclusă în α_2 iar pe α_3 după mediatoarea lui (B_3C_3) inclusă în α_3.

Aceste două plane se intersectează (căci A_1, B_1, C_1 sînt necoliniare) după dr. MO_1 care conţine pe O_2 şi O_3 care sînt centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor respective. O_1 este centrul cercului circumscris triunghiului $A_1B_1C_1$ căci el este intersecţia mediatoarelor laturilor (A_1B_1) şi(B_1C_1). O_2 este centrul cercului circumscris triunghiului $A_2B_2C_2$ căci el este intersecţia mediatoarelor laturilor (A_2B_2) şi (B_2C_2). Asemănător, O_3 este centrul cercului circumscris triunghiului $A_3B_3C_3$.

Observaţie: S-a vorbit, de exemplu, de fiecare dată despre mediatoarea lui (A_1B_1) inclusă în α_1, căci în spaţiu (A_1B_1) are o infinitate de mediatoare care formează planul mediator al lui (A_1B_1).



2.47[PP]. Se dau planele α şi β paralele. Punctele A, A', A'' sînt necoliniare şi aparţin lui α iar punctele B, B', B'' sînt necoliniare şi aparţin lui β astfel încît dr. $AB \parallel$ dr. $A'B' \parallel$ dr. $A''B''$. Fie $C \in (AB)$, $C' \in (A'B')$ şi $C'' \in (A''B'')$ în aşa fel ca $\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'} = \frac{A''C''}{C''B''} = 3$.

Găsiţi relaţia între planul (C, C', C'') şi α.

R. Folosim teorema : două plane paralele determină pe mai multe drepte paralele segmente congruente. Deci din ipoteză : $\alpha \parallel \beta$ și dr. $AB \parallel$ dr. $A'B' \parallel$ dr. $A''B''$; rezultă că $(AB) \equiv \equiv (A'B') \equiv (A''B'')$ (1) Din ipoteză se mai pot exprima : $AC = 3\,CB$; $A'C' = 3C'B'$; $A''C'' = 3C''B''$.

dar : $AB = AC + CB = 3CB + CB = 4CB$ de unde $CB = \dfrac{AB}{4}$ deci $AC = \dfrac{3}{4}AB$;

$A'B' = A'C' + C'B' = 3C'B' + C'B' = 4C'B'$ de unde $C'B' = \dfrac{A'B'}{4}$ deci $A'C' = \dfrac{3}{4}A'B'$;

$A''B'' = A''C'' + C''B'' = 3C''B'' + C''B'' = 4C''B''$ de unde $C''B'' = \dfrac{A''B''}{4}$ deci $A''C'' = \dfrac{3}{4}A''B''$.

Folosind (1) obținem că $(AC) \equiv (A'C') \equiv (A''C'')$ Deoarece avem și dr. $AC \parallel$ dr. $A'C' \parallel$ dr. $A''C''$ rezultă că patrulaterele $ACC'A'$ și $A'C'C''A''$ sînt paralelograme. Așadar dr. $CC' \parallel$ dr. AA'; cum dr. $AA' \subset \alpha$ rezultă că dr. $CC' \parallel \alpha$ (2). Apoi dr. $C'C'' \parallel$ dr. $A'A''$; cum dr. $A'A'' \subset \alpha$ rezultă că dr. $C'C'' \parallel \alpha$ (3) Dreptele CC' și $C'C''$ sînt incluse în planul (C, C', C''). Ele sînt concurente, fiecare paralelă cu α (din (2) și (3)), rezultă că $(C, C', C'') \parallel \alpha$.

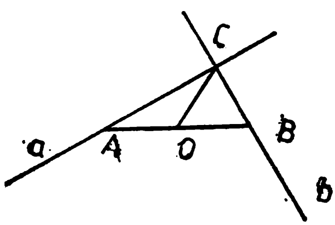
Obeervație. Dacă $(C, C', C'') \parallel \alpha$ și $\alpha \parallel \beta$ atunci $(C, C', C'') \parallel \beta$.

2.48.$^{P.O.M}$. Se consideră două plane paralele α și β. Se iau $A \in \alpha$, $B \in \beta$ și apoi un punct $C \in (AB)$ astfel încît $\dfrac{AC}{CB} = 3$. Demonstrați că mulțimea formată din punctele C (cînd A și B sînt oricare în planele respective) este inclusă într-un plan paralel cu α și cu β.

R. În problema anterioară au fost considerate trei puncte A, A', A'' ce aparțin lui α și alte trei puncte B, B', B'' ce aparțin lui β. Punctele C, C', C'' care îndeplinesc proprietatea din ipoteză determinau un plan paralel cu α și cu β. Luați la întîmplare un punct în α și altul în β, de exemplu A_1 și respectiv B_1 și demonstrați asemănător ca la problema anterioară că punctul C_1 cu proprietatea că $\dfrac{AC_1}{C_1B_1} = 3$ aparține aceluiași plan $(C, C', C'') \parallel \alpha \parallel \beta$.

§ 3. PERPENDICULARITATE ÎN SPAȚIU

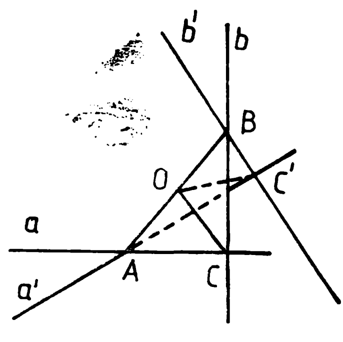
3.1[PP]**.** Se dau punctele A și B diferite între ele. Fie $A \in a$ iar $B \in b$, $a \perp b$ și concurente în C. Arătați că există un punct O astfel încît $(OA) \equiv (OB) \equiv (OC)$.



R. Deoarece a și b sînt concurente în C, ele determină un plan α. În α avem triunghiul ABC care este dreptunghic în C pentru că, în ipoteză, $a \perp b$. ABC fiind triunghi există un punct O astfel încît $(OA) \equiv (OB) \equiv (OC)$, acesta fiind centrul cercului circumscris triunghiului.

Acesta este mijlocul lui (AB) deoarece triunghiul ABC este dreptunghic și este unic.

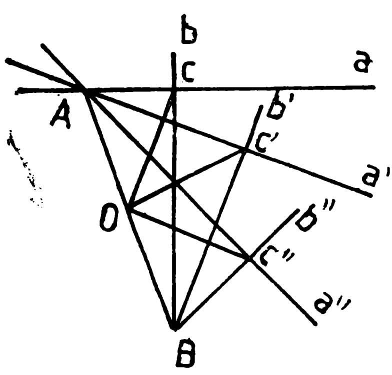
3.2[PP]**.** Se dau punctele A și B diferite între ele. Fie A aparținînd dreptelor a și a' iar B aparținînd dreptelor b și b' astfel încît $a \perp b$, $a' \perp b'$, $a \cap b = \{C\}$ și $a' \cap b' = \{C'\}$. Arătați că există un punct O astfel încît $(OA) \equiv (OB) \equiv (OC) \equiv (OC')$.



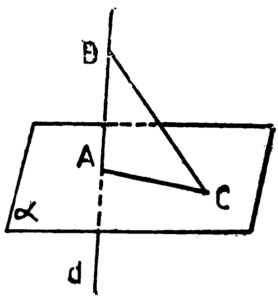
R. Aplicăm problema anterioară de două ori. Există punctul O, mijlocul lui (AB) astfel ca $(OA) \equiv (OB) \equiv (OC)$. Există punctul O', mijlocul lui (AB), astfel ca $(O'A) \equiv (O'B) \equiv (O'C')$.

(AB) are un singur mijloc deci $O = O'$, așadar există O cu proprietatea $(OA) \equiv (OB) \equiv (OC) \equiv (OC')$.

3.3[M]**.** Se dau punctele A și B. Prin A trec dreptele a, a', a'', iar prin B trec dreptele b, b', b'', perpendiculare și concurente respectiv cu primele în C, C', C''. Să se arate că există un punct O, astfel încît segmentele $(OA) \equiv (OB) \equiv (OC) \equiv (OC') \equiv (OC'')$.



R. Conform problemei anterioare avem că punctul O, mijlocul ipotenuzei (AB), se află la distanță egală de punctele A, B, C, C', C'', el fiind centrul cercurilor de diametru AB, circumscrise triunghiurilor dreptunghice, în spațiu, ABC, ABC', ABC''.



3.4. Se dă dreapta d perpendiculară pe planul α în punctul A. Fie $B \in d$ şi $C \in \alpha$. Calculaţi distanţa de la A la C ştiind că: a) $AB = 3\sqrt{5}$ m; $BC = 7\sqrt{3}$ m; b) $AB = 3$ m, $BC = 5$ m; c) $AB = 8$ m, $BC = 10$ m; d) $AB = 3\sqrt{2}$, $BC = 6$.

R. a) Din ipoteză, $d \perp \alpha$, deci d este perpendiculară pe orice dreaptă inclusă în α. Obţinem că $d \perp$ dr. AC şi rezultă că triunghiul ABC este dreptunghic în A. Aplicăm teorema lui PITAGORA:

$AC^2 + AB^2 = BC^2$ şi avem: $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{147 - 45} = \sqrt{102}$ (m); b) 4 m; c) 6 m; d) $3\sqrt{2}$ m.

3.5. Se dă dreapta d perpendiculară pe planul α în punctul A. În planul α se consideră două puncte C şi D diferite, iar pe d punctul B. Calculaţi distanţele de la punctele C şi D la punctul B ştiind că: a) $AB = 12$ cm, $AC = 4$ cm, $AD = 7$ cm; b) $AB = 9$ cm, $AC = 12$ cm, $AD = 5$ cm; c) $AB = \sqrt{3}$ cm, $AC = 2\sqrt{5}$ cm, $AD = 20$ mm.

R. Din ipoteză $d \perp \alpha$, deci $d \perp$ dr. AC (1) şi $d \perp$ dr. AD (2). Din (1) obţinem că triunghiul BAC este dreptunghic în A. Aplicăm teorema lui PITAGORA şi găsim că $BC = \sqrt{12^2 + 4^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$ cm. Din (2), triunghiul BAD este dreptunghic în A. Asemănător găsim că $BD = \sqrt{12^2 + 7^2} = \sqrt{193}$ cm. b) $BC = 15$ cm; $BD = \sqrt{106}$ cm; c) $BC = \sqrt{23}$ cm; $BD = \sqrt{7}$ cm.

3.6. Se dă dreapta d perpendiculară pe planul α în punctul A. În planul α se consideră două puncte C şi D diferite, iar pe d punctul B.

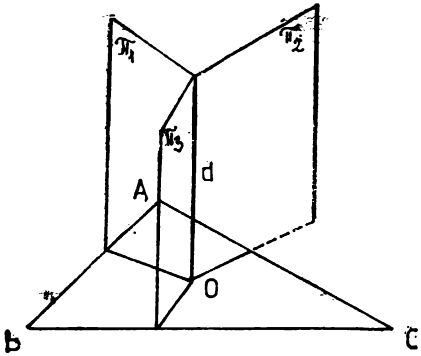
Calculaţi măsura unghiului CAD ştiind că $(BC) \equiv (CD)$ în cazul cînd: a) $AC = 5$ cm, $AD = 8$ cm, $BD = 8\sqrt{2}$ cm; b) $AC = 3$ cm, $AD = 4$ cm, $BD = 4\sqrt{2}$ cm; c) $AB = 4$ m, $AC = 3$ m, $AD = 4$ m.

R. a) Din ipoteză $d \perp \alpha$, deci d este perpendiculară pe orice dreaptă inclusă în α. Obţinem că $d \perp$ dr. AD (1) şi $d \perp$ dr. AC (2).

Din (1) rezultă că triunghiul ABD este dreptunghic în A şi din teorema lui PITAGORA avem: $AB = \sqrt{BD^2 - AD^2} = \sqrt{128 - 64} = \sqrt{64} = 8$ (cm). Din (2) rezultă că triunghiul ABC este dreptunghic în A şi din teorema lui PITAGORA avem: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{64 + 25} = \sqrt{89}$ (cm). Din ipoteză $(BC) \equiv (CD)$ deci $CD = \sqrt{89}$ cm. Aplicînd reciproca teoremei lui PITAGORA se constată că $5^2 + 8^2 = (\sqrt{89})^2$ adică $AC^2 + DA^2 = CD^2$. Rezultă că triunghiul ACD este dreptunghic în A şi avem că $\sphericalangle CAD$ are 90°; b) 90°; c) 90°.

Observaţie: După ce se efectuează calculele se constată că $(AB) \equiv (AD)$; apoi din ipoteză $(BC) \equiv (CD)$ şi rezultă că $\Delta BAC \equiv \Delta DAC$ avînd şi latura (AC) comună. Cum $\sphericalangle BAC$ are 90° obţinem că de asemenea $\sphericalangle DAC$ are 90°.

3.7^M. Se dau trei puncte necoliniare. Să se demonstreze că locul geometric al punctelor din spaţiu, egal depărtate de cele trei puncte, este o dreaptă.



R. Fie A, B, C cele trei puncte și fie π_1, π_2, π_3 planele mediatoare ale segmentelor AB, AC, BC. Evident, planele π_1, π_2, π_3 sînt perpendiculare pe planul (ABC).

Fie $d_1 = (ABC) \cap \pi_1$; $d_2 = (ABC) \cap \pi_2$; $d_3 = (ABC) \cap \pi_3$. Dar d_1, d_2, d_3 sînt mediatoarele triunghiului ABC, care se întîlnesc într-un punct O, centrul cercului circumscris triunghiului.

Fie acum $d = \pi_1 \cap \pi_2$. Cum intersecția a două plane perpendiculare pe alt plan este o dreaptă perpendiculară pe acel plan, avem:

$$d \perp (ABC).$$

Cum $O \in \pi_1 \cap \pi_2$, d „trece" prin punctul O. Locul geometric este tocmai dreapta d, perpendiculară în O pe planul celor trei puncte.

3.8^{M}. Se dau patru puncte necoplanare. Să se demonstreze că există un punct egal depărtat de ele și să se determine acest punct.

R. Fie A, B, C, D cele patru puncte. Să considerăm punctele A, B, C. Locul geometric al punctelor egal depărtate de ele este o dreaptă d, perpendiculară pe planul (ABC) în centrul O_1 al cercului circumscris triunghiului.

Fie punctele A, B, D. Locul geometric al punctelor egal depărtate de ele este o dreaptă d_1, perpendiculară pe planul (ABD) în O_2, centrul cercului circumscris lui ABD.

Evident că atît d cît și d_1 se află în planul mediator π al segmentului (AB). Cum ele nu sînt paralele (altfel planele ABC și ABD se suprapun), să notăm cu M punctul lor de intersecție. Punctul M este egal depărtat de A, B, C, D.

3.9^{M}. Pe planul triunghiului ABC, cu $AB = 7$ cm, se duc perpendicularele $AA' = 7$ cm și $BB' = 7$ cm. Dacă $A'C \equiv B'C$, $A'C = 7\sqrt{2}$ cm, arătați că triunghiul ABC este echilateral.

R. În triunghiul $AA'C$, dreptunghic în A, avem:

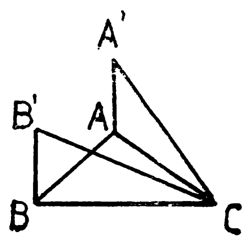
$$AC = \sqrt{(7\sqrt{2})^2 - 7^2} = \sqrt{49} = 7 \text{ cm}.$$

Dar triunghiurile dreptunghice $AA'C$ și $BB'C$ sînt congruente, avînd ipotenuzele congruente, $(A'C) \equiv (B'C)$ și cîte o catetă congruentă, $(AA') \equiv (BB')$. Deci:

$$(BC) \equiv (AC)$$

de unde $BC = 7$ cm. Deci:

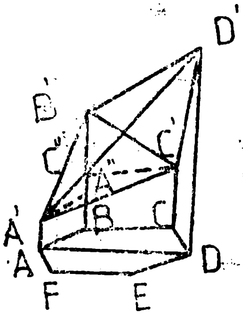
$$(AB) \equiv (AC) \equiv (BC).$$



3.10^{M}. Un triunghi dreptunghic „variabil" ABC, cu unghiul A avînd măsura de 90°, are vîrfurile A și B fixe și cateta AC de lungime constantă. Care este locul geometric al vîrfului C?

R. Să considerăm două poziții ale punctului C, C', C''. Cum $AC' \perp AB$ și $AC'' \perp AB$ atunci $AB \perp (AC', AC'')$ deci punctele C', C'' se află într-un plan ce trece prin A și este perpendicular pe AB. Fie acest plan π. Locul geometric al punctelor C, este locul punctelor din planul π, egal depărtate de punctul A, adică cercul de centru A și raza de lungime (AC).

3.11.[M]. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat, de latură 4. În punctele A, B, C, D se „ridică“ perpendicularele AA', BB', CC', DD', pe planul său de lungimi 1, 4, 2, 7 (în această ordine). Să se afle distanțele $A'B'$, $A'C'$, $A'D'$, $B'C'$, $B'D'$, $C'D'$.



R. Cum dr. AA' și dr. BB' sînt perpendiculare pe planul $ABCDEF$, avem:

$$\text{dr. } AA' \perp \text{dr. } AB;\ \text{dr. } BB' \perp \text{dr. } AB.$$

Să considerăm acum trapezul dreptunghic $ABB'A'$. Ducem dr. $A'A''$ paralelă la dr. AB prin A' și considerăm triunghiul dreptunghic în A'', $A'A''B'$. Cum $A'A = A''B$, $A'A'' = AB$ și $A''B' = BB' - A''B = 4 - 1 = 3$, avem:

$$A''B' = \sqrt{A'A''^2 + A''B'^2} = \sqrt{16 + 9} = 5.$$

La fel, dr. CC' și dr. BB' fiind perpendiculare pe $(ABCD)$, avem:

$$\text{dr. } CC' \perp \text{dr. } BC,\ \text{dr. } BB' \perp \text{dr. } BC.$$

Să considerăm trapezul dreptunghic $BCC'B'$ și să ducem $C'C''$ paralelă cu dr. BC. Cum:

$$\text{dr. } BB' \parallel \text{dr. } CC'$$

ca perpendiculare pe același plan, avem:

$$BC = C'C'';\ C'C = BC''.$$

Deci, din triunghiul dreptunghic $C'C''B'$, avem:

$$B'C' = \sqrt{C'C''^2 + B'C''^2}.$$

Dar $C'C'' = 4$; $B'C'' = B'B - BC'' = 4 - 2 = 2$, deci:

$$B'C' = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Calculul lui $C'D'$ se va face considerînd trapezul dreptunghic $CC'D'D$, în care ducem prin C' paralela $C'D''$ la CD. Evident din triunghiul dreptunghic $C'D''D'$ avem:

$$C'D' = \sqrt{C'D''^2 + D'D''^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}.$$

deoarece

$$C'D'' = CD \text{ și } D'D'' = D'D - CC'.$$

Analog, din trapezele dreptunghice $ADD'A'$, $BB'D'D$, $AA'C'C$, se vor calcula lungimile segmentelor $A'D'$, $B'D'$, $A'C'$. Avem:

$$A'C' = 7;\quad A'D' = 10;\quad B'D' = \sqrt{57}.$$

3.12. Într-un punct A al unui cerc de centru O, se duce perpendiculara pe planul cercului pe care se ia un punct A', astfel încît $AA' = 5$ cm. Știind că distanța $A'O = 13$ cm, să se afle:

a) Lungimea razei cercului;

b) Locul geometric al lui M, mijlocul lui $A'O$, cînd A descrie cercul.

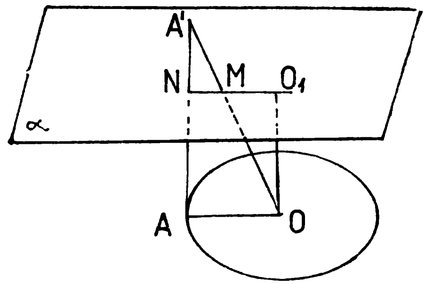
R. a) Deoarece dreapta $A'A$ este perpendiculară pe planul cercului, ea este perpendiculară pe orice dreaptă din plan, adică și pe AO. Atunci din triunghiul dreptunghic $A'AO$, avem:

$$AO = \sqrt{A'O^2 - AA'} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12.$$

b) Să construim dr. $MN \parallel$ dr. AO.

Să notăm cu α planul ce conține dreapta MN și este paralel cu planul cercului de centru O.

Evident, în triunghiul $A'AO$, avem:



$$\text{dr. } MN \parallel \text{dr. } AO$$

deci:

$$\frac{MN}{AO} = \frac{A'M}{A'O}$$

Dar $A'M = \frac{1}{2} A'O = 6{,}5$. De aici:

$$MN = \frac{AO}{2} = 6.$$

Fie OO_1 perpendiculara ($O_1 \in \alpha$) ridicată din O pe planul π. Evident dr. $OO_1 \parallel$ dr. $A'A$, și cum dr. $MN \parallel$ dr. AO, ($O_1 \in MN$), avem:

$$O_1N = AO.$$

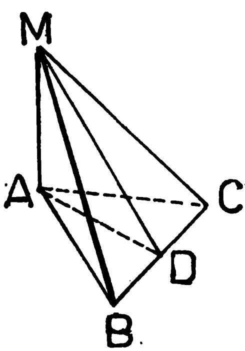
Deci:

$$O_1M = O_1N - NM = 12 - 6 = 6.$$

Cum O_1 este fix și M un punct al locului, arbitrar ales, să observăm că segmentul O_1M este constant, indiferent de poziția lui M.

Locul geometric al lui M va fi cercul cu centru în O_1 și cu raza de lungime $O_1M = 6$, aflat în planul α.

3.13. Pe planul triunghiului echilateral ABC, se pune în evidență perpendiculara în A, pe care se consideră punctul M. Calculați distanțele de la M la punctele B și C și apoi la D, mijlocul lui (BC), știind că: a) $AM = 12$ cm, $AB = 5\sqrt{2}$ cm; b) $AM = 4$ cm, $AB = 3$ cm; c) $AM = AB = 5\sqrt{2}$ cm.



R. a) Din ipoteză, dr. $AM \perp (A, B, C)$. Rezultă că dr. $AM \perp$ dr. AB (1), dr. $AM \perp$ dr AC (2) și dr. $AM \perp$ dr. AD (3).

Din (1), triunghiul MAB este dreptunghic în A și din teorema lui PITAGORA avem

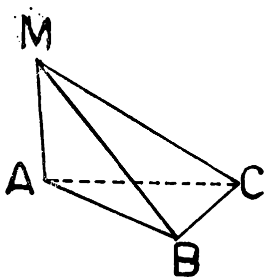
$$MB = \sqrt{AM^2 + AB^2} = \sqrt{144 + 50} = \sqrt{194} \text{ cm}.$$

Din (2), triunghiul MAC este dreptunghic în A și avem $MC = \sqrt{AM^2 + AC^2} = \sqrt{194}$ cm. În triunghiul echilateral ABC, D fiind mijlocul lui (BC) avem că (AD) este mediană și înălțime. Obținem, aplicînd formula $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$, $AD = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$ (cm). Din (3), triunghiul MAD este dreptunghic și avem: $MD = \sqrt{AM^2 + AD^2} = \sqrt{\frac{726}{4}} = \frac{11\sqrt{6}}{2}$ (cm).

b) $MB = MC = 5$ cm, $MD = \frac{\sqrt{91}}{2}$ cm; c) $MB = MC = 10$ cm, $MD = \frac{5\sqrt{14}}{2}$ cm.

Observație: $(AB) \equiv (AC)$, deci triunghiurile dreptunghice AMB și AMC sînt congruente căci (AM) este comună. Deci $MB = MC$ și nu mai este nevoie să se calculeze decît una din distanțele MB și MC. Se observă că triunghiul MBC este isoscel, iar MD se poate calcula fiind înălțime în acest triunghi.

3.14. Pe planul triunghiului isoscel ABC ($AB = AC = 8$ cm) se pune în evidență perpendicula a în A pe care se consideră punctul M. Calculați distanțele de la M la punctele B și C știind că: a) $AM = 5\sqrt{5}$ cm; b) 6 cm; c) 4 cm; d) $8\sqrt{2}$ cm.

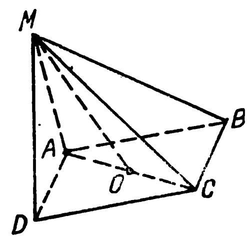


R. a) Din ipoteză dr. $AM \perp (A, B, C)$; rezultă că dr. $AM \perp$ dr. AB și dr. $AM \perp$ dr. AC, deci triunghiurile MAB și MAC sînt dreptunghice în A. Aplicînd teorema lui PITAGORA găsim că $MB = \sqrt{AM^2 + AB^2} = \sqrt{125 + 64} = \sqrt{189} = 3\sqrt{21}$ (cm). Deoarece $(AB) \equiv (AC)$ triunghiurile dreptunghice MAB și MAC sînt congruente, avînd (AM) latură comună. De aici avem că $MB = MC = 3\sqrt{21}$ cm. b) $MB = MC = 10$ cm; c) $MB = MC = 4\sqrt{5}$ cm d) $MB = MC = 8\sqrt{3}$ cm.

3.15. Pe planul triunghiului ABC se consideră perpendiculara AA'. Calculați distanța de la A' la centrul cercului circumscris triunghiului ABC în cazul cînd: a) $AA' = \sqrt{13}$ cm, $A'B = A'C = 11$ cm, $BC = 6\sqrt{3}$; b) $AA' = \sqrt{6}$ cm, $A'B = A'C = 9$ cm; $BC = 5\sqrt{3}$ cm.

R. a) Din ipoteză dr. $AA' \perp (A, B, C)$ deci dr. $AA' \perp$ dr. AB și dr. $AA' \perp$ dr. AC. Din aceste două relații obținem că triunghiurile $A'AB$ și $A'AC$ sînt dreptunghice în A. Deoarece (AA') este catetă comună și $A'B = A'C$, adică $(A'B) \equiv (A'C)$ rezultă că aceste triunghiuri sînt congruente. Obținem că $(AB) \equiv (AC)$ deci din teorema lui PITAGORA $AB = AC = \sqrt{11^2 - (\sqrt{13})^2} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$ (cm). Așadar triunghiul ABC este un triunghi echilateral, căci $AB = AC = CB = 6\sqrt{3}$ cm. Se stie că latura triunghiului echilateral are formula $R\sqrt{3}$ unde R este lungimea razei cercului circumscris triunghiului; în cazul nostru din $6\sqrt{3} = R\sqrt{3}$ obținem că $R = AO = 6$ cm. Din dr. $AA' \perp (A, B, C)$ mai rezultă că dr. $AA' \perp$ dr. AO deci triunghiul $A'AO$ este și el dreptunghic iar distanța cerută este $A'O = \sqrt{A'A^2 + AO^2} = \sqrt{13 + 36} = \sqrt{49} = 7$ (cm); b) $\sqrt{31}$ cm.

3.16. Pe planul pătratului $ABCD$ se pune în evidență perpendiculara în A pe care se consideră punctul M. Calculați distanțele de la punctul M la vîrfurile pătratului și apoi la centrul cercului circumscris pătratului în cazul cînd: a) $AM = 5$ cm, $AB = 6$ cm; b) $AM = 6$ cm, $AB = 6$ cm; c) $AM = a$, $AB = b$.



R. a) Avem dr. $AM \perp (A, B, C)$ (1), dec distanța de la M la A este $MA = 5$ cm. Din (1) obținem că dr. $AM \perp$ dr. AB (2), dr. $AM \perp$ dr. AD (3) și dr. $AM \perp$ dr. AC (4).

Din (2) rezultă că triunghiul MAB este dreptunghic în A și găsim $MB = \sqrt{MA^2 + AB^2} = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61}$ (cm).

Din (3) rezultă că triunghiul MAD este dreptunghic în A.

Deoarece $ABCD$ este pătrat avem că $(AB) \equiv (AD)$; cu această relație și faptul că (AM) este latură comună obținem că triunghiurile dreptunghice MAB și MAD sînt congruente și deci $MB = MD = \sqrt{61}$ cm.

Din (4) rezultă că și triunghiul MAC este dreptunghic în A, și găsim $MC = \sqrt{MA^2 + AC^2}$. Cum (AC) este diagonală a pătratului avem că $AC = 6\sqrt{2}$ cm. Așadar $MC = \sqrt{25 + 72} = \sqrt{97}$ (cm).

Centrul cercului circumscris pătratului este punctul de intersecţie al diagonalelor care se găseşte la mijlocul diagonalei (AC); îl notăm cu O. Triunghiul MAO este dreptunghic în A. Avem $MO=\sqrt{MA^2+AO^2}$. Cum $AO=\frac{AC}{2}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$ (cm) avem că $MO=$ $=\sqrt{25+18}=\sqrt{43}$ (cm).

În continuare avem:

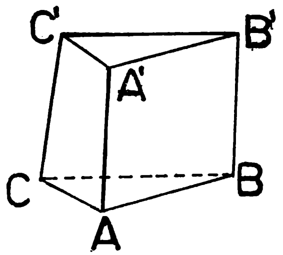
b) $MB=MD=6\sqrt{2}$ cm, $MC=6\sqrt{3}$ cm; $MO=3\sqrt{6}$ cm; c) $MB=MD=\sqrt{a^2+b^2}$, $MC=\sqrt{a^2+2b^2}$, $MO=\frac{\sqrt{4a^2+2b^2}}{2}$.

3.17. În vîrfurile triunghiului ABC, dreptunghic în A, se consideră, de aceeaşi parte, perpendiculare pe planul lui, pe care se iau punctele A', B', C' (ca în desenul alăturat) astfel încît $(AA')\equiv(BB')\equiv(CC')$. Calculaţi măsurile laturilor şi unghiurilor triunghiului $A'B'C'$ ştiind că:

a) $BC=20$ cm, $AB=10$ cm;

b) $BC=18$ cm, $AB=9$ cm;

c) $AB=16$ cm, $BC=16\sqrt{2}$ cm.



R. Se ştie că toate perpendicularele pe un plan sînt paralele între ele. Avem deci dr.AA'‖dr.BB'‖dr.CC' şi $(AA')\equiv(BB')\equiv$ $\equiv(CC')$, deci patrulaterele $ABB'A'$, $BB'C'C$ şi $CC'A'A$ sînt dreptunghiuri.

Rezultă din aceasta că $A'B'=AB=10$ cm, $B'C'=$ $=BC=20$ cm, $A'C'=AC=\sqrt{CB^2-AB^2}=\sqrt{400-100}=$ $=10\sqrt{3}$ (cm).

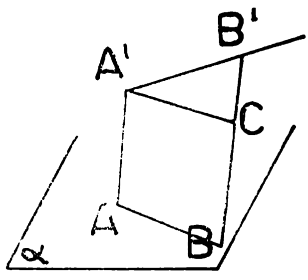
Deasemenea mai rezultă că $\Delta ABC\equiv\Delta A'B'C'$ şi deci $m(\widehat{CAB})=m(\widehat{C'A'B'})=90°$, $m(\widehat{ACB})=m(\widehat{A'C'B'})=30°$ deoarece în triunghiul dreptunghic ABC cateta (AB) are măsura jumătate din măsura ipotenuzei. În sfîrşit, $m(\widehat{C'B'A'})=m(\widehat{CBA})=90°-30°=60°$.

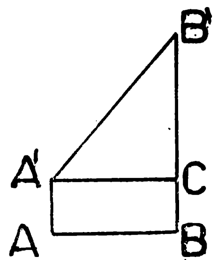
În continuare avem:

b) $B'C'=18$ m; $A'B'=9$ cm, $A'C'=9\sqrt{3}$ cm, $m(\widehat{C'A'B'})=90°$, $m(\widehat{A'C'B'})=30°$; $m(\widehat{C'B'A'})=60°$; c) $A'B'=A'C'=16$ cm, $B'C'=16\sqrt{2}$ cm, $m(\widehat{C'A'B'})=90°$, $m(\widehat{A'C'B'})=$ $=m(\widehat{A'B'C'})=45°$.

Observaţie. Problema nu se schimbă cu nimic dacă avem dr.AA'‖dr.BB'‖dr.CC', fără să fie perpendiculare pe planul (ABC).

3.18^M. Fie în planul α punctele A şi B şi dreptele AA' şi BB' perpendiculare pe α, A' şi B' de aceeaşi parte a lui α. Calculaţi distanţa AB în cazul cînd: a) $AA'=5$ cm, $BB'=10$ cm, $A'B'=13$ cm;





b) $AA' = 6$ cm, $BB' = 10$ cm, $A'B' = 5$ cm ; c) $AA' = 3$ cm, $BB' = 11$ cm $A'B' = 10$ cm.

R. a) Deoarece dr.$AA' \perp \alpha$ și dr.$BB' \perp \alpha$ rezultă că dr.$AA' \parallel$ dr.BB' și determină un plan β, în care avem trapezul dreptunghic $AA'B'B'$ cu bazele (AA') și (BB').
În triunghiul dreptunghic $A'CB'$ (dr.$A'C \perp$ dr.BB') avem, conform teoremei lui PITAGORA, $A'C = \sqrt{A'B'^2 - B'C^2} = 12$ cm. Deoarece patrulaterul $ABCA'$ este dreptunghi avem $A'C = AB = 12$ cm ; b) 3 cm ; c) 6 cm.

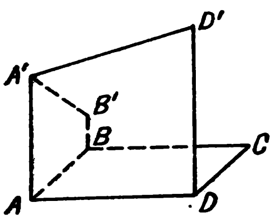
3.19[M]. Pe planul dreptunghiului $ABCD$ se construiesc perpendicularele în A, B, D pe care se iau : $AA' = 19$ cm, $BB' = 14$ cm, $DD' = 23$ cm. Dacă $A'B' = 13$ cm, și $A'D' = 5$ cm, găsiți măsurile laturilor dreptunghiului $ABCD$.

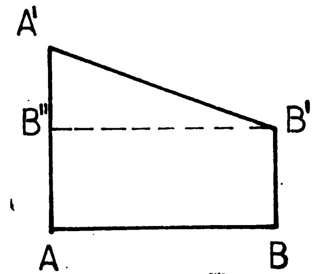
R. Deoarece dreptele AA', BB', DD' sînt perpendiculare pe planul $(ABCD)$, ele vor fi perpendiculare pe orice dreaptă inclusă în acest plan.
Fie dr.$B'B'' \parallel$ dr.AB. Cum dr.$A'A \parallel$ dr.BB' (ca perpendiculare pe același plan), avem :

$$(AB) \equiv (B'B'') ; (AB'') \equiv (BB').$$

Deci :

$$A'B'' = A'A - BB' = 19 \text{ cm} - 14 \text{ cm} = 5 \text{ cm}.$$





În triunghiul dreptunghic $A'B''B'$ avem :

$$B'B'' = \sqrt{A'B'^2 - A'B''^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ cm}.$$

Deci $AB = 12$ cm. Pentru calculul lui AD considerăm trapezul dreptunghic $ADD'A'$. La fel construim dr.$A'A'' \parallel$ dr.AD. Un raționament analog ne dă :

$$A'A'' = \sqrt{A'D'^2 - D'A''^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ cm}.$$

Deci $AD = A'A'' = 3$ cm.
Deoarece $ABCD$ este dreptunghi avem că:

$$AB = CD = 12 \text{ cm}, \; AD = BC = 3 \text{ cm}.$$

Observație : Rezolvarea problemei, de fapt, este rezolvarea problemei precedente cu privire la calculul măsurilor laturilor $[AB]$ și $[AD]$, dar cu o figură mai degajată.

3.20. Pe planul pătratului $ABCD$, în centrul său, notat cu O, se consideră perpendiculara d și $M \in d$, $M \neq O$.
Demonstrați că $(MA) \equiv (MB) \equiv (MC) \equiv (MD)$.

R. Din ipoteză dr. MO, fiind perpendiculară pe planul în care este inclus pătratul, este perpendiculară pe orice dreaptă inclusă în plan, adică avem dr.$MO \perp$ dr.AC și dr.$MO \perp$ dr.BD.

Din acest motiv triunghiurile MOA, MOB, MOC și MOD sînt dreptunghice în O. Diagonalele (AC) și (BD) sînt congruente și se înjumătățesc în O deci $(OA) \equiv (OB) \equiv (OC) \equiv (OD)$. Cum (OM) este latură comună, rezultă că cele patru triunghiuri dreptunghice sînt congruente.

Obținem, așadar, că $(MA) \equiv (MB) \equiv (MC) \equiv (MD)$.

Observație : Prin această problemă s-a demonstrat faptul că punctul M ce aparține perpendicularei în O pe planul pătratului se află la egală distanță de vîrfurile pătratului.

3.21. Se consideră $ABCD$ un pătrat, punctul O intersecția diagonalelor sale și un punct $M \neq O$ astfel încît $(MA) \equiv (MB) \equiv (MC) \equiv (MD)$. a) Demonstrați că dr.$MO$ este perpendiculară pe planul în care este inclus pătratul; b) dacă $P \neq O$ este un punct astfel încît $(PA) \equiv (PB) \equiv (PC) \equiv$ $\equiv PD$ se poate spune că $P \in$ dr MO?

R. a) Din ipoteză avem că $(MA) \equiv (MC)$ adică triunghiul MAC este isoscel.

Din faptul că $ABCD$ este pătrat obținem că $(AO) \equiv (OC)$. Rezultă că în triunghiul isoscel MAC, (MO) este mediană, deci (MO) este înălțime și deci dr. $MO \perp$ dr. AC (1).

Asemănător, din $(MB) \equiv (MD)$ triunghiul MBD este triunghi isoscel. Din $(BO) \equiv (DO)$ rezultă că (MO) este mediană, deci (MO) este înălțime și deci dr. $MO \perp$ dr. BD (2).

Din (1) și (2), deoarece dr. MO este perpendiculară pe două drepte neparalele incluse în planul în care este inclus pătratul, rezultă că dr. MO este perpendiculară pe acest plan.

b) În mod asemănător, demonstrați că dr.PO este perpendiculară pe planul în care este inclus pătratul. Deoarece într-un punct ce aparține unui plan nu există decît o singură perpendiculară pe acel plan, obținem că $P \in$ dr.MO.

3.22. Fie cercul de centru O, iar A, B, C puncte ce aparțin lui, astfel încît A, O, C sînt coliniare și un punct M cu proprietatea că $[MA] \equiv [MB] \equiv$ $\equiv [MC]$. Demonstrați că dr. MO este perpendiculară pe planul cercului.

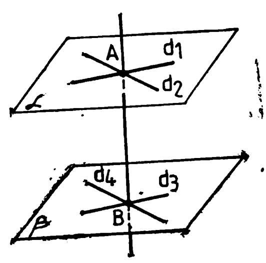
R. Din $[MA] \equiv [MC]$ și A, O, C coliniare avem că triunghiul MAC este un triunghi isoscel cu mediana $[MO]$ care este și înălțime, deci triunghiul MOA este dreptunghic în O. $\Delta MOA \equiv \Delta MOB$ (LLL). Rezultă că și triunghiul MOB este dreptunghic în O, deci dr.$MO \perp$ dr. OB. Cum dr. $MO \perp$ dr. AC, obținem că dr. MO este perpendiculară pe planul cercului, pentru că este perpendiculară pe două drepte concurente din plan.

3.23^{M}. O dreaptă d este perpendiculară pe planul α. Două drepte a și b sînt concurente și paralele cu α. Este dreapta d perpendiculară pe planul lor?

R. Construim prin punctul $\{M\} = d \cap \alpha$ o paralelă la a, pe care o notăm a'; cum $d \perp a'$ rezultă $d \perp a$. La fel, $d \perp b$. Deci $d \perp (a, b)$.

3.24. Planele α și β sînt plane paralele. O dreaptă d este perpendiculară pe α. Demonstrați că $d \perp \beta$.

R. Dreapta d intersectează pe α în A deci intersectează și pe β în B. În α există două drepte concurente în A, d_1 și d_2. Planul determinat de d și d_1 intersectează pe β după o dreaptă d_3 paralelă cu d_1. Deci $d \perp d_3$. Planul determinat de d și d_2 intersectează pe β după o dreaptă d_4 paralelă cu d_2. Deci $d \perp d_4$.



Cum d este perpendiculară pe d_3 și d_4 incluse în β (concurente) rezultă că $d \perp \beta$.

3.25^M. Fie d_1, d_2, d_3 trei drepte oarecare în spațiu. Să se arate că există triunghiuri isoscele care au vîrfurile pe cîte una din dreptele date.

R. Fie $D_1 \in d_1$, $D_2 \in d_2$. Fie α planul mediator al segmentului $[D_1D_2]$. Dacă $\alpha \parallel d_3$, nu există puncte $A \in d_3$ cu $[D_1A] \equiv [D_2A]$. Dacă $\alpha \cap d_3 = \{A\}$ atunci $[D_1A] \equiv [AD_2]$ și deci triunghiul AD_1D_2 este isoscel.

Deci se aleg punctele D_1 și D_2 astfel încît planul mediator al segmentului (D_1D_2) să intersecteze pe d_3.

3.26^M. Se dau dreptele paralele a, b, c și un punct O, nesituat pe ele. Ducem din O perpendicularele OA, OB, OC respectiv pe a, b, c ($A \in a$, $B \in b$, $C \in c$). Sînt dreptele OA, OB, OC coplanare?

R. Avem de studiat cazurile cînd dreptele a, b, c sînt coplanare sau necoplanare.

Dacă a, b, c sînt coplanare, ele determină un plan, iar dreptele OA, OB, OC se vor găsi în planul ce conține pe O și este perpendicular pe planul (a, b, c). Vom arăta că, chiar dacă a, b, c nu sînt coplanare, dreptele OA, OB, OC sînt coplanare.

Astfel, deoarece, de exemplu, a perpendiculară pe dr. OA și $a \parallel b$, avem a perpendiculară pe dr. OB, adică dreapta este perpendiculară pe planul dreptelor OA și OB. Analog, a este perpendiculară pe (OBC). Dacă dreptele OA, OB, OC n-ar fi coplanare, atunci planele (OAB) și (OBC) ar fi distincte. Deci, cu alte cuvinte, dintr-un punct O s-ar putea duce două plane perpendiculare pe o aceeași dreaptă, ceea ce este fals.

3.27. Fie $d \perp \alpha$. Orice dreaptă d_1 paralelă cu α este perpendiculară pe d?

R. Orice plan β ce are pe d_1 inclusă în el, care intersectează pe α, îl intersectează după o dreaptă $d_2 \parallel d_1$. Dar $d \perp \alpha$, deci $d \perp d_2$. Cum $d_2 \parallel d_1$ rezultă că $d \perp d_1$, deci $d_1 \perp d$.

3.28^M. În ce caz se poate duce printr-o dreaptă a, dată, un plan perpendicular pe o altă dreaptă dată b?

R. Fie π planul ce trece prin dreapta a și este perpendicular pe dreapta b.

Fie $\{M\} = b \cap \pi$ și, apoi, ducem prin M o paralelă d la a. Din construcția făcută, $b \perp d$, de unde $b \perp a$, deci a și b trebuie să fie perpendiculare.

3.29^M. Dacă dreapta d, care conține punctul A al planului α, nu este perpendiculară pe α, atunci există o dreaptă d_1, conținută în α, și numai una, perpendiculară în A pe d.

R. Fie un plan ce trece prin A și este perpendicular pe dreapta d. Acesta este unic. Cum planul π și α au punctul A comun, ele au o singură dreaptă comună, d_1, care conține A. Cum $d_1 \subset \pi$, avem $d \perp d_1$. În același timp $d_1 \subset \alpha$ și $A \in d_1$, deci d_1 este dreapta căutată.

3.30^M. Se dă triunghiul dreptunghic ABC ale cărei catete au lungimile $AB = 2\sqrt{2}$ și $AC = \sqrt{3}$. Pe planul triunghiului se ridică, în aceeași parte, perpendicularele $A'A = 8$, $BB' = 4$, $CC' = 2$. Fie A_1, B_1, C_1 mijloacele segmentelor AA', BB' și respectiv CC'.

a) Să se arate că triunghiul $A'B'C'$ este dreptunghic.

b) Să se arate că triunghiul $A_1B_1C_1$ este echilateral.

R a) Calculăm lungimile laturilor triunghiului $A'B'C'$. Fie dr.$B'B'' \parallel$ dr.AB. Atunci triunghiul $A'B''B'$ este dreptunghic ($m(B'') = 90°$) și avem:

$$A'B' = \sqrt{\overline{B''B'}^2 + \overline{A'B''}^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (AA' - BB')^2} = \sqrt{24}.$$

Fie, apoi dr.$C''C'$ paralelă cu dr.AC. Triunghiul $A'C''C'$ este dreptunghic ($m(\widehat{C''}) = 90°$) și :

$$A'C' = \sqrt{C''C'^2 + A'C''^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (AA' - CC')^2} = \sqrt{39}.$$

Cum triunghiul ABC este dreptunghic, $CB = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{11}$ și, considerînd dr.$C'A''$ paralelă cu dr.CB, din triunghiul dreptunghic $A''B'C'$ ($m(\widehat{A''}) = 90°$), ipotenuza $B'C'$ este dată de :

$$B'C' = \sqrt{C'A''^2 + B'A''^2} = \sqrt{11 + (BB' - CC')^2} = \sqrt{15}.$$

Deci, se observă că :

$$A'B'^2 + B'C'^2 = A'C'^2$$

adică, conform reciprocei teoremei lui PITAGORA, triunghiul $A'B'C'$ este dreptunghic ($m(\widehat{B'}) = 90°$).

b) Fie dr.$C_1A_2 \parallel$ dr. CA ($A_2 \in$ dr.AA'). Din triunghiul $C_1A_1A_2$ dreptunghic în A_2, obținem $C_1A_1 = \sqrt{12}$.

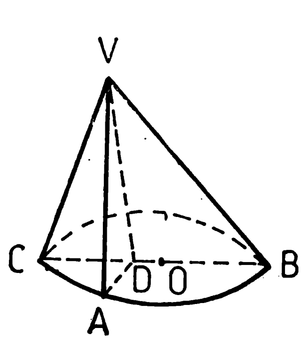
Fie dr.$B_1A_3 \parallel$ dr.AB ($A_3 \in$ dr.AA'). Din triunghiul $B_1A_3A_1$, dreptunghic în A_3, obținem $B_1A_1 = \sqrt{12}$.

Asemănător obținem că $B_1C_1 = \sqrt{12}$. Deci triunghiul $A_1B_1C_1$ este echilateral.

3.31^M. Într-un cerc cu raza de lungime R se înscrie un triunghi ABC, dreptunghic în A, măsurile arcelor $\widehat{AC}$ și $\widehat{AB}$ fiind invers proporționale cu numerele 1,(3) și 0,(6). Pe perpendiculara în A pe planul triunghiului ABC se consideră $[AV]$, unde $AV = \frac{3R}{2}$. Aflați : a) măsurile arcelor $\widehat{AC}$ și $\widehat{AB}$. b) aria triunghiului VBC;

R. a) Cunoștințele de la algebră permit să scriem :

$\dfrac{m(\widehat{AC})}{\dfrac{1}{1,(3)}} = \dfrac{m(\widehat{AB})}{\dfrac{1}{0,(6)}}$. Avem : $1,(3) = 1\frac{3}{9} = 1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ și $0,(6) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. Deci $\dfrac{m(\widehat{AC})}{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{m(\widehat{AB})}{\dfrac{3}{2}}$, adică $2\,m(\widehat{AC}) = m(\widehat{AB})$. Dar $m(\widehat{AC}) + m(\widehat{AB}) = 180°$. Din aceste două ecuații găsim că $m(\widehat{AC}) = 60°$ și $m(\widehat{AB}) = 120°$.

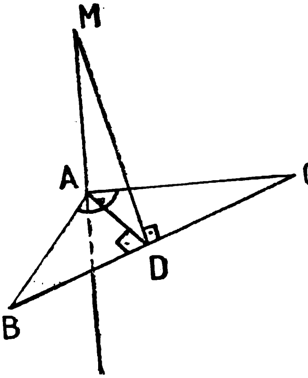


b) Deoarece $m(\widehat{AC}) = 60°$ avem $AC = R$, $m(\widehat{AB}) = 120°$, de unde $AB = R\sqrt{3}$. Fie dr. $AD \perp$ dr.BC ($D \in BC$). Din triunghiul dreptunghic ABC obținem că $AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{R\sqrt{3} \cdot R}{2R} = R\frac{\sqrt{3}}{2}$. Știm că dr.$AV$ este perpendiculară pe planul cercului, deci este perpendiculară și pe dr.AD. Avem, din teorema lui PITAGORA, că $DV = R\sqrt{3}$. Calculăm aria triunghiului VBC : $\frac{DV \cdot BC}{2} = \frac{R\sqrt{3} \cdot 2R}{2} = R^2\sqrt{3}$; $[DV]$ este înălțime în ΔVBC pentru că aplicăm teorema celor trei perpendiculare : dr. $AV \perp$ plan, dr. BC inclusă în plan, dr.$AD \perp$ dr.BC și deci dr.$DV \perp$ dr. BC.

§4. Teorema celor trei perpendiculare

4.1*. În vîrful A al triunghiului dreptunghic ABC ($\hat{A}$ are măsura $90°$) se consideră perpendiculara pe planul triunghiului pe care se consideră segmentul $[AM]$ de lungime 10 cm. Ştiind că $AB = 40$ cm şi $AC = 30$ cm, să se determine distanța de la M la dr.BC.

R. Fie dr.$AD \perp$ dr.BC. Din triunghiul ABC, avem



$$BC = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{2500} = 50 \text{ (cm)}$$

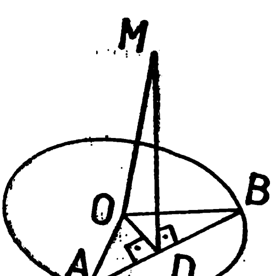
Atunci:

$$AD = \frac{AB \cdot AC}{CB} = 24 \text{ (cm)}$$

(aceasta este formula lungimii înălțimii corespunzătoare ipotenuzei scrisă cu ajutorul lungimii laturilor triunghiului). Dar, cum dr.AM este perpendiculară pe (ABC) şi AD este perpendiculară pe dr.BC şi dr.$BC \subset (ABC)$, atunci, conform teoremei celor trei perpendiculare, dr.MD este perpendiculară pe dr.BC şi, în plus, dr.MA perpendiculară pe AD, deoarece dr.MA este perpendiculară pe (ABC). Atunci, din triunghiul MAD dreptunghic în A, avem:

$$MD = \sqrt{AD^2 + MA^2} = \sqrt{10^2 + 24^2} = 26 \text{ (cm)}.$$

4.2*. Pe cercul (C) de centru O şi raza r de lungime 8 cm se iau două puncte A şi B astfel încît $m(\overset{\frown}{AB}) = 120°$. În O se „ridică" perpendiculara pe planul cercului pe care se ia $OM = 3$ cm. Să se determine distanța de la M la dreapta AB.



Deoarece A şi B aparțin cercului, $OA = OB = r = 8$cm; rezultă că triunghiul OAB este un triunghi isoscel

Fie dr.$OD \perp$dr.AB(1), $D \in$ dr.AB. În acest triunghi isoscel $[OD]$ este înălțime deci este şi mediană deci D este mijlocul lui $[AB]$. Cum $m(\widehat{AOB}) = 120°$, rezultă $[AB]$ este latura triunghiului echilateral înscris în cercul (C), deci $AB = r\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$, iar $[OD]$ este apotema lui deci $OD = \dfrac{r}{2} = 4$.

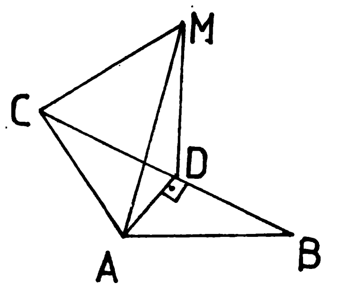
Din ipoteză dr. OM este perpendiculară pe planul cercului şi din (1), conform teoremei celor trei perpendiculare, obținem că dr.$MD \perp$dr. AB şi deci distanța de la M la dr. AB este MD, care se calculează din triunghiul MOD dreptunghic, în O:

$$MD = \sqrt{OM^2 + OD^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{(cm)}.$$

4.3ᴹ. Fie ABC un triunghi dreptunghic isoscel ($AB = AC = a$). În punctul D, piciorul înălțimii din A, se consideră perpendiculara pe planul triunghiului pe care se ia un punct M astfel încît $DM = b$. Să se arate că triunghiul AMC este isoscel.

R. Metoda I. Deoarece triunghiul ABC este isoscel, înălțimea $[AD]$ este și mediană, deci:

$$[AD] \equiv [CD] \equiv [BD].$$



Din dr.$MD \perp (ABC)$ rezultă că dr. $MD \perp$ $\perp$ dr.AD și dr. $MD \perp$ dr.CD. Observăm că triunghiurile dreptunghice ADM și CDM sînt congruente deoarece

$[AD] \equiv [DC]$ iar $[MD]$ este latură comună.

Rezultă $[MA] \equiv [MC]$, deci triunghiul AMC este isoscel,

Metoda a II-a. Fie dr.$DE \perp$ dr.AC ($E \in$ dr.AC). În triunghiul dreptunghic isoscel ADC înălțimea DE este și mediană, deci E este mijlocul lui $[AC]$. Avem dr. $MD \perp (ABC)$, dr.$AC \subset (ABC)$, dr.$DE \perp$ dr.AC. Conform teoremei celor trei perpendiculare avem dr.$ME \perp$ dr. AC. Așadar, în triunghiul AMC, $[ME]$ este mediană și înălțime, deci rezultă că el este triunghi isoscel.

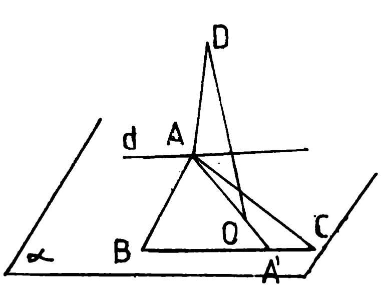
4.4ᴹ. Fie O un punct în planul triunghiului ABC și D un punct pe perpendiculara în O pe acest plan. Să se arate că dacă dr. $AD \perp$ dr. BC atunci O aparține înălțimii din A a triunghiului ABC.

R. Metoda I. Cum dreapta OD este perpendiculară pe planul (ABC), atunci este perpendiculară pe orice dreaptă din plan, în particular pe dreapta BC, deci dr.$BC \perp$ dr.OD.

Cum dr.$AD \perp$ dr.BC, din ipoteză, avem deci dreapta BC perpendiculară și pe dreapta AD, deci va fi perpendiculară pe planul determinat de dreptele AD și OD. Dar dr.$AO \subset$ $\subset (AOD)$ deci, din dr $BC \perp (AOD)$, rezultă dr.$BC \perp$ dr.AO, deci dr.$AO \perp$ dr.BC, adică O aparține înălțimii din A a triunghiului ABC.

Metoda a II-a. Fie dr.$AE \parallel$ dr.BC. Deoarece dr.$AD \perp$ dr.BC, din ipoteză, rezultă că dr.$AD \perp$ dr.AE. Avem dr.$DO \perp (ABC)$., dr.$AE \subset (ABC)$, dr.$AD \perp$ dr.AE. Conform reciprocei teoremei celor trei perpendiculare avem că dr.$AO \perp$ dr.AE. Dar dr. $AE \parallel$ dr.BC. Rezultă că dr.$AO \perp$ dr.BC și deci O aparține înălțimii din A a triunghiului ABC.

4.5ᴹ. Fie ABC un triunghi, O un punct în planul său α, D un punct pe perpendiculara în O pe planul α. Să se arate că dr. $AD \perp$ dr. BC dacă și numai dacă O aparține înălțimii din A a triunghiului ABC.



R. În această problemă avem formularea „dacă și numai dacă", deci vom rezolva două probleme.

Prima: ABC este un triunghi, O un punct în planul său α, D un punct pe perpendiculara în O pe planul α. Să se arate că dacă dr. $AD \perp$ dr. BC atunci O aparține înălțimii din A a triunghiului ABC. Aceasta este problema anterioară.

A doua: ABC este un triunghi, O un punct în planul său α, D un punct pe perpendiculara în O pe planul α. Să se arate că dacă O aparține înălțimii din A a triunghiului ABC atunci dr.$AD \perp$ dr.BC.

În adevăr, fie A' piciorul înălțimii din A pe dr.BC.

Deoarece dr. $OD \perp \alpha$, rezultă dr. $OD \perp$ dr. BC și cum dr. $BC \perp$ dr. AO, rezultă că dr. $BC \perp (ADO)$, deci dr. $BC \perp$ dr. AD, deoarece dr. $AD \subset (ADO)$.

4.6^{M}. Fie $[OA]$, $[OB]$, $[OC]$ trei segmente perpendiculare două cîte două. Perpendiculara din O pe planul triunghiului ABC intersectează planul (ABC) în punctul de intersecție al înălțimilor triunghiului ABC.

R. Fie H piciorul perpendicularei din O pe (ABC) și dr. $AA' = (HOA) \cap (ABC)$; dr.$CC' = (HOC) \cap (ABC)$; dr.$BB' = (HOB) \cap (ABC)$.

Cum dr.$BO \perp$ dr.OC și dr.$BO \perp$ dr.OA, avem dr.$BO \perp (AOC)$, deci dr.$BO \perp$ dr.AC. Cum dr.$HO \perp (ABC)$, avem dr.$OH \perp$ dr.AC, deci dr.AC este perpendiculară pe planul (BOH), în particular pe dr.BB', intersecția dintre planele (BOH) și (ABC). Deci dr.$BB' \perp$ dr.AC.

Analog se arată dr.$AA' \perp$ dr.BC și cum:

$$\text{dr. } AA' \cap \text{dr. } BB' = \{H\},$$

$[AA']$, $[BB']$ fiind înălțimi în triunghiul ABC, rezultă enunțul.

4.7^{M}. În triunghiul echilateral ABC, cu latura de lungime 10 cm, se construiește linia mijlocie $[NM]$ ($M \in$ dr. AB, $N \in$ dr. AC), care se prelungește cu un segment $[NO]$ congruent cu segmentul $[MN]$. În punctul O se ridică perpendiculara $[DO]$ pe planul triunghiului. Știind că $DO = 5\sqrt{3}$ cm, să se afle distanțele de la D la laturile triunghiului.

R. Fie dr.DE, dr.DF, dr.DG perpendicularele din D pe dreptele BC, AC și AB.

Din reciproca teoremei celor trei perpendiculare, cum dr. $DO \perp (ABC)$, din construcția efectuată avem:

$$\text{dr.}OE \perp \text{dr.}BC, \ \text{dr.}OF \perp \text{dr.}AC, \ \text{dr.}OG \perp \text{dr.}AB.$$

Se găsește că $BC = MO$ și cum $AN = NC$, $MN = NO$, avem dr.$AM \parallel$ dr.CO.

În triunghiul echilateral NOC ($NC = 5$ cm), avem $OF = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ și cum $m(\widehat{OCN}) = 60°$ avem și $m(\widehat{OCE}) = 60°$, deci $[OC]$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle NCE$ și cum dr.$OF \perp$ dr.NC și dr.$OE \perp$ dr.CE avem:

$$OE = OF = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ cm}.$$

Patrulaterul $AOCM$ este dreptunghi, avînd diagonalele congruente.

Deci dr.$AO \perp$dr.AB, adică perpendiculara din O pe dr.AB, intesectează dr.AB în A, adică:

$$G = A.$$

Atunci, din triunghiul AOM, dreptunghic în A, avem:

$$AO = \sqrt{MO^2 - AM^2} = 5\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

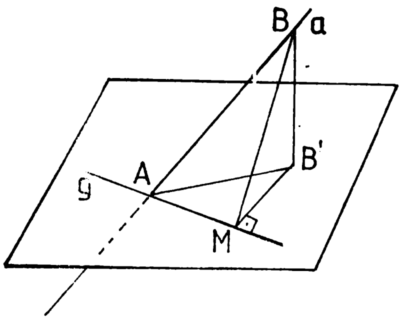
Deci, din triunghiurile dreptunghice DOE și DOA ($m(\hat{O}) = 90°$) avem:

$$DE = DF = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{15}}{2} \text{ (cm)}.$$

$$DA = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 + (5\sqrt{3})^2} = 5\sqrt{6} \text{ (cm)}.$$

Lungimile segmentelor $[DE]$, $[DF]$, $[DA]$ sînt distanțele la laturi.

4.8[M]. O dreaptă a intersectează un plan α în punctul A. Pe a se consideră un punct fix B şi fie o dreaptă variabilă $g \subset \alpha$ astfel ca $A \in g$. Să se determine locul geometric al picioarelor perpendicularelor din B pe dreapta g.



R. Fie M piciorul perpendicularei din B pe o dreaptă g şi B' proiecţia lui B pe planul α.

Cum dr. $BB' \perp \alpha$ şi dr. $BM \perp g$ avem:

dr.$B'M \perp g$ adică dr. $B'M \perp$ dr. AM.

Cum punctele A şi B' sînt fixe, atunci segmentul fix $[AB']$ este „văzut" întotdeauna din M sub unghiul constant $\widehat{AMB'}$ cu măsura de 90°.

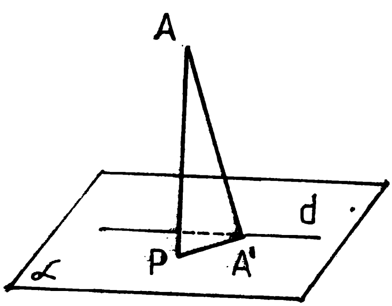
Cum M este variabil în planul α, locul geometric al punctelor M este cercul de diametru $[AB']$.

4.9[M]. Se dau: o dreaptă fixă d şi un punct fix A ($A \notin d$). Un plan mobil α conţine dreapta d. Prin A ducem dr.AP perpendiculară pe planul α ($P \in \alpha$). Se cere:

a) Să se arate că P descrie o curbă coplanară;

b) Să se găsească locul geometric al punctului P în spaţiu.

R. Fie dr, $AA' \perp d$ unde $A' \in d$. Cum dr. AP este perpendiculară pe planul α atunci ea este perpendiculară pe orice dreaptă din plan, în particular pe dreapta d.



Deci, cum $d \perp$ dr.AA' şi $d \perp$ dr. AP, atunci $d \perp (APA')$, adică P este conţinut în planul ce conţine pe A şi este perpendicular pe dreapta d, adică P descrie o curbă coplanară.

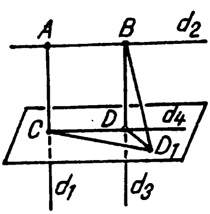
b) Din dr. $AP \perp$ dr. PA' şi cum punctele A şi A' sînt fixe, atunci segmentul fix $[AA']$ este „văzut" sub unghiul constant $\sphericalangle APA'$ cu măsura de 90°. Deci locul geometric al punctului P este cercul de diametru $[AA']$.

4.10[PP]. Fie α un plan dat şi A un punct ($A \notin \alpha$), iar d_1 şi d_2 o perpendiculară şi, respectiv, o paralelă dusă prin A la α. Fie D' un punct oarecare al planului α şi dr. $D'B$ ($B \in d_2$) perpendiculară pe d_2, iar dr.$D'C$ perpendiculară pe d_1 ($C \in d_1$). Din B ducem paralela d_3 la d_1, iar din C paralela d_4 la d_2.

a) Arătaţi că d_3 şi d_4 sînt concurente într-un punct D.

b) Arătaţi că $ABDC$ este dreptunghi.

c) Arătaţi că dr. DD' este perpendiculară pe planul (d_1, d_2).



R. a) Cum $d_1 \perp \alpha$, d_1 este perpendiculară pe orice dreaptă din plan, rezultă $d_1 \perp \text{dr}.CD$. Cum $d_1 \parallel d_3$ avem că intersecția dintre α și planul determinat de dreptele d_1 și d_3 este tocmai dr.CD.

Cum $d_2 \parallel \alpha$ și $d_2 \subset (d_1, d_3)$, rezultă că d_2 este paralelă cu dr.CD, deci, dr.$CD = d_4$ și :

$$d_3 \cap d_4 = \{D\}.$$

b) Deoarece $d_1 \perp \alpha$, d_1 va fi perpendiculară și pe dreapta d_4 inclusă în α. Cum avem :

$$d_2 \parallel d_4,\ d_1 \parallel d_3$$

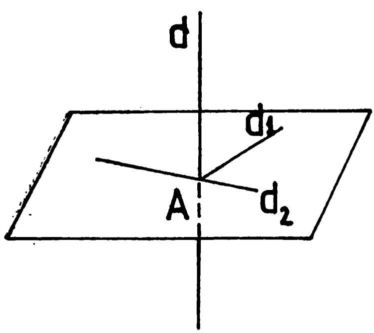
rezultă că patrulaterul $ABDC$ este dreptunghi.

c) Cum $d_1 \perp \alpha$, rezultă $d_1 \perp \text{dr}.DD'$, și cum $d_2 \perp \text{dr}.BD$ și $d_2 \perp \text{dr}.BD'$, rezultă :

$$d_2 \perp (DBD'),$$

deci d_2 perpendiculară pe orice dreaptă din acest plan, în particular $d_2 \perp \text{dr}.DD'$.

Din $d_1 \perp \text{dr}.DD'$ și $d_2 \perp \text{dr}.DD'$, rezultă că dreapta DD' este perpendiculară pe planul dreptelor d_1 și d_2.

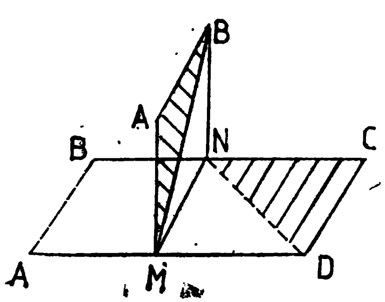


4.11. Să se demonstreze că dacă o dreaptă d face unghiuri congruente cu toate dreptele unui plan α atunci ea este perpendiculară pe plan.

R. Fie A punctul în care dreapta d intersectează planul α. Fie d_1 o dreaptă din planul α care conține pe A și care este perpendiculară pe d (o astfel de dreaptă există întotdeauna),

Fie acum o dreaptă d_2 care conține pe A și este inclusă în planul α. Evident, condiția enunțului impune ca unghiul dintre d și d_2 să fie tot drept (congruent cu cel dintre d și d_1). Astfel, cum d este perpendiculară pe două drepte concurente incluse în planul α, anume d_1 și d_2, va fi perpendiculară pe planul α.

4.12^M. Dreptunghiul $ABCD$ cu laturile de lungime $AB = 3$ cm, $BC = 12$ cm „se îndoaie" de-a lungul dreptei MN (M mijlocul lui $[AD]$, N mijlocul lui $[BC]$), pînă cînd planele (AMB) și (DCN) devin perpendiculare. Să se afle lungimea segmentului $[BD]$ după „îndoire".



R. Deoarece $(AMB) \perp (DCN)$ și dr.$BN \perp$ dr.MN rezultă că dr.BN este perpendiculară pe planul (NCD), deci dr.BN este perpendiculară pe dr. ND, deci triunghiul BND este dreptunghic.

Vom calcula pe ND din triunghiul dreptunghic CND. Avem :

$$DN^2 = CN^2 + DC^2 = 6^2 + 3^2 = 45 \text{ cm}^2$$

Deci, din triunghiul BND, avem :

$$BD = \sqrt{BN^2 + DN^2} = \sqrt{36 + 45} = 9 \text{ (cm)}.$$

4.13ᴹ. Două triunghiuri dreptunghice isoscele, ABC ($m(\hat{A}) = 90°$) și ADC ($m(\hat{C}) = 90°$), au cateta $[AC]$ ($AC = a$) comună și planele care le includ, perpendiculare. Să se calculeze lungimea segmentului $[BD]$.

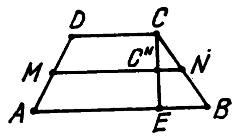
R. Cum dr. $CD \perp$ dr. AC și planul (ACD) este perpendicular pe planul (ABC) ce conține și dreapta AC, dr. CD va fi perpendiculară pe planul (ABC), deci pe orice dreaptă din acest plan, în particular pe dr. BC. Din triunghiul dreptunghic isoscel ABC avem $BC = a\sqrt{2}$, iar din triunghiul dreptunghic BCD avem:

$$BD = \sqrt{CB^2 + CD^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}.$$

4.14ᴹ. Un trapez isoscel $ABCD$ are baza mare $[AB]$ de lungime 22 cm, baza mică $[CD]$ de 10 cm și latura neparalelă cu lungimea de 10 cm. Se „îndoaie" trapezul în lungul liniei mijlocii $[MN]$, pînă cînd planele (ABM) și (DCN) devin perpendiculare. Să se afle distanța, după îndoire, de la punctul D la baza $[AB]$.

R. În trapezul $ABCD$ să considerăm înălțimea $[CE]$ care intersectează pe $[MN]$ în C''. Prin „îndoire" obținem planul $(MNCD)$ perpendicular pe $(AMNB)$. Deoarece dr. $CC'' \perp$ dr. MN rezultă dr. CC'' perpendiculară pe planul $(AMNB)$. Cum dr. $C''E \perp$ dr. AB, avem: dr. $CE \perp$ dr. AB, conform teoremei celor trei perpendiculare.

Vom calcula lungimea înălțimii $[CE]$ de unde va rezulta că $CC'' = \frac{CE}{2}$ ($C'' \in$ dr. MN).



Avem, calculînd pe EB:

$$EB = \frac{AB - CD}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ (cm)}$$

de unde, din triunghiul dreptunghic CEB:

$$CE = \sqrt{CB^2 - EB^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ cm}$$

Deci, $CC'' = 4$ cm.

Apoi, din triunghiul dreptunghic $C'C''E$ calculăm pe CE, care este egală cu distanța de la D la dr.AB după „îndoire". Astfel:

$$CE = \sqrt{CC''^2 + C''E^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2} \text{ cm}.$$

4.15ᴹ. Un triunghi dreptunghic ABC ($m(\hat{A}) = 90°$) se „îndoaie" în lungul înălțimii $[AD]$ pînă cînd planele (ABD) și (ADC) devin perpendiculare. Știind că $AB = 2\sqrt{6}$ cm și $AC = 2\sqrt{10}$ cm, să se calculeze distanța între punctele B și C, după „îndoire".

R. Înălțimea $[AD]$ este perpendiculară pe dr.BC, deci dr. $BC \perp$ dr. AD. Deoarece $(ABD) \perp (ADC)$ și dr. BD este perpendiculară pe dreapta de intersecție a celor două plane, rezultă că dr. $BD \perp (ADC)$ adică dr.$BD \perp$ dr.DC.

Distanța BC, după „îndoire", va rezulta din triunghiul dreptunghic BDC, unde $[BD]$ și $[DC]$ sînt segmentele determinate de înălțimea $[AD]$ pe ipotenuza $[BC]$. Ipotenuza $[BC]$ a triunghiului ABC are mărimea:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ (cm)}.$$

Calculăm BD cu teorema catetei și avem:

$$AB^2 = BD \cdot BC$$

de unde:

$$BD = \frac{24}{8} = 3 \text{ (cm)}.$$

De aici, :

$$DC = BC - BD = 5 \text{ (cm)}.$$

Astfel, din triunghiul dreptunghic BDC, avem:

$$BC = \sqrt{BD^2 + DC^2} = \sqrt{34} \text{ (cm)}.$$

4.16ᴹ. Să se determine locul geometric al punctelor egal depărtate de două drepte paralele.

R. Fie d_1 și d_2 cele două drepte date și fie M un punct al locului. Atunci, notînd cu A și respectiv B proiecțiile lui M pe d_1 și d_2, avem:

$$[MA] \equiv [MB]$$

Cum, în plus, $d_1 \parallel d_2$ și $d_1 \perp [MA]$, avem și $d_1 \perp [MB]$ deci $d_1 \perp (AMB)$ și, la fel, $d_2 \perp (AMB)$.

Fie în plus, N mijlocul segmentului $[AB]$. Cum triunghiul AMB este isoscel, dr.$MN \perp$ dr.AB. De aici, ținînd cont că $d_1 \perp$ dr. MN, $d_2 \perp$ dr. MN, avem:

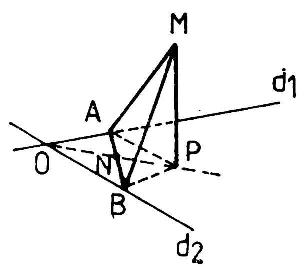
$$\text{dr. } MN \perp (d_1, d_2)$$

adică M se află pe dreapta perpendiculară pe planul (d_1, d_2) ce trece prin mijlocul distanței dintre d_1 și d_2. Se demonstrează mai departe că locul geometric este deci un plan π, egal depărtat de dreptele d_1 și d_2 și perpendicular pe planul lor.

4.17ᴹ. Să se determine locul geometric al punctelor egal depărtate de două drepte concurente.

R. Fie d_1 și d_2 dreptele date, ce se intersectează în punctul O. Vom arăta că locul geometric al punctelor M, cu proprietatea din enunț, este format din două plane π_1 și π_2, perpendiculare pe planul dreptelor date, ce conțin bisectoarele celor două drepte.

Astfel, fie M un punct al locului și fie dr.MA și dr.MB perpendicularele pe d_1, respectiv d_2. Fie dr.$MN \perp$ dr.AB. Cum triunghiul AMB este isoscel prin construcție ($AM = MB$), avem $NA = NB$. Fie acum dr. $MP \perp (d_1, d_2)$. Din teorema celor trei perpendiculare se obține că dr.$PN \perp$ dr. AB, deci



$$PA = PB.$$

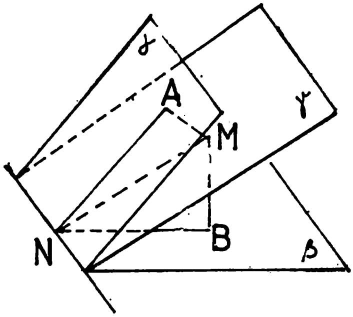
În plus, din dr.$MA \perp d_1$ și dr.$MP \perp (d_1, d_2)$ avem:

$$\text{dr. } PA \perp d_1.$$

Analog, dr. $PB \perp d_2$, deci punctul P se află pe bisectoarea unui unghi format de d_1 și d_2.

Acum, cum $MP \perp (d_1, d_2)$, bisectoarea ce conține pe O și dreapta MP determină un plan (MOP), perpendicular pe (d_1, d_2), numit *plan bisector*.

4.18ᴹ. Să se determine locul geometric al punctelor egal depărtate de două semiplane mărginite de aceeași dreaptă.



R. Fie α şi β cele două semiplane reopuse, mărginite de dreapta d şi M un punct al locului geometric. Facem următoarele construcţii: notăm cu A_1 şi B_1 proiecţiile lui M pe α şi β, apoi:

$$\alpha \cap (AMB) = \text{dr.}AN; \ \beta \cap (AMB) = \text{dr.}BN.$$

Cum dr.MA şi dr.MB sînt perpendiculare respectiv pe planele α şi β, atunci dr.$MA \perp$ dr.AN şi dr. $MB \perp$ $\perp$ dr.BN, deci M se află pe bisectoarea unghiului AMB.

În plus, M se află chiar într-un plan, numit plan bisector, care este şi locul geometric căutat, ce conţine pe MN (deoarece din faptul că $(AMB) \perp$ $\perp \alpha$ şi $(AMB) \perp \beta$, rezultă $(AMB) \perp d$, în particular dr.$MN \perp d$), plan determinat de d şi dr.MN.

4.9$^{\text{M}}$. Dacă o dreaptă d este intersecţia a două plane α, β, perpendiculare pe un plan γ, atunci $d \perp \gamma$.

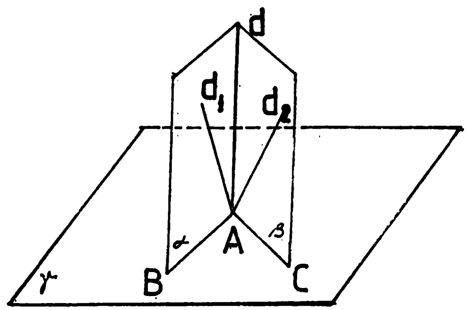
R. Fie A punctul unde d intersectează planul şi dr.AB, dr.AC dreptele de intersecţie dintre α, respectiv β, cu planul γ. Construim în A o dreaptă d_1, $d_1 \perp \gamma$, cu $d_1 \subset \alpha$. O astfel de construcţie există deoarece $\alpha \perp \gamma$. La fel, în A construim d_2, $d_2 \perp \gamma$, cu $d_2 \subset \beta$.

Astfel, am obţinut:

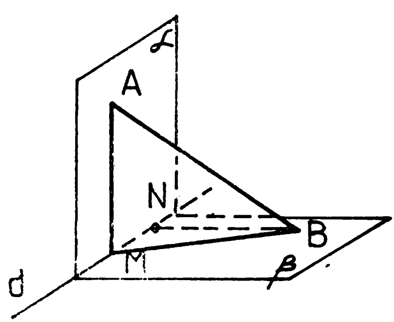
$$d_1 \perp \gamma; \ d_2 \perp \gamma; \ d_1 \cap d_2 = \{A\}$$

deci:

$$d_1 = d_2 = d.$$



4.10$^{\text{M}}$. Fie α şi β două plane perpendiculare şi A şi B două puncte ($A \in \alpha$, $B \in \beta$). Ştiind că punctele A, B sînt situate la o distanţă de 3 m faţă de dreapta de intersecţie a celor două plane şi că $AB = \sqrt{34}$ m, să se calculeze distanţa dintre M şi N (picioarele perpendicularelor duse din A şi B pe dreapta de intersecţie a celor două plane).



R. Să notăm cu d dreapta de intersecţie a celor două plane. Cum dr.$AM \perp d$, dr.$AM \subset \alpha$ şi $\alpha \perp \beta$, avem:

$$\text{dr. } AM \perp \beta$$

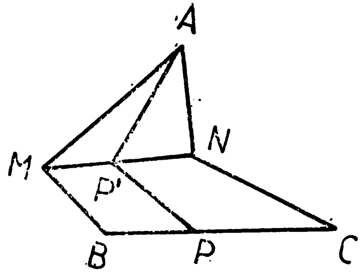
deci dr.AM este perpeniculară pe orice dreaptă din planul β, în particular dr.AM perpendiculară pe dr. BM. Deci triunghiul ABM este dreptunghic în M şi:

$$MB = \sqrt{AB^2 - AM^2} = 5(\text{cm}).$$

Deci, din triunghiul dreptunghic BNM (dr.$BN \perp d$) avem:

$$MN = \sqrt{BM^2 - NB^2} = \sqrt{16}(\text{cm}) = 4(\text{cm}).$$

4.11$^{\text{M}}$. În triunghiul ABC se consideră linia mijlocie $[MN]$ ($M \in$ dr.AB şi $N \in$ dr.AC) şi secanta AP ($P \in$ dr.BC), dr.$AP \cap$ dr. $MN = \{P'\}$. Se îndoaie triunghiul de-a lungul dreptei MN astfel încît planele (AMN) şi (BMN) să fie perpendiculare. Să se demonstreze că triunghiul nou format $PP'A$ este isoscel.



R. Deoarece (MN) este linie mijlocie, avem :

$$MN = \frac{1}{2} BC ; \text{dr.} MN \parallel \text{dr. } BC. \quad (1)$$

Deci, triunghiurile AMP' şi ABP sînt asemenea şi avem :

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AP'}{PP'}.$$

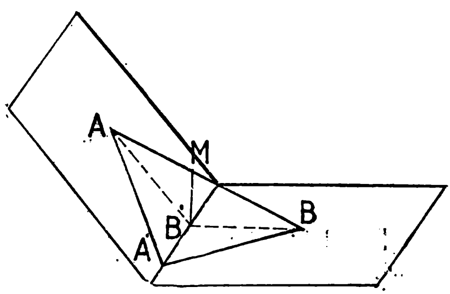
Dar, din (1), $AM = MB$, deci $AP' = PP'$, şi oricum am „îndoi" triunghiul de-a lungul dr. MN, congruenţa $[AP'] \equiv [PP']$ se păstrează, deci triunghiul $AP'P$ va fi isoscel.

4.22^{M}. Două plane perpendiculare α şi β se intersectează după o dreaptă d. Se ia un punct A în planul α şi un punct B în planul β. Se notează cu M mijlocul segmentului $[AB]$ şi cu A', B' picioarele perpendicularelor din A şi B pe d.

a) Să se arate că $MA' = MB'$.

b) Dacă $AA' = 3$ cm, $BB' = 4$ cm, şi $A'B' = 12$ cm, să se calculeze lungimea segmentului $[AB.]$

R. a) Cum dr. AA' este perpendiculară pe dreapta de intersecţie a planelor şi este conţinută în planul α, perpendicular pe β, avem dr. $AA' \perp \beta$ şi deci, perpendiculară pe orice dreaptă din plan, adică pe dr. $A'B$, deci, triunghiul $AA'B$ dreptunghic şi cum M este mijlocul lui $[AB]$, $(A'M)$ este mediană în triunghi, deci este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei, adică :



$$2A'M = AB. \quad (1)$$

Analog se arată că triunghiul $AB'B$ este dreptunghic în B', deci $[BM']$ mediană în acest triunghi, de unde :

$$2B'M = AB. \quad (2)$$

Din (1) şi (2), avem :

$$A'M = B'M.$$

b) Din triunghiul dreptunghic $A'B'B(\hat{B'}$ are măsura 90°) putem calcula ipotenuza$[A'B]$:

$$A'B = \sqrt{A'B'^2 + BB'^2} = \sqrt{144 + 16} = \sqrt{160} \text{ (cm)}.$$

Acum, în triunghiul dreptunghic $AA'B$, ipotenuza $[AB]$ este de lungime :

$$AB = \sqrt{AA'^2 + A'B^2} = \sqrt{9 + 160} = 13 \text{ (cm)}.$$

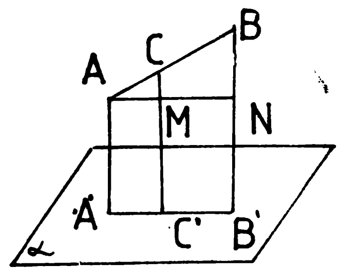
§ 5. Proiecţii

5.1ᴹ. Trei puncte coliniare A, B, C se proiectează pe un plan în A', B', C'. Să se demonstreze că :

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}.$$

R. Cum dreptele AA', BB', CC' sînt perpendiculare pe planul α, ele sînt paralele şi în plus, coplanare. Să ducem prin A o paralelă la dr.$A'B'$, şi să notăm cu M, respectiv N, punctele de intersecţie ale acesteia cu dr.CC', dr.$B'B'$.

Triunghiurile AMC şi ANB sînt asemenea, deoarece dr.$CM \parallel$ dr.BN. Avem :



$$\frac{AB}{BC}=\frac{AN}{MN}. \qquad (1)$$

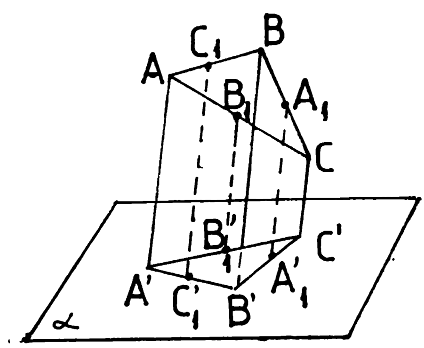
Dar $MN=C'B'$, (deoarece dr.$MN \parallel C'B'$ şi dr.$MC' \parallel$ dr.NB') şi, la fel, $AN=A'B'$. Deci, înlocuind, relaţia (1) devine :

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}.$$

5.2ᴹ. Fie ABC un triunghi şi $A'B'C'$ proiecţia lui pe un plan α. Dacă A_1, B_1, C_1 sînt mijloacele segmentelor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$, atunci aceste trei puncte se proiectează pe α în mijloacele segmentelor $[B'C']$, $[C'A']$, $[A'B']$.

R. Fie A_1', B_1', C_1' proiecţiile punctelor A_1, B_1, C_1 pe planul α.

Cum, de exemplu, A, C_1, B sînt coliniare, conform problemei anterioare avem relaţia :



$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC_1}{C_1'B'}.$$

Dar relaţia se mai poate scrie :

$$\frac{AB}{BC_1}=\frac{A'B'}{C_1'B'}$$

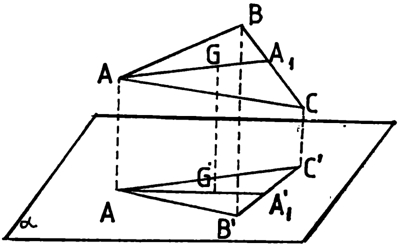
şi, cum $BC_1=\frac{1}{2}AB_1$, avem :

$$2C_1'B'=A'B'.$$

adică C'_1 este mijlocul lui $A'B'$. Analog se arată că A'_1, B'_1 sînt mijloacele segmentelor $B'C'$ și $A'C'$.

5.3^M^. Se proiectează un triunghi oarecare ABC pe un plan α. Să se demonstreze că proiecția centrului de greutate G al triunghiului ABC este centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$.

R. Fie $[AA_1]$ și $[A'A'_1]$ medianele corespunzătoare laturilor $[BC]$ și $[B'C']$ și fie G, respectiv G', centrele de greutate ale triunghiurilor ABC și $A'B'C'$. Avem relația :



$$\frac{AG}{GA_1} = 2,$$

La fel, în triunghiul $A'B'C'$, avem :

$$\frac{A'G'}{G'A'_1} = 2$$

deci dr.AA' ∥ dr.GG' ∥ $A_1A'_1$. Cum însă dr.$AA' \perp \alpha$, rezultă că dr.$GG' \perp \alpha$, adică G' este proiecția lui G pe α.

5.4^M^. Triunghiul isoscel ABC se proiectează pe planul α, ce conține pe $[BC]$, după triunghiul dreptunghic $A'BC$. Știind că $A'B=4$ cm, $A'C = 3$ cm, să se calculeze :

a) cosinusul unghiului $\sphericalangle ABC$;

b) lungimea laturii necongruente cu celelalte ale triunghiului ABC.

R. Pentru triunghiul ABC, avem posibilitățile :

$$AB = BC \text{ sau } AC = BC$$

deoarece proiecțiile laturilor $[AB]$ și $[AC]$ nu sînt congruente. În plus, triunghiul $BA'C$ este dreptunghic în A'. Într-adevăr, ducînd dr.$AD \perp BC$, și cum $AA' \perp \alpha$, avem $A'D \perp BC$. Evident, în triunghiurile $A'BD$ și $A'CD$, unghiurile $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle C$ nu pot fi drepte. Din triunghiul $BA'C$ avem :

$$BC = \sqrt{A'B^2 + A'C^2} = 5.$$

Cu teorema catetei avem :

$$A'B^2 = BC \cdot BD$$

de unde :

$$BD = \frac{A'B^2}{BC} = \frac{16}{5}$$

și, analog :

$$DC = \frac{A'C^2}{BC} = \frac{9}{5}.$$

Să presupunem că $AB = BC$. Atunci :

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{BD}{AB} = \frac{16}{25}.$$

Din triunghiul ADC, ($\hat{D}$ are măsura $90°$), avem:

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2}.$$

Dar $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{\frac{369}{25}}$ cm.

De aici:

$$AC = 3\sqrt{2}\text{cm}.$$

Dacă $AC = BC$, un raţionament analog ne dă:

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

şi:

$$AB = 4\sqrt{2}.\text{cm}.$$

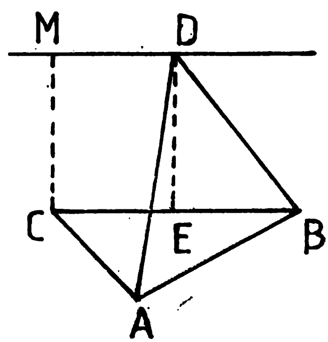
5.5^M^. Pe planul triunghiului dreptunghic ABC ($AB = AC = a$) se consideră dreapta perpendiculară MC unde $MC = a$.

a) Să se arate că $[MA] \equiv [CB]$.

b) Fie prin M o dreaptă paralelă cu dr.CB. Fie D un punct pe această dreaptă astfel încît proiecţia lui D pe planul triunghiului ABC să coincidă cu mijlocul segmentului $[CB]$. Să se arate că triunghiul ABD este isoscel.

R. a) *Metoda I.* În triunghiul dreptunghic MCA ($m(\hat{C}) = 90°$) avem:

$$MA = \sqrt{MC^2 + CA^2} = a\sqrt{2}.$$



În triunghiul ABC, ipotenuza $[BC]$ are $BC = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$. Deci $MA = BC$.

Metoda a II-a: Triunghiurile dreptunghice MCA şi ABC sînt congruente, cazul CC. Rezultă $AM = CB$.

b) *Metoda I.* Fie E proiecţia lui D pe planul triunghiului ABC, care este piciorul perpendicularei din D pe dr.BC, E este mijlocul lui $[BC]$. Evident, dr.$MC \parallel$ dr. DE şi $MC = DE = a$. În triunghiul dreptunghic AED ($m(\hat{E}) = 90°$) avem:

$$AD = \sqrt{DE^2 + AE^2} = \sqrt{a^2 + \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

În triunghiul dreptunghic DEB ($m(\hat{E}) = 90°$), avem:

$$BD = \sqrt{DE^2 + EB^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

deci triunghiul ADB este isoscel, cu $[AD] \equiv [DB]$.

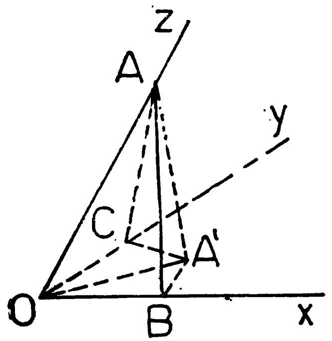
Metoda a II-a. Punctul E este mijlocul lui $[CB]$, deci $[AE] \equiv [EB]$ (mediana corespunzătoare ipotenuzei). Însă $\Delta DEB \equiv \Delta DEA$ căci aceste triunghiri sînt dreptunghice şi mai au şi $[DE]$ comună. Rezultă că $[DA] \equiv [DB]$, deci triunghiul DAB este un triunghi isoscel.

5.6^M^. Fie $[OX$, $[OY$, $[OZ$ trei semidrepte în spaţiu astfel încît măsura unghiului format de oricare pereche dintre ele este de $60°$.

a) Demonstraţi că una dintre aceste semidrepte se proiectează pe planul determinat de celelalte două după bisectarea lor.

b) Fie $A \in [OZ$, astfel încît $OA = a$ şi fie A' proiecţia lui A pe planul (XOY). Calculaţi distanţa AA'.

R. a) Fie $A \in [OZ$, iar A' proiecţia lui A pe (XOY). Notăm cu B şi respectiv C proiecţia punctului A' pe $[OX$ şi $[OY$.



Aplicăm teorema celor trei perpendiculare; din dr.$AA' \perp (OXY)$, dr.$A'B \perp$ dr.OX rezultă că dr.$AB \perp$ dr.OX, deci triunghiul AOB este dreptunghic în B. Asemănător, din dr.$AA' \perp (XOY)$, dr.$A'C \perp$ dr.OY rezultă că dr.$AC \perp$ $\perp$ dr.OY, deci triunghiul AOC este dreptunghic în C. Aceste triunghiuri sînt congruente căci au $[OA]$ comună şi $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AOC}) = 60°$. Obţinem că $[OB] \equiv [OC]$ (1).

Deasemenea, triunghiurile dreptunghice OBA' şi OCA' sînt congruente datorită relaţiei (1) şi faptului că $[OA']$ este comună. Rezultă că $\sphericalangle A'OB \equiv \sphericalangle A'OC$, deci $[OA'$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle XOY$ şi deci proiecţia lui A, care este A', aparţine acestei bisectoare.

b) Din triunghiul OBA, dreptunghic în B, cu unghiul $\sphericalangle AOB$ de măsură 60° şi $OA=a$ avem $OB = \frac{a}{2}$.

S-a demonstrat că $[OA'$ este bisectoarea lui XOY, deci $m(\widehat{BOA'}) = 30°$. În triunghiul dreptunghic BOA' avem $\cos 30° = \frac{OB}{OA'}$ de unde $OA' = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Aplicăm teorema lui PITAGORA în triunghiul dreptunghic AOA' şi obţinem:

$$A'A = \sqrt{OA^2 - A'O^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}} = a\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

5.7. Să se determine locul geometric al punctelor din spaţiu care se proiectează într-un punct dat A pe o dreaptă dată d.

R. Fie M_1 şi M_2 două puncte ale locului geometric. Cum:

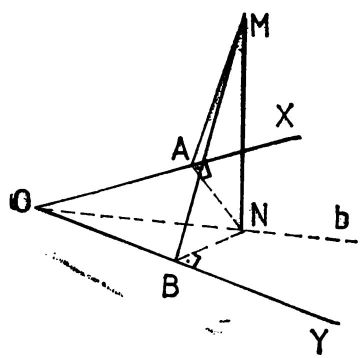
$$\text{dr.}M_1A \perp d, \text{ dr.}M_2A \perp d$$

avem:

$$d \perp (AM_1, AM_2).$$

Deci M se află în planul perpendicular în A pe dreapta d.

5.8^M. Se dă unghiul xOy şi un punct M ce nu aparţine planului unghiului. Să se arate că dacă proiecţia lui M pe planul unghiului aparţine bisectoarei acestuia, atunci punctul M este egal depărtat de laturile unghiului xOy.



R. Fie N proiecţia lui M pe bisectoarea Ob a unghiului yOx.

Prin N fie dr. NA şi dr.NB perpendiculare pe Ox, respectiv Oy. Atunci:

$$NA = NB.$$

Deoarece dr.$MN \perp (xOy)$ şi dr.$NA \perp Ox$, din teorema celor trei perpendiculare, avem:

$$\text{dr. } MA \perp Ox.$$

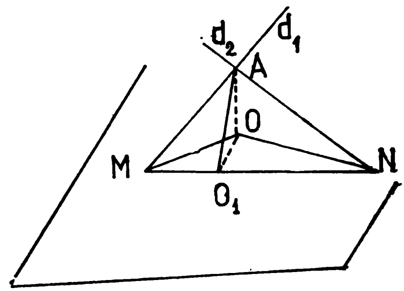
La fel, deoarece dr. $MN \perp (xOy)$ şi dr. $BN \perp Oy$, avem:

$$\text{dr. } MB \perp Oy.$$

Deci A şi B sînt proiecţiile lui M pe laturile unghiului. Avem şi $MA = MB$, deoarece triunghiurile MNA şi MNB sînt congruente.

5.9[M]. Dreptele d_1 şi d_2, perpendiculare şi concurente în A, intersectează planul α în două puncte diferite. Unghiurile dintre aceste două drepte şi planul α au măsurile de 30° şi respectiv 45°. Să se calculeze măsura unghiului dintre planul α şi planul determinat de d_1 şi d_2. (Distanţa de la A la planul α este egală cu a).

R. Fie M, N punctele de intersecţie dintre dreptele d_1, d_2 şi planul α. Fie O piciorul perpendicularei din A pe planul α. Conform enunţului, $AO = a$. Fie apoi dr. $AO_1 \perp$ dr. MN, şi, de aici, conform reciprocei teoremei celor trei perpendiculare, rezultă dr. $OO_1 \perp$ dr. MN. Determinăm măsura unghiului AO_1O, care este unghiul dintre α şi (d_1, d_2), deoarece în O_1 în fiecare din cele două plane avem cîte o perpendiculară pe dreapta de intersecţie a lor, dr. MN. Să considerăm triunghiurile AOM şi AON. Avem:



$$AM = AO \cdot \frac{1}{\sin \widehat{AMO}} = a \cdot \frac{1}{\sin 30°} = 2a$$

şi:

$$AN = AO \cdot \frac{1}{\sin \widehat{ANO}} = a \cdot \frac{1}{\sin 45°} = a\sqrt{2}.$$

Deoarece triunghiul AMN este dreptunghic ($m(\widehat{MAN}) = 90°$), avem:

$$MN = \sqrt{AM^2 + AN^2} = \sqrt{4a^2 + 2a^2} = a\sqrt{6}.$$

Înălţimea AO_1 a triunghiului AMN este dată de:

$$AO_1 = \frac{AM \cdot AN}{MN} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Putem determna acum măsura unghiului AO_1O din triunghiul AO_1O. Avem:

$$\sin \widehat{AO_1O} = \frac{AO}{AO_1} = \frac{a}{\frac{2a\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

de unde rezultă $m(AO_1O) = 60°$.

5.10[M]. Un segment $AB = 10$ cm face cu planul α un unghi de: a) 45°, b) 30°; c) 60°.

Aflaţi măsura proiecţiei segmentului AB pe planul α, în cele trei cazuri.

R. Fie $[A'B']$ segmentul proiecţie şi fie d o paralelă prin A la dr. $A'B'$. Pe d se ia un punct P astfel încît $AP = A'B'$.

Atunci, din triunghiul dreptunghic APB, unghiul $\sphericalangle PAB$ este congruent cu unghiul dintre AB şi plan. Avem:

a) $\cos 45° = \frac{AP}{AB}$, de unde $AP = AB \cos 45° = 5\sqrt{2}$ (cm).

b) $AP = AB \cos 30° = 5\sqrt{3}$ (cm).

c) $AP = AB \cos 60° = 5$ (cm).

5.11^M^. Triunghiul dreptunghic ABC ($m(\hat{A}) = 90°$) are cateta AB inclusă în planul α. Proiecţia punctului C pe α este C'. Să se demonstreze că triunghiul ABC' este dreptunghic.

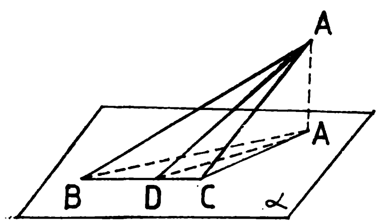
R. Deoarece dr.$CC' \perp \alpha$ şi dr.$CA \perp$ dr.AB din, reciproca teoremei celor trei perpendiculare rezultă că dr.$C'A \perp$ dr.AB, deci unghiul $C'AB$ este drept.

5.12^M^. Triunghiul dreptunghic isoscel ABC ($m(\hat{A}) = 90°$)are latura BC în planul α şi se proiectează pe acest plan după triunghiul $A'BC$. Ştiind că $m(\widehat{BA'C}) = 120°$ şi că $BC = a$, să se afle:

a) lungimea înălţimii $A'D$ ($D \in$ dr.BC)a triunghiului $BA'C$ în funcţie de a;

b) una din funcţiile trigonometrice ale unghiurilor formate de dr.AB şi dr.AC cu planul α.

R. Triunghiurile ABA' şi ACA' fiind congruente (IC), $A'B = A'C$.



Deci, cum triunghiul $A'BC$ este isoscel:

$$m(\widehat{A'BC}) = m(\widehat{A'CB}) = \frac{180° - 120°}{2} = 30°$$

şi din triunghiul dreptunghic $A'BD$($\hat{D}$ are mărura de90°):

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{A'D}{BD}$$

sau:

$$A'D = BD \cdot \operatorname{tg} 30° = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

b) Din triunghiul ABA' avem:

$$\cos \widehat{ABA'} = \frac{BA'}{AB}.$$

Astfel, din triunghiul $A'BD$, avem:

$$BA' = \sqrt{BD^2 + A'D^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

iar, din triunghiul ABC, $AB = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, deci:

$$\cos \widehat{ABA'} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

5.13^M^. Un trapez dreptunghic $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $m(\hat{A}) = 90°$, are baza mare AB inclusă în planul α. Ştiind că $AB = 5$ cm, $DC = 2$ cm, $BC = 6$ cm, şi că planul trapezului formează cu α un unghi egal cu unghiul său ascuţit, se cere:

a) să se arate că patrulaterul $ABC'D'$ (C',D' — proiecţiile lui C şi D pe α) este trapez dreptunghic;

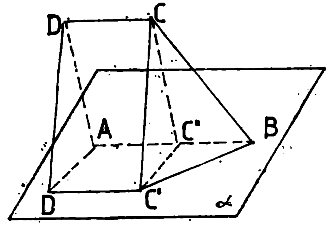
b) să se calculeze dimensiunile trapezului $ABC'D'$.

R. a) Deoarece dr. DC este paralelă cu dreapta AB din plan, avem dr. $DC \parallel$ dr. $D'C'$, deci :

$$AB \parallel D'C'$$

adică $ABC'D'$ este trapez. În plus, deoarece dr. $DD' \perp \alpha$, dr. $AD \perp$ dr. AB, din reciproca teoremei celor trei perpendiculare, avem dr. $D'A \perp$ dr. AB, deci trapezul este dreptunghic.

Deoarece dr. $AD \perp$ dr. AB şi dr. $D'A \perp$ dr. AB, unghiul $D'AD$ este unghiul dintre planul bazei şi $ABCD$. Însă :



$$\widehat{D'AD} \equiv \widehat{ABC}.$$

Fie dr. $CC'' \perp$ dr. AB. Atunci, cum în triunghiul $CC''B$ avem $2C''B = CB$, rezultă :

$$m(\widehat{C''BC}) = 60°$$

deci $m(\widehat{D'AD}) = 60°$.

Din acest triunghi avem :

$$CC'' = AD = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Din triunghiul ADD', avem :

$$AD' = AD \cos 60° = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}.$$

Dar $AD' = C'C''$ şi triunghiul $C'C''B$, ne dă :

$$C'B = \sqrt{9 + \frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{7}}{2} \text{ cm}.$$

iar $D'C' \equiv DC = 2$ cm.

5.14^M. Un segment AB se proiectează pe un plan α după $A'B'$. Ştiind că $A'B' = \frac{3}{5} AB$, să se calculeze tangenta unghiului format de segmentul AB cu α.

R. Fie prin A o paralelă la dr. $A'B'$ şi pe ea punctul P astfel încît $AP = A'B'$. Din triunghiul ABP, avem ($P \in$ dr. BB') :

$$\operatorname{tg} B\hat{A}P = \frac{BP}{AP}.$$

Dar, în triunghiul ABP ($\hat{P}$ are măsura de 90°) :

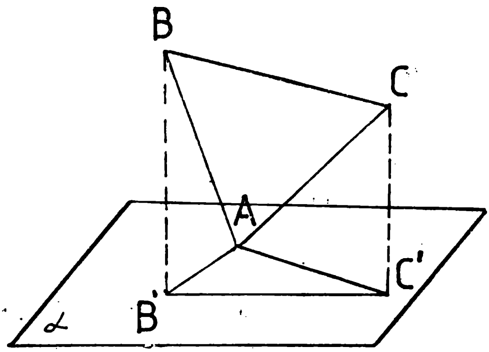
$$BP = \sqrt{AB^2 - AP^2} = \sqrt{AB^2 - \frac{9}{25} AB^2} = \frac{4}{5} AB.$$

Deci :

$$\operatorname{tg} \widehat{BAP} = \frac{4AB}{5} \cdot \frac{5}{3AB} = \frac{4}{3}.$$

5.15[M]. Un triunghi echilateral ABC cu latura de lungime 6 cm se proiectează pe un plan α, ce conține punctul A, după $AB'C'$. Se știe că $\sphericalangle B'AC'$ are măsura de 90°, dr. AB și dr. AC fac cu α unghiuri congruente și că sînt de aceeași parte a lui α. Să se calculeze măsura unghiului format de dr. AB și dr. AC cu α.

R. Se observă că triunghiurile ABB' și ACC' sînt congruente deoarece:



$$AB = AC;\ \widehat{BAB'} \equiv \widehat{CAC'};\ \hat{B}' \equiv \hat{C}'.$$

Deci:

$$AB' = AC';\ BB' = CC'.$$

Cum $BB' = CC'$, avem $BC = B'C'$, deci:

$$B'C' = 6\text{ cm}.$$

Triunghiul $AB'C'$, fiind dreptunghic isoscel, avem:

$$2B'A^2 = B'C'^2$$

de unde $\quad B'A = 3\sqrt{2}$ cm.

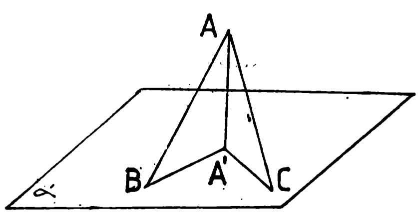
Deci, din triunghiul ABB', avem:

$$\cos \widehat{BAB'} = \frac{AB'}{AB} = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

deci $\widehat{BAB'}$ și $\widehat{CAC'}$ sînt unghiuri congruente cu măsura de 45°.

5.16[M]. Două oblice, care au un punct comun ce nu aparține unui plan, au lungimile de 20 cm și 16 cm. Proiecția pe plan a primei oblice are lungimea de 15 cm. Să se afle lungimea proiecției celei de-a doua oblice.

R. Folsind notațiile din figură, avem dr$AA' \perp \alpha$, $AB = 20$ cm, $AC = 16$ cm.



Din triunghiul $AA'B$ ($m(\hat{A}') = 90°$) avem:

$$AA' = \sqrt{AB^2 - A'B^2} = 5\sqrt{7}.$$

Din triunghiul $AA'C$, avem:

$$A'C = \sqrt{AC^2 - AA^2} = 9\text{ cm}.$$

5.17[M]. Triunghiul ABC se proiectează pe planul α, care conține dr. BC, după triunghiul $A'BC$. Știind că: $\sphericalangle BA'C$ are măsura de 70°; $\sphericalangle ABC$ are măsura de 45°, $\sphericalangle BAC$ are măsura de 75° și că înălțimea AD a triunghiului ABC, ($D \in BC$) are lungimea a, să se calculeze:

a) lungimile segmentelor BD și DC în funcție de a;

b) înălțimea corespunzătoare laturii BC a triunghiului $BA'C$;

c) cosinusurile unghiurilor formate de dr.AB și dr.AC cu planul α.

R. a) Cum în triunghiul ABD, avem $m(\hat{D})=90°$ şi $m(\widehat{ABD})=45°$, atunci triunghiul este dreptunghic isoscel şi deci $BD = AD = a$, $AB = a\sqrt{2}$, şi $\widehat{BAD}$ are măsura de 45°. Deci, $\widehat{DAC}$ are măsura de 30° şi în triunghiul ADC, $\cos \widehat{DAC} = \frac{AD}{AC}$, de unde :

$$AC = \frac{AD}{\cos 30°} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

şi deci :

$$DC = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

b) Din teorema înălţimii în triunghiul $BA'C$, avem :

$$A'D^2 = BD \cdot DC = a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}.$$

c) Va trebui să calculăm lungimile laturilor $A'B$ şi $A'C$.

Astfel, în triunghiul $A'BC$, teorema catetei referitor la $[A'B]$, ne dă :

$$A'B^2 = BD \cdot BC = \frac{a^2(3+\sqrt{3})}{3}.$$

La fel :

$$A'C^2 = DC \cdot BC;\ A'C = \frac{a}{3}\sqrt{3 + 3\sqrt{3}}.$$

Deci, în triunghiul ABA' :

$$\cos \widehat{ABA'} = \frac{A'B}{AB} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}.$$

În triunghiul ACA', avem :

$$\cos \widehat{ACA'} = \frac{A'C}{AC} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{3}}.$$

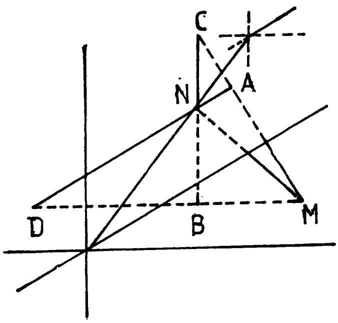
5.18.[PO]. Trei plane Q, $\mathscr{P}$ şi $\mathscr{S}$ se intersectează după aceeaşi dreaptă d, astfel încît diedrul format de planele $\mathscr{P}$ şi Q este de 60°, iar diedrul format de planele $\mathscr{P}$ şi $\mathscr{S}$ este de 45°. În planul $\mathscr{P}$ se ia punctul M situat la distanţa $MN = 10$ cm de muchia diedrelor. Din punctul M se duc perpendicularele MA şi MB pe planele Q, respectiv $\mathscr{S}$. Prelungirea perpendicularei MA intersectează planul $\mathscr{S}$ în C iar prelungirea perpendicularei MB intersectează planul Q în punctul D. Arătaţi că :

a) punctele B, N si C respectiv A, N şi D sînt coliniare ;

b) patrulaterele cu vîrfurile în M, B, N, A, respectiv B, D, C, A, sînt inscriptibile.

Aflaţi raportul ariilor triunghiurilor ADM şi BCM.

R. a) Perpendicularele MA şi MB formează un plan care intersectează planul Q după dreapta AND iar planul $\mathscr{S}$ după dreapta BNC.



b) În patrulaterul cu vîrfurile în M, B, N, A suma măsurilor unghiurilor cu vîrfurile în A și B este $180°$, deci patrulaterul este inscriptibil.

Triunghiurile DAC și DBC sînt triunghiuri dreptunghice, avînd aceeași ipotenuză $[DC]$, deci și patrulaterul $BDCA$ este inscriptibil.

În triunghiul DBN avem $\sin 15° = \frac{NB}{DN}$, iar în triunghiul DMA avem $\sin 15° = \frac{AM}{DM}$, de unde obținem $5\sqrt{2} \cdot (DB + 5\sqrt{2}) = 5\sqrt{3}\, DN$, deci $BD = 5 \cdot (2\sqrt{2} + \sqrt{6})$ si $DN = 10(\sqrt{3} + 1)$ și atunci $AD = 5 \cdot (2\sqrt{3} + 3)$.

Aria triunghiului ADM este atunci $\frac{75(2+\sqrt{3})}{2}$. La fel, în triunghiul CNA avem $\sin 15° = \frac{AN}{NC}$ și în triunghiul CBM, $\sin 15° = \frac{BM}{CM}$,

de unde $\frac{5}{NC} = \frac{5\sqrt{2}}{CA + 5\sqrt{3}}$.

Obținem :

$$CA = 5(\sqrt{3} + 2) \text{ cm}, \quad NC = 5\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1) \text{ cm și } BC = 5\sqrt{2}(\sqrt{3} + 2) \text{ cm}$$

Aria triunghiului BMC este atunci $25(\sqrt{3} + 2)$ cm^2, iar raportul ariilor este :

$$\frac{\mathscr{A}_{DAM}}{\mathscr{A}_{BMC}} = \frac{3}{2}.$$

5.19.[M,PO]. Un triunghi dreptunghic ABC ($\sphericalangle A$ are măsura $90°$) cu $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, se proiectează pe un plan α după $A'B'C'$. Știind că aria triunghiului $A'B'C'$ este de 12 cm^2, să se afle unghiul plan al diedrului format de α cu planul triunghiului.

R. Între aria unui triunghi ABC și aria triunghiului de proiecție $A'B'C'$ există relația :

$$\cos x = \frac{\mathscr{S}_{A'B'C'}}{\mathscr{S}_{ABC}}$$

unde x este măsura unghiului diedru dintre planul triunghiului și planul de proiecție.

Dar,

$$\mathscr{S}_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = 24 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Deci :

$$\cos x = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

sau $x = 60°$.

5.10[M,PO]. Un trapez dreptunghic, cu bazele de 2 cm și $(2 + 3\sqrt{3})$ cm, are latura oblică de 6 cm. Se proiectează acest trapez pe un plan.

Acest plan face cu planul trapezului un unghi cît unghiul ascuţit al trapezului. Să se afle aria proiecţiei trapezului.

R. Aria proiecţiei se va afla cu formula:

$$\cos\alpha = \frac{\text{Aria trapez proiecţie}}{\text{Aria trapez}}$$

cu α unghiul diedru dintre planul trapezului şi planul de proiecţie. Fie $ABCD$ trapezul dat. Fie E proiecţia lui B pe dr.DC. Atunci, înălţimea $[BE]$ are lungimea dată de:

$$BE = \sqrt{BC^2 - EC^2} = \sqrt{36 - 27} = 3\ (\text{cm}).$$

Deci:

$$\mathcal{S}_{ABCD} = \frac{(AB + DC)\cdot BE}{2} = \frac{3(4 + 3\sqrt{3})}{2}\ \text{cm}^2.$$

Cum unghiul α este congruent cu unghiul C al trapezului, avem:

$$\sin\widehat{BCE} = \frac{BE}{BC} = \frac{1}{2}$$

deci:

$$m(\alpha) = m(\widehat{BCE}) = 30°.$$

Deci:

$$\mathcal{S}_{\text{trapez proiecţie}} = \mathcal{S}_{ABCD}\cdot\cos\alpha = \frac{3(4\sqrt{3} + 9)}{4}\ (\text{cm})^2.$$

5.11[M,PO]. Triunghiul ABC se „îndoaie" de-a lungul liniei mijlocii $[MN]$ ($M\in$dr.AB, $N\in$ dr.AC), astfel încît planul triunghiului AMN şi cel al trapezului $MNCB$ să formeze un diedru drept.

a) Să se determine unghiul plan al diedrului format de planul trapezului $MNCB$ şi cel determinat de punctele A, B, C.

b) Notînd cu $\mathcal{S}$ aria triunghiului iniţial ABC, să se determine, în funcţie de $\mathcal{S}$, aria noului triunghi obţinut după „îndoire".

R. a) Fie dr.$AE \perp$ dr.MN. Cum $(AMN)\perp(MNCB)$, atunci dr.$AE \perp (MNCB)$. Fie apoi dr.$EF \perp$ dr.BC. Din teorema celor trei perpendiculare, dr.$AF \perp$ dr.BC, deci:

$$\sphericalangle\,(ABC,\ MNBC) \equiv \widehat{AFE}.$$

Fie în continuare dr. $MG \perp$ dr. BC. Atunci triunghiurile AEM şi MGB sînt congruente, ($(AM) \equiv (MB)$; $\sphericalangle AME \equiv \sphericalangle MBG$), deci:

$$(AE) \equiv (MG)$$

Cum, însă $(MG) \equiv (EF)$, avem:

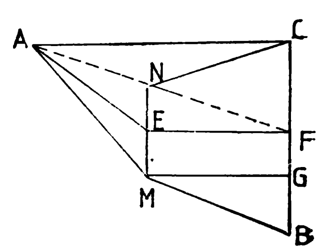
$$(AE) \equiv (EF)$$

Deci triunghiul AEF este dreptunghic isoscel şi:

$$m\,(\widehat{AFE}) = 45°.$$

b) Avem relaţia:

$$\cos\widehat{AFE} = \frac{\mathcal{S}_1}{\mathcal{S}}$$



unde $\mathcal{S}_1$ este aria proiecției triunghiului după îndoire iar $\mathcal{S}_2$ este aria triunghiului după „îndoire". Avem :

$$\mathcal{S}_2 = \frac{\mathcal{S}_1}{\cos \widehat{AEF}} = \frac{\mathcal{S} \cdot \sqrt{2}}{2}.$$

5.22[M,PO]**.** Un trapez isoscel are baza mică și laturile oblice egale fiecare cu $2a$, iar unghiurile ascuțite cu măsura de 60° Să se calculeze aria proiecției acestui trapez pe un plan care face cu planul trapezului un unghi congruent cu unghiul ascuțit al diagonalelor.

R. Notăm cu $ABCD$ trapezul dat, iar cu O intersecția diagonalelor. Cum unghiurile $\widehat{DAB}$ și $\widehat{ABC}$ sînt congruente, avem :

$$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DAB}) = 120°.$$

În plus, cum triunghiul ABC este isoscel, avem :

$$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BCA}) = 30°$$

deci, $m(\widehat{OCD}) = 30°$.

Din triunghiul ADB, isoscel, avem :

$$m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ABD}) = 30°$$

deci $m(\widehat{ODC}) = 30°$.

Astfel, unghiul COD are măsura de 120°, de unde :

$$m(\widehat{BOC}) = 180° - 120° = 60°.$$

Vom calcula acum aria trapezului $ABCD$. Înălțimea BE a trapezului o vom găsi din triunghiul dreptunghic BEC (dr. $BE \perp$ dr. DC). Cum $EC = \frac{BC}{2}$ ($\hat{C}$ are măsura de 60°), avem :

$$BE = \sqrt{BC^2 - EC^2} = a\sqrt{3},$$

$$DC = AB + 2EC = 4a.$$

Deci :

$$\mathcal{S}_{ABCD} = \frac{BE(AB + DC)}{2} = 3\,a^2\sqrt{3}.$$

Aria proiecției este dată de :

$$\mathcal{S}' = \mathcal{S}_{ABCD} \cos \alpha$$

unde α este $\widehat{BOC}$ (α fiind unghiul dintre cele 2 plane). Avem :

$$\mathcal{S}' = 3a^2\sqrt{3}\cos 60° = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.$$

5.23[M,PO]**.** Fie A, B, C, D, patru puncte necoplanare. Printr-un punct M de pe segmentul AB se duce un plan α paralel cu (AC) și (BD). Acest plan intersectează pe (BC) în Q, pe (CD) în P și pe (AD) în N.

a) Să se arate că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.

b) În cazul $AM = x$ cm, $AB = 5$ cm, $AC = 12$ cm și $BD = 7$ cm, să se calculeze în funcție de x, perimetrul patrulaterului $MNPQ$.

R. a) Deoarece planul α este paralel cu dr.AC, orice plan care conține dr. AC intersectează pe α după o dreaptă paralelă cu dr·AC. Astfel, cum $(ABC) \cap \alpha =$ dr.MQ și $(ADC) \cap \alpha =$ dr.NP, rezultă dr.$MQ \parallel$ dr.AC și dr.$NP \parallel$ dr.AC, deci dr.$MQ \parallel$ dr.NP.

La fel, cum dr.BD este paralelă cu α, orice plan ce conține dr.BD și intersectează planul α, îl intersectează după o dreaptă paralelă cu dr.BD. Astfel,cum $(ABD) \cap \alpha =$ dr.MN $(BCD) \cap \alpha =$ dr.QP, rezultă dr.$MN \parallel$ dr.BD și dr.$QP \parallel$ dr.BD, deci dr.$MN \parallel$ dr.QP. De aici rezultă că $MNQP$ este paralelogram.

b) Deoarece $MQ \parallel AC$, triunghiurile ABC și BMQ sînt asemenea, deci:

$$\frac{MQ}{AC} = \frac{BM}{AB}$$

de unde, înlocuind, avem:

$$\frac{MQ}{12} = \frac{5 - x}{5}$$

de unde $MQ = \dfrac{12(5 - x)}{5}$.

Analog, cum dr.$MN \parallel$drBD, triunghiurile ABD și AMN sînt asemenea, deci, scriem proporționalitatea laturilor:

$$\frac{MN}{BD} = \frac{AM}{AB}$$

de unde, înlocuind:

$$\frac{MN}{7} = \frac{x}{5}$$

și obținem $MN = \dfrac{7x}{5}$.

Perimetrul paralelogramului $MNPQ$ este atunci:

$$\mathcal{P} = MN + NP + PQ + QM = 2 \cdot \left(\frac{7x}{5} + \frac{12(5 - x)}{5}\right) = 2(12 - x).$$

§ 6. PRISMA

6.1[M] O prismă hexagonală regulată dreaptă are toate muchiile de lungime 2 cm (şi muchiile de la bază şi muchiile laterale). Să i se calculeze aria laterală.

R. Feţele laterale ale prismei sînt pătrate congruente deoarece toate muchiile prismei sînt congruente. Atunci aria laterală a prismei este:

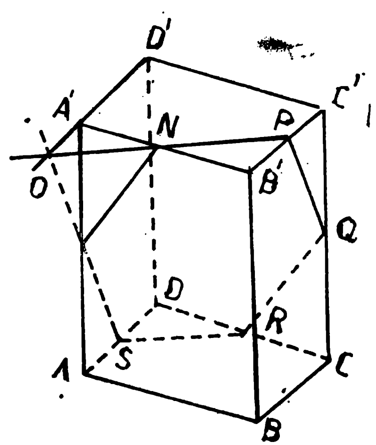
$$\mathcal{A}_e = 6l^2 = 6 \cdot 4\text{cm}^2 = 24 \ (\text{cm}^2)$$

unde cu l am notat latura prismei.

6.2[M]. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped. Să se arate că mijloacele muchiilor $[AA']$, $[A'B']$, $[B'C']$, $[C'C]$, $[CD]$ şi $[DA]$ sînt coplanare şi formează un hexagon cu laturile opuse paralele şi congruente.

R. Fie M, N, P, Q, R, S mijloacele muchiilor considerate în enunţ. Să considerăm, în continuare, planul π determinat de punctele M, N, P.

Intersecţiile dintre π şi feţele $ABCD$ şi $A'B'C'D'$ sînt două drepte paralele. Fie dr. $NP = \pi \cap (A'B'C'D')$. Notăm cu O intersecţia dintre dr. NP şi dr. $A'D'$. Evident, $O \in \pi$. Dar $O \in$ dr. $A'D'$, deci $O \in (ADA'D')$, şi $\pi \cap (ADA'D') =$ dr. OM. Să punem $\{T\} =$ dr. $OM \cap$ dr. AD şi vom arăta că $T \equiv S$, mijlocul lui $[AD]$.



Într-adevăr, din congruenţa triunghiurilor $B'NP$ şi $A'NO$ se obţine:

$$A'O = PB' = B'C' : 2.$$

Apoi, din congruenţa triunghiurilor $OA'M$ şi ATM, se obţine:

$$AT = OA' = B'C' : 2.$$

deci $T \equiv S$.

Paralela prin S la dr. NP intersectează dr. DC în R, mijlocul lui $[DC]$.

Planul π intersectează feţele $DCC'D'$ şi $ABB'A'$ după dreptele paralele RQ şi MN.

Înseamnă că punctele S, Q, R sînt conţinute în π, deci M, N, P, S, Q, R sînt coplanare.

Să arătăm că laturile opuse sînt congruente. De exemplu, în triunghiul $A'AB'$, $[MN]$ este linie mijlocie, adică $MN = AB' : 2$, iar în triunghiul CDC', $[RQ]$ este linie mijlocie, $RQ =$

$= \dfrac{C'D}{2}$. Cum însă $[C'D]$ și $[AB]'$ sînt paralele și congruente rezultă $(RQ) \equiv (MN)$ și dr. $RQ \parallel$ dr.MN Analog se arată pentru celelalte perechi de laturi.

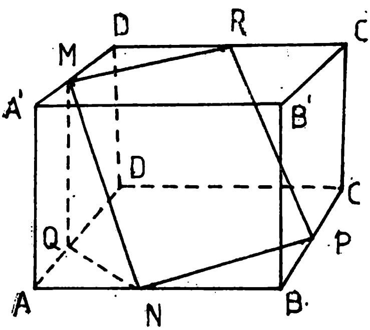
6.3[M]. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic. Fie N mijlocul lui $[AB]$, P al lui $[BC]$, M al lui $[A'D']$, R al lui $[D'C']$. Să se arate că:

a) $[MR]$ și $[NP]$ sînt congruente și dr. $MR \parallel$ dr. NP;

b) dr.MN și dr.RP sînt paralele;

c) dr.MN și dr.NP sînt perpendiculare $\Leftrightarrow$ $ABCD$ este pătrat;

d) Patrulaterul $MRPN$ este un dreptunghi a cărui arie se cere, știind că $AB = 10$ cm, $AD = 8$ cm, $AA' = 12$ cm.



R. a) În triunghiul ABC, (NP) este linie mijlocie, dr.$NP \parallel$ dr.AC și $NP = AC/2$.

În triunghiul $A'D'C'$, (MR) este linie mijlocie,

dr.$MR \parallel$ dr.$A'C'$, $MR = \dfrac{A'C'}{2}$. Dar dr.$AC \parallel$ dr.$A'C'$ și

$(AC) \equiv (A'C')$, deci dr. $NP \parallel$ dr.MR și $(NP) \equiv (MR)$, adică patrulaterul $MNPR$ este paralelogram.

b) avem dr.$MN \parallel$ dr.RP deoarece $MNPR$ este paralelogram.

c) Avem dr.$MN \perp$ dr. NP, $\Leftrightarrow$ dr. $QN \perp$ dr. NP (Q mijlocul lui $[AD]$) echivalent cu faptul că diagonalele dreptunghiului $ABCD$ sînt perpendiculare.

6.4[M]. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped și O punctul de intersecție al dreptelor AC' și $A'C$. Fie α un plan oarecare, care nu intersectează paralelipipedul și dr.$AA_1 \parallel$dr.$BB_1 \parallel$dr.$CC_1 \parallel$dr.$DD_1 \parallel$dr.$A'A_1' \parallel$dr.$B'B_1' \parallel$ dr.$C'C_1' \parallel$dr.OO_1 drepte, paralele care intersectează α în A_1, B_1, C_1, D_1, A_1', B_1', C_1', D_1', O_1'. Să se calculeze $AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1 + A'A_1' + B'B_1' + C'C_1' + D'D_1'$ în funcție de segmentul OO_1 cu $OO_1 = m$.

R. Punctul O este punctul de intersecție a tuturor diagonalelor paralelipipedului. În plus, aceste diagonale se intersectează în părți congruente în O. Atunci, în trapezele $AA_1C_1'C'$, $BB_1D'D_1'$, $DD_1B'B_1'$, $A'A_1'C'_1C$, $[O_1O]$ este linie mijlocie, deci:

$$m = OO_1 = \frac{AA_1 + C_1'C'}{2} = \frac{BB_1 + D_1D_1'}{2} = \frac{DD_1 + B'B_1'}{2} = \frac{A'A_1' + C'C}{2}$$

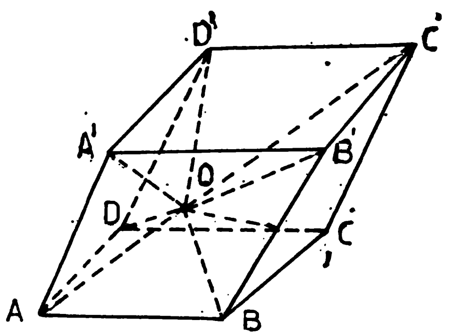
de unde:

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1 + A'A_1' + B'B_1' + C'C_1' + D'D_1' = 8\,m.$$

6.5[M]. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped. Prin punctul O de intersecție al dreptelor AC' și $A'C$ ducem un plan oarecare α. Să se demonstreze că suma distanțelor vîrfurilor unei baze la planul α este egală cu suma distanțelor vîrfurilor celeilalte baze la α.

R. Vom ține cont în rezolvarea problemei de faptul că, dacă un plan conține mijlocul unui segment, atunci capetele segmentului sînt egal depărtate de plan.

Punctul O este punctul de intersecție al diagonalelor pe care le împarte în părți congruente. Astfel, cum planul α conține pe O, se obține :



$(AO) \equiv (OC')$, deci $d(A, \alpha) = d(C', \alpha)$;

$(BO) \equiv (OD')$, deci $d(B, \alpha) = d(D', \alpha)$;

$(CO) \equiv (OA')$, deci $d(C, \alpha) = d(A', \alpha)$;

$(DO) \equiv (OB')$, deci $d(D, \alpha) = d(B', \alpha)$.

Adunînd egalitățile între distanțe obținem :

$$d(A, \alpha) + d(B, \alpha) + d(C, \alpha) + d(D, \alpha) = d(A', \alpha) + d(B', \alpha) + d(C', \alpha) + d(D', \alpha).$$

Prin $d(A,\alpha)$ s-a notat distanța de la punctul A la planul α.

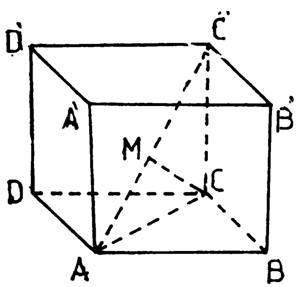
6.6^{M}. Un paralelipiped dreptunghic $ABCD\ A'B'C'D'$ are dimensiunile $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm și $AA' = 12$ cm. Să se calculeze :

a) lungimea diagonalei sale ;

b) distanța de la punctul C la dreapta AC'.

R. a) Diagonala $[AC']$ are lungimea calculată din formula :

$$AC'^2 = AB^2 + BC^2 + CC'^2$$



sau :

$$AC'^2 = (3^2 + 4^2 + 12^2) = 169 \text{ cm}^2,$$

de unde $AC' = 13$ cm.

b) Fie M piciorul perpendicularei din C pe dr. AC'. În triunghiul dreptunghic ACC' (C are măsura de 90°), înălțimea MC are lungimea :

$$CM = \frac{AC \cdot CC'}{AC'}.$$

Din triunghiul dreptunghic ABC :

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} \text{ cm} = 5 \text{ cm}$$

de unde :

$$CM = \frac{5 \cdot 12}{13} \text{ cm} = \frac{60}{13} \text{ cm}.$$

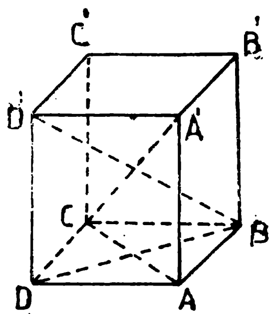
6.7^{M}. Un paralelipiped drept $ABCDA'B'C'D'$ are baza $ABCD$ un romb cu latura de 8 cm și unghiul $\sphericalangle A$ de măsură 120°. Știind că muchia laterală a paralelipipedului este de lungime 6 cm, să se calculeze :

a) aria laterală a paralelipipedului ;

b) lungimea segmentelor $[A'C]$ și $[BD']$.

R. a) Aria laterală este dată de :

$$\mathcal{A}_l = 4\mathcal{A}_{ABB'A'} = 4 \cdot AB \cdot AA' = 4 \cdot 8 \cdot 6 \text{cm}^2 = 192 \text{ cm}^2.$$



b) Vom calcula mai întîi lungimea diagonalelor (AC) și (BD) ale rombului. Să observăm că în rombul $ABCD$, $\widehat{ABC}$ are măsura de 60° deci, cum $\widehat{BAC} \equiv \widehat{BCA}$, triunghiul ABC este echilateral de unde $AC = AB = 8$ cm. Diagonala BD are lungimea $BD = 20$ cm, căci $(DO) \equiv (OB)$; cum $[OB]$ este înălțime în triunghiul echilateral ABC, $OB = \frac{8\sqrt{3}}{2}$. Deci $BD = 8\sqrt{3}$ cm.

În triunghiul dreptunghic $A'AC$ ($\hat{A}$ are măsura de 90°),

$$A'C = \sqrt{CA^2 + AA'^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ (cm)}$$

iar în triunghiul dreptunghic $D'DB$ ($\hat{D}$ are măsura de 90°),

$$BD' = \sqrt{BD^2 + DD'^2} = \sqrt{192 + 36} = \sqrt{228} = 2\sqrt{57} \text{ (cm)}.$$

6.8^M. Un cub are muchia de lungime a. Să se afle distanțele de la vîrfurile sale la o diagonală.

R. Fie $ABCDA'B'C'D'$ cubul considerat și fie diagonala AC' față de care vom calcula distanțele de la vîrfuri. Să calculăm mai întîi distanța de la B la drAC', $d(B,\text{dr}AC')$. Observăm că $d(B, \text{dr}.AC') = d(D, \text{dr}AC')$. Cum dr.$CC' \perp (ABCD)$ și dr.$BC \perp AB$, atunci dr.$C'B \perp$ dr.AB, adică triunghiul ABC' este dreptunghic. Dacă $AB = a$, atunci $BC' = a\sqrt{2}$ și $AC' = a\sqrt{3}$. Se obține:

$$d(B,\text{dr}AC') = \frac{AB \cdot BC'}{AC'} = \frac{a^2\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Să calculăm, în continuare, $d(C, \text{dr}AC')$. În triunghiul dreptunghic ACC', în care $AC = a\sqrt{2}$, calculăm $d(C, \text{dr}AC')$ tot cu teorema înălțimii. Avem:

$$d(C, AC') = \frac{AC \cdot CC'}{AC'} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Analog se obține distanța de la fiecare din punctele A', D' la drAC', care va fi tot $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

În plus, perpendicularele din vîrfurile cubului (evident, distanțele de la A și C' la dr.AC' sînt zero) pe dr. AC' sînt concurente în același punct.

6.9^M. Un paralelipiped drept are laturile bazei în lungime de 6 cm și 10 cm și unghiul dintre ele de măsură 60°. Știind că înălțimea paralelipipedului este în lungime de 12 cm, să se afle aria sa totală.

R. Aria bazei se calculează cu relația:

$$S_{bază} = l_1 \cdot l_2 \sin \alpha$$

unde l_1, l_2 sînt lungimile laturilor bazei, $l_1 = 6$ cm, $l_2 = 10$ cm, și α măsura unghiului dintre ele, $\alpha = 60°$. Deci:

$$S_{bază} = 6 \cdot 10 \cdot \sin 60° = 30\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Aria laterală este dată de:

$$A_l = 2S_{l_1} + 2S_{l_2}$$

unde S_{l_1} este aria feței mărginită de latura l_1 și muchiile laterale, S_{l_2} aria feței mărginită de latura l_2. Deci:

$$A_l = 2l_1 \cdot h + 2l_2 \cdot h$$

unde h este măsura înălțimei paralelipipedului, $h = 12$ cm. Înlocuind și efectuînd, se obține $A_l = 284$ cm². Atunci aria totală este:

$$A_t = A_l + 2S_{bază} = (384 + 30\sqrt{3})\ \text{cm}^2.$$

6.10ᴹ. Să se demonstreze că într-un cub $ABCDA'B'C'D'$ perpendiculara din D pe diagonala AC' o intersectează pe aceasta într-un punct Q, astfe încît $\dfrac{AQ}{AC'} = \dfrac{1}{3}$.

R. Deoarece dr.$AD \perp$ dr.DC și dr.$AD \perp$ dr.DD', rezultă dr.$AD \perp (DCC'D')$, deci, în particular dr.$AD \perp$ dr.DC' și în triunghiul dreptunghic ADC' ($\hat{D}$ are măsura de$90°$) aplicăm teorema catetei:

$$AD^2 = AQ \cdot AC'$$

de unde:

$$AQ = \frac{AD^2}{AC'}.$$

Dar $AC' = AD\sqrt{3}$.

Raportul cerut în enunț se scrie succesiv:

$$\frac{AQ}{AC'} = \frac{\frac{AD^2}{AC'}}{AC'} = \left(\frac{AD}{AC'}\right)^2 = \left(\frac{AD}{AD\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}.$$

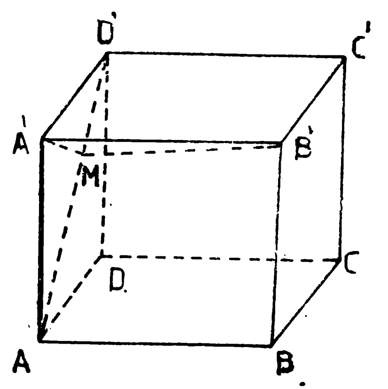
Observație. Problema este imediată, ținînd cont că într-un triunghi dreptunghic, raportul pătratelor catetelor este egal cu raportul proiecțiilor lor, de unde, în triunghiul ADC':

$$\frac{AQ}{QC'} = \frac{AD^2}{DC'^2} = \frac{1}{2},$$

de unde:

$$\frac{AQ}{AC'} = \frac{AQ}{QC' + AQ} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}.$$

6.11ᴹ. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu $AB = 9$ cm, $AD = 15$ cm și $AA' = 20$ cm. Se cere distanța de la B' la diagonala AD'.



R. Construcția perpendicularei din B' pe AD' va rezulta aplicînd teorema celor trei perpendiculare. Astfel, dr.$B'A' \perp (ADD'A')$ și fie dr.$A'M \perp$ dr.AD'. Atunci dr.$B'M \perp$ dr.AD'.

Diagonala AD' este ipotenuză în triunghiul ADD' și are lungimea:

$$AD' = \sqrt{AD^2 + D'D^2} = \sqrt{225 + 400} = 25\ \text{(cm)}.$$

In triunghiul dreptunghic $A'D'A$, înălţimea $A'M$ are lungimea:

$$A'M = \frac{A'D' \cdot AA'}{AD'} = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12 \text{ (cm)}.$$

Deci, din triunghiul dreptunghic $B'MA'$ (A' are măsura de $90°$):

$$B'M = \sqrt{A'B'^2 + A'M^2} = \sqrt{81 + 144} = 15 \text{ cm}.$$

6.12. Un paralelipiped $ABCDA'B'C'D'$ are baza $ABCD$ un pătrat. Muchiile laterale formează cu planul bazei unghiuri de măsură 30°, iar planele $AA'B'$ şi $DD'C'$ sînt perpendiculare pe planul bazei. Cunoscînd că $AB = 4$ cm şi $AA' = 6$ cm, să se calculeze aria totală a paralelipipedului.

R. Deoarece $ADD'A'$ este paralelogram şi $DA \perp AA'$ atunci $ADD'A'$ este dreptunghi şi deci $BCC'B'$ este tot dreptunghi, de unde:

$$S_{ADD'A'} = AA' \cdot AD = 24 \text{ (cm}^2).$$

Fie dr.$A'M \perp$ dr.AB, şi considerînd triunghiul dreptunghic $A'AM$ ($\hat{M}$ are măsura de $90°$),

$A'M = \frac{AA'}{2} = 3$ (cm) şi deci, $S_{ABB'A'} = AB \cdot A'M = 12$ (cm²). Atunci:

$$A_t = 2S_{ABCD} + 2S_{ABB'A'} + 2S_{ADD'A'} = 104 \text{ (cm}^2).$$

6.13[M]. Într-un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, cu baza $ABCD$ un pătrat, înălţimea are lungimea de 3 cm, iar dreptunghiul $ABB'A'$ are aria de 21 cm². Să se afle dimensiunile paralelipipedului.

R. Aria dreptunghiului $ABB'A'$ are expresia:

$$S_{ABB'A'} = AB \cdot AA'.$$

Cum, $S_{ABB'A'} = 21$ cm², $AA' = 3$ cm, atunci $AB = 7$ cm.
Cum $ABCD$ este pătrat, $AB = BC = 7$ cm.

6.14[M]. Se dă un paralelipiped drept cu baza un romb, în care se cunosc: înălţimea h a paralelipipedului, latura a a rombului, precum şi un unghi ascuţit θ, al rombului. Să se calculeze, în funcţie de a, h, θ diagonalele paralelipipedului.

R. Vom calcula mai întîi lungimea diagonalei AC' a paralepipedului care este congruentă cu $A'C$. Astfel, în triunghiul dreptunghic $A'AC$ ($\hat{A}$ are $90°$), avem:

$$A'C = \sqrt{AC^2 + A'A^2}.$$

Dar, $AC = 2OA$ unde $OA = a \cdot \cos\frac{\theta}{2}$ deci: $AC = 2 \cdot a\cos\frac{\theta}{2}$.

De aici;

$$A'C = \sqrt{4a^2 \cos^2\frac{\theta}{2} + h^2}.$$

Diagonala BD' o vom calcula din triunghiul dreptunghic BDD' (D are măsura de 90°):

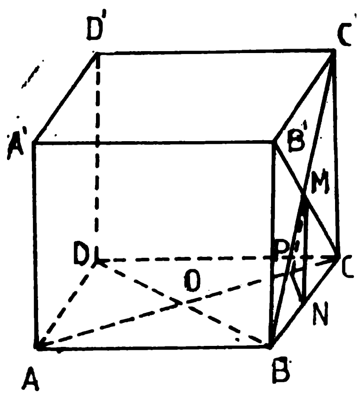
$$BD' = \sqrt{BD^2 + D'D^2}.$$

Avem, $BD = 2 \cdot OB$. Cum $OB = a \sin \frac{\theta}{2}$, rezultă $BD = 2a \sin \frac{\theta}{2}$.

Rezultă:

$$BD' = \sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + h^2}.$$

6.15^M. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic. Știind că $ABCD$ este un pătrat cu diagonala de 10 cm, $AA' = 24$ cm și M este centrul feței $BB'C'C$, se cere distanța de la punctul M la diagonala AC a bazei.



R. Fie N piciorul perpendicularei din M pe dr. BC. Triunghiul BMC este isoscel $(MB) \equiv (MC)$ și cum dr. $MN \perp$ dr. BC, rezultă $(BN) \equiv (NC)$. De asemenea, $(BM) \equiv (MC')$, deci (MN) este linie mijlocie în triunghiul BCC', de unde:

$$MN = \frac{CC'}{2} = 12 \text{ cm}.$$

Cum $ABCD$ este pătrat, dr. $AC \perp$ dr. BD. Fie în continuare, dr. $MP \perp$ dr. AC. Cum dr. $MN \perp (ABCD)$ (dr. $MN \perp$ dr. BC și dr. $MN \subset BCC'B'$), rezultă, conform reciprocei teoremei celor trei perpendiculare, dr. $NP \perp$ dr. AC.

Deci, dr. $NP \parallel$ dr. BD și în triunghiul BOC, (NP) este linie mijlocie:

$$NP = \frac{OB}{2} = 5 \text{ (cm)}.$$

Considerînd triunghiul dreptunghic MNP, ipotenuza MP are lungimea:

$$MP = \sqrt{MN^2 + NP^2} = 13 \text{ cm}.$$

6.16^M. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile proporționale cu numerele 2, 3, 5. Știind că diagonala paralelipipedului are lungimea $2\sqrt{38}$ cm, să se afle dimensiunile paralelipipedului.

R. Notînd cu L, l, h dimensiunile paralelipipedului, avem relația:

$$\frac{l}{2} = \frac{L}{3} = \frac{h}{5}$$

echivalentă cu:

$$\frac{l^2}{4} = \frac{L^2}{9} = \frac{h^2}{25} = \frac{L^2 + l^2 + h^2}{4 + 9 + 25}$$

dar :

$$L^2 + l^2 + h^2 = d^2$$

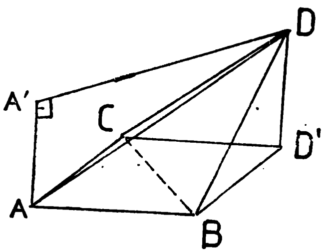
unde d este diagonala paralelipipedului, $d = 2\sqrt{38}$. Deci :

$$\frac{l^2}{4} = \frac{L^2}{9} = \frac{h^2}{25} = \frac{4 \cdot 38}{38} = 4$$

de unde :

$$l = 4 \text{ cm}, \ L = 6 \text{ cm}; \ h = 10 \text{ cm}.$$

6.17[M]**.** Pe planul triunghiului dreptunghic isoscel ABC ($(AB) \equiv (AC)$ şi $AB = a$) considerăm perpendiculara $AA' = a$. Din A' fie un segment $A'D = a\sqrt{2}$, perpendicular pe dr. AA'. Dacă dr. BD este perpendiculară pe AB şi dacă D este de aceeaşi parte a planului $AA'B$ ca şi C, atunci triunghiul DBC este echilateral.



R. Fie dr. $DD' \perp (ABC)$, atunci dr. DD' este perpendiculară pe orice dreaptă din plan. În plus, dr. $DD' \parallel$ dr. AA' ca perpendiculare pe acelaşi plan.

Din dr. $DD' \parallel$ dr. AA' şi dr. $AD' \parallel$ dr. $A'D$ avem :

$$DD' = AA' = a; \ A'D = AD' = a\sqrt{2}.$$

Din triunghiul ABC avem :

$$BC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$$

Cum dr. $DD' \perp (ABC)$ şi dr. $BD \perp$ dr. AB, avem dr. $D'B \perp$ dr. AB şi deci, în triunghiul dreptunghic ABD', avem :

$$BD' = \sqrt{AD'^2 - AB^2} = a.$$

Deci $(AC) \equiv (BD')$ şi cum dr. $BD' \parallel$ dr. AC, patrulaterul $ABD'C$ este un paralelogram cu un unghi $\hat{A}$ cu măsura de 90°, deci este pătrat ($(AC) \equiv (AB)$ conform ipotezei). Astfel $(AD') \equiv (BC)$. Vom calcula, din triunghiurile dreptunghice $BD'D$ şi $CD'D$, lungimile ipotenuzelor BD şi CD. Găsim :

$$BD = CD = a\sqrt{2}.$$

Cum $BC = a\sqrt{2}$, rezultă că triunghiul BCD este echilateral.

6.18[M]**.** O prismă dreaptă are ca bază un triunghi echilateral cu latura de lungime 6 cm. Ştiind că aria laterală a prismei este de 288 cm², să se afle volumul prismei.

R. Fie $ABCA'B'C'$ prisma dată în care

$$\mathcal{A}_l = \mathcal{A}_{ABB'A'} + \mathcal{A}_{ACC'A'} + \mathcal{A}_{BB'C'C} = AB \cdot AA' + AC \cdot CC' + BC \cdot BB'.$$

Cum :

$$AB = AC = BC = 6 \text{ cm}$$

rezultă :

$$288 \text{ cm}^2 = \mathcal{A}_l = 6 \cdot 3\, h$$

unde :

$$AA' = BB' = CC' = h.$$

De aici, se obține $h = 16$ cm.
Volumul prismei este dat de :

$$\mathcal{V}_{ABCA'B'C'} = \mathcal{A}_{ABC} \cdot h = \frac{36\sqrt{3}\cdot 16}{4} = 144\sqrt{3}\ (\text{cm}^3).$$

6.9^M. O prismă are baza un paralelogram cu dimensiunile de 6 cm și 8 cm și unghiul ascuțit cu măsura de 60°. Știind că înălțimea prismei are lungimea de 10 cm, să se afle volumul prismei.

R. Notînd cu L, respectiv, l, lungimile laturilor paralelogramului, aria bazei este dată de :

$$\mathcal{A}_{bază} = L \cdot l \sin 60° = 8 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}.$$

De aici, volumul prismei este :

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{bază} \cdot h = 24\sqrt{3} \cdot 10 = 240\sqrt{3}\ (\text{cm}^3).$$

6.10^M. O prismă hexagonală dreaptă are aria totală de $224\sqrt{3}$ m² și cea laterală de $200\sqrt{3}$ m². Să se calculeze volumul prismei.

R. Baza prismei fiind un hexagon regulat de latură l, putem scrie :

$$\mathcal{A}_{bază} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}. \tag{1}$$

Dar :

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_{bază}$$

de unde, înlocuind $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{A}_l$ cu valorile date în enunț, se obține :

$$\mathcal{A}_{bază} = \frac{224\sqrt{3} - 200\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}\ (\text{m}^2).$$

Înlocuind valoarea găsită mai sus în (1) se obține $l = 2\sqrt{2}$ m. Cum aria unei fețe laterale este $\mathcal{A} = l \cdot h$, unde h este lungimea înălțimii prismei, din relația :

$$\mathcal{A}_l = 6lh,$$

înlocuind, rezultă $h = \dfrac{25\sqrt{6}}{3}$.

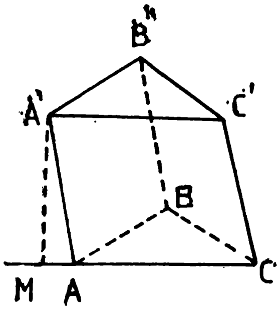
Volumul prismei se calculează cu formula :

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{bază} \cdot h$$

sau, înlocuind :

$$\mathcal{V} = 12\sqrt{3} \cdot \frac{25\sqrt{6}}{3} = 302\ (\text{m}^3).$$

6.11[M]. O prismă triunghiulară are ca bază un triunghi dreptunghic cu catetele de lungime 5 m şi 12 m. Muchiile laterale sînt congruente, au lungimea 6 m şi fac cu planul bazei unghiuri cu măsura de 45°. Să se afle volumul prismei.



R. Fie $ABCA'B'C'$ prisma dată. Să considerăm dr. $A'M \perp (ABC)$. Conform ipotezei, $\widehat{A'AM}$ are măsura 45°, deci triunghiul dreptunghic $A'AM$ este isoscel, $MA = MA'$ şi :

$$2MA'^2 = 36$$

de unde $MA' = 3\sqrt{2}$ m.

Volumul prismei este :

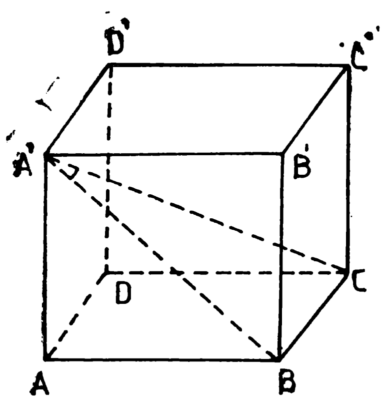
$$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{bază} \cdot MA'$$

unde :

$$\mathcal{A}_{bază} = \frac{BC \cdot AC}{2} = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30\ (\text{m}^2).$$

deci, $\mathcal{V} = 90\sqrt{2}$ m³.

6.22[M]. O prismă dreaptă are ca bază un pătrat de latură a. Ştiind că diagonala prismei formează cu o faţă laterală ce „porneşte" din acelaşi vîrf un unghi cu măsura de 30°, să se afle volumul prismei.



R. Fie $ABCDA'B'C'D'$ prisma dată, în care $ABCD$ este pătrat şi $\sphericalangle BA'C$ are măsura 30° (unghiul dintre diagonala $A'C$ şi faţa laterală $(ABB'A')$ este unghiul dintre dr. $A'C$ şi dr. $A'B$, proiecţia dr. $A'C$ pe planul $(ABB'A')$.

În triunghiul dreptunghic $A'BC$ avem :

$$\sin 30° = \frac{BC}{A'C}$$

de unde $A'C = 2BC = 2a$.

Lungimea catetei $A'B$ este $A'B = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$, de unde, în triunghiul $AA'B$, înălţimea AA' a prismei are lungimea :

$$AA' = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}.$$

De aici, rezultă volumul prismei :

$$\mathcal{V} = AB \cdot BC \cdot AA' = a^2\sqrt{2}.$$

6.23[M]. Baza unei prisme oblice este patrulaterul $ABCD$ în care diagonalele sînt perpendiculare între ele. Secţiunea diagonală $AA'C'C$ este perpendiculară pe planul bazei şi are aria egală cu a^2, iar diagonala $BD = b$. Să se afle volumul prismei.

R. Conform ipotezei avem dr.$AC \perp$ dr.BD. Atunci aria bazei $ABCD$ este:

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{AC \cdot b}{2}$$

Pe de altă parte, planul $(AA'C'C)$ este perpendicular pe planul $(ABCD)$, de unde rezultă că h, lungimea înălțimii patrulaterului $AA'C'C$, este chiar înălțimea prismei, deci:

$$a^2 = \mathcal{A}_{AA'C'C} = AC \cdot h.$$

Volumul prismei este:

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{ABCD} \cdot h = \frac{BD \cdot AC \cdot h}{2} = \frac{a^2 b}{2}.$$

6.14^M. O prismă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are diagonala cu lungimea de 13 cm și raza cercului circumscris bazei de lungime 6 cm. Să se afle volumul prismei.

R. Ținînd cont că baza prismei este un pătrat de latură l, a cărui diagonală este congruentă cu diametrul $2R$ al cercului circumscris bazei, se obține:

$$l = R\sqrt{2} = 6\sqrt{2}.$$

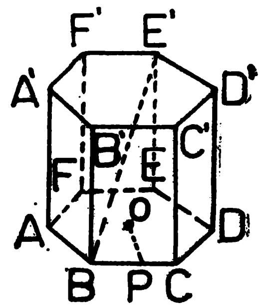
Considerînd triunghiul dreptunghic ACA' ($\hat{A}$ are măsura de 90°), în care $A'C = 13$ cm și $AC = l\sqrt{2} = 12$ (cm), putem afla lungimea înălțimii prismei, AA':

$$AA' = \sqrt{A'C^2 - AC^2} = 5 \text{ (cm)}.$$

Volumul prismei este:

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{ABCD} \cdot AA' = AB^2 \cdot AA' = l^2 \cdot AA' = 360 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

6.25^M. În figură este desenată o prismă hexagonală regulată dreaptă. Știind că $E'B = 26$ cm și apotema bazei $OP = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm, să se determine volumul și aria laterală a prismei.



R. Hexagonul $ABCDEF$ este regulat, deci triunghiul OBC este echilateral, de unde, latura $BC = l$ a bazei este:

$$l = \frac{2OP\sqrt{3}}{3} = 5 \text{ (cm)},$$

astfel că aria bazei este:

$$\mathcal{A}_{ABCDEF} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2} = \frac{75\sqrt{3}}{2} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Din triunghiul dreptunghic BEE' ($\hat{E}$ are măsura de 90°) determinăm lungimea înălțimii EE' a prismei, ținînd cont că $BE = 2l = 10$ (cm):

$$EE' = \sqrt{E'B^2 - EB^2} = \sqrt{576} = 24 \text{ (cm)}.$$

Volumul prismei este:

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{ABCDEF} \cdot EE' = 900\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}.$$

6.26[M]. O prismă oblică are bazele hexagoane regulate $ABCDEF$ şi $A'B'C'D'E'F'$ şi ca înălţime $A'O$, O fiind centrul bazei $ABCDEF$. Dacă latura hexagonului este de 4 cm şi m ($\sphericalangle AA'O$) = 60° să se calculeze:

a) volumul prismei;

b) unghiul feţei $ABB'A'$ cu planul bazei.

R. a) dr. $A'O$ fiind perpendiculară pe bază, este perpendiculară pe orice dreaptă din planul bazei, deci dr. $A'O \perp$ dr. AO şi, în triunghiul $A'OA$, în care $AO = \frac{AD}{2} = \frac{2l}{2} = l$, unde cu l am notat lungimea laturei hexagonului:

$$A'O = AO \operatorname{ctg} 60° = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ (cm)}.$$

Aria bazei $ABCDEF$ este:

$$\mathcal{A}_{ABCDEF} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

şi deci, volumul este:

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{ABCDEF} \cdot A'O = 96 \text{ cm}^3.$$

b) Fie dr. $OP \perp$ dr. AB. Conform teoremei celor trei perpendiculare rezultă dr. $A'P \perp$ dr. AB, şi deci unghiul diedru dintre planele $(ABCDEF)$ şi $(ABB'A')$ se măsoară cu ajutorul măsurii unghiului $A'PO$. În triunghiul dreptunghic $A'OP$ ($\hat{O}$ are măsura de 90°) avem:

$$\operatorname{tg} \widehat{A'PO} = \frac{A'O}{PO}.$$

Dar (PO) este înălţime în triunghiul echilateral AOB, cu latura $l = 4$ cm. Deci:

$$\operatorname{tg} \widehat{A'PO} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{\frac{4\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{3}.$$

6.27[M.PO]. Pe o masă se găseşte o vază plină cu apă, avînd forma unui paralelipiped dreptunghic, cu baza un pătrat de latură 8 cm şi înălţimea egală cu 12 cm. Se înclină vasul, astfel încît una din muchiile bazei să rămînă pe masă, iar muchiile laterale să rămînă în plane perpendiculare pe planul mesei, pînă cînd porţiunile neudate ale muchiilor au lungimea de 4 cm. După aceasta vasul revine în poziţia iniţială. Ce înălţime are apa rămasă?

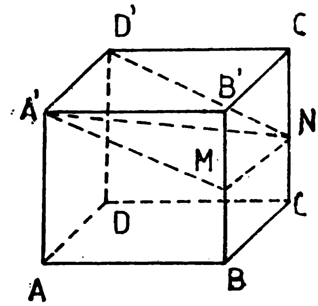
R. Fie $ABCDA'B'C'D'$ paralelipipedul dat în care $ABCD$ este un pătrat şi fie $(A'MND')$ planul apei în momentul în care porţiunile neudate ale muchiilor au lungimea de 4 cm ($B'M = C'N = 4$ cm).

Vom calcula volumul apei scurse din vas. Să observăm că acest lucru este echivalent cu a calcula volumul prismei $A'B'MD'C'N$.

Avem:

$$\mathcal{V}_{A'B'MD'C'N} = \mathcal{A}_{A'MB'} \cdot B'C' = \frac{A'B' \cdot B'M}{2} \cdot B'C' = \frac{8 \cdot 4}{2} \cdot 8 = 128 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Astfel, readucînd vasul în poziția inițială, apa se va ridica la o înălțime h', ocupînd un volum echivalent cu volumul unui paralelipiped cu baza $ABCD$ și înălțimea h. Pe de altă parte, acest volum se poate exprima altfel, și anume:



$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_{ABCDA'B'C'D'} - \mathcal{V}_{A'B'MD'C'N'}$$

Dar:

$$\mathcal{V}_{ABCDA'B'C'D'} = \mathcal{A}_{ABCD} \cdot h = 768 \text{ (cm}^3\text{)},$$

sau:

$$\mathcal{V} = 768 - 128 = 640 \text{ (cm)}$$

deci:

$$h' \cdot \mathcal{A}_{ABCD} = 640 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

de unde:

$$h' = \frac{640}{64} = 10 \text{ (cm}^3\text{)} \cdot$$

6.28 PO. **O undiță cu lungimea de $3\sqrt{2}$ m se poate demonta în trei părți de aceeași lungime. Ea trebuie pusă într-un colet paralelipipedic cu baza pătrată la care nici o dimensiune să nu depășească 1 m. Care este latura de lungime minimă a pătratului astfel încît să încapă undița?**

R. Fie $ABCDA'B'C'D'$ coletul paralelipipedic cu baza pătrat. Undița se poate demonta în trei părți, fiecare avînd lungimea $l = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$ (m). Fie AB lungimea laturii pătratului pe care va trebui s-o determinăm cu condiția din enunț. Să așezăm o parte l din undiță după direcția diagonalei (AC') Avem:

$$AC'^2 = AB^2 + BC^2 + CC'^2.$$

Dar $AB = BC$ și luînd $CC' = 1$ obținem:

$$AC'^2 = 2AB^2 + 1.$$

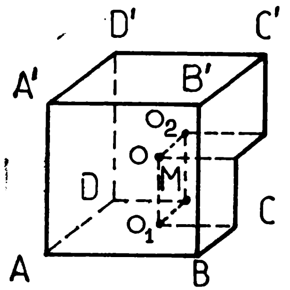
Dar $AC' = \sqrt{2}$ m. Deci:

$$2AB^2 + 1 = 2$$

de unde:

$$AB = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ cm}.$$

6.29 M. **În cubul $ABCDA'B'C'D'$ de muchie a, O este centrul său, O_1, cel al feței $ABCD$, O_2, cel al feței $BB'C'C$, O_3 al feței $CDD'C'$, M mijlocul lui (DC), N mijlocul lui (CC'), P al lui (CB). După înlăturarea cubului $O_1PCMOO_2NO_3$ cum s-a modificat aria corpului rămas față de aria totală a cubului? Dar volumul?**



R. Aria totală a corpului rămas după înlăturarea cubului dat în enunț este:

$$\mathscr{A}_t = \mathscr{A}_{tABCDA'B'C'D'} - \mathscr{A}_{PCNO_2} - \mathscr{A}_{O_1PCM} - \mathscr{A}_{MCNO_3} +$$

$$+ \mathscr{A}_{O_1PO_2O} + \mathscr{A}_{O_1MO_3O} + \mathscr{A}_{OO_2NO_3}.$$

Dar:

$$\mathscr{A}_{PCNO_2} = \mathscr{A}_{O_1PCM} = \mathscr{A}_{MCNO_3} = \mathscr{A}_{O_1PO_2O} = \mathscr{A}_{O_1MO_3O} =$$

$$= \mathscr{A}_{OO_2NO_3}.$$

Deci:

$$\mathscr{A}_t = \mathscr{A}_{tABCDA'B'C'D'},$$

adică aria totală nu se modifică.

Volumul cubului $O_1PCMOO_2NO_3$ este:

$$\mathscr{V}_1 = \frac{a^3}{8}$$

și cum volumul cubului inițial este $\mathscr{V} = a^3$, volumul corpului rămas este:

$$\mathscr{V}' = \mathscr{V} - \mathscr{V}_1 = a^3 - \frac{a^3}{8} = \frac{7a^3}{8}.$$

6.30^M. În cubul $ABCDA'B'C'D'$, M este mijlocul muchiei AD, iar N este mijlocul muchiei CD. Știind că $MN = 5\sqrt{2}$ m, să se afle volumul și aria totală a cubului.

R. În triunghiul ADC, (MN) este linie mijlocie, deci:

$$MN = \frac{AC}{2}$$

de unde, $AC = 10\sqrt{2}$ m, și considerînd triunghiul dreptunghic ABC în care $[AB] \equiv [BC]$ se obține:

$$AC^2 = 2AB^2,$$

de unde, $l = AB = 10$ m, și deci:

$$\mathscr{V}_{ABCDA'B'C'D'} = AB \cdot BC \cdot AA' = 1000 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

și:

$$At = 6l^2 = 600 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

6.31^M. În cubul $ABCDA'B'C'D'$, N este mijlocul muchiei $[C'B']$. Segmentul $[AN]$ are lungimea de 3 dm. Să se afle aria totală și volumul cubului.

R. Cum dr. $B'C' \perp$ dr. BB' și dr. $B'C' \perp$ dr. $A'B'$ rezultă dr. $B'C' \perp (ABB'A')$, deci dr. $B'C' \perp$ dr. AB' și, în triunghiul dreptunghic $AB'N$, (notînd cu l lungimea laturii cubului) avem:

$$AN^2 = AB'^2 + B'N^2 = (l\sqrt{2})^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2,$$

de unde se obține :

$$9l^2 = 36,$$

deci $l = 2$ și volumul cubului este :

$$\mathscr{V} = l^3 = 8 \text{ dm}^3$$

iar aria totală :

$$\mathscr{A}_t = 6l^2 = 24 \text{ dm}^2.$$

6.32$^{\text{M}}$. Suma tuturor lungimilor muchiilor unui paralelipiped dreptunghic este de 48 m, iar diagonala de $5\sqrt{2}$ m. Să se afle aria totală a paralelipipedului.

R. Fie a, b, c lungimile laturilor bazei și a înălțimii paralelipipedului. Notînd cu d lungimea diagonalei, avem relațiile :

$$4(a + b + c) = 48$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2 = 50.$$

Din prima relație avem :

$$a + b + c = 12.$$

Ridicînd la pătrat, obținem :

$$144 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

De aici :

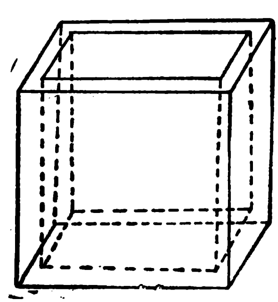
$$A_t = 2(ab + ac + bc) = 144 - (a^2 + b^2 + c^2) = 144 - 50 = 94 \text{ (m}^2\text{)}.$$

6.33$^{\text{PO}}$. Pentru construirea debarcaderelor se folosesc „cuburi“ de beton goale pe dinăuntru, care plutesc și sînt trase pe apă pînă la locul de destinație. Acolo sînt umplute cu pietriș (balast) și astfel sînt scufundate, constituind fundația debarcaderului.

Se dă un astfel de „cub“ de beton în formă de cutie fără capac (ca în figura alăturată).

Știm că muchia exterioară a „cubului“ este de 3 m, grosimea pereților este de 12,5 cm și densitatea betonului este 2,5 g/cm^3. Aflați :

a) volumul pereților „cubului“ de beton;
b) greutatea „cubului“ gol;
c) cîți m^3 de pietriș intră în „cub“?



R. a) Aflăm cantitatea de beton necesară turnării unui asemenea „cub“. Avem :

$$V = 4 \cdot 2,75 \cdot 0,125 \cdot 2,875 + 4 \cdot 0,125^2 \cdot 2,875 +$$
$$+ 3^2 \cdot 0,125 = 5,2578125 \text{ (m}^3\text{)};$$

b) $m = 13144,531$ kg;
c) În cub intră un volum de 21,742187 m^3 de pietriș.

6.34 M. Se dă un cub $ABCDA'B'C'D'$ de muchie a.

a) Să se calculeze distanțele de la punctele A, B', C la diagonala BD'

b) Să se arate că segmentele ale căror măsuri le-am calculat la pct. a) sînt concurente într-un punct T;

c) Să se arate că $\frac{BT}{TD'} = \frac{1}{2}$;

d) Să se afle măsura unghiului dintre dr. AB' și dr. AC.

R. a), b) Considerăm triunghiul ABD'. El este dreptunghic, ($m(\widehat{D'AB}) = 90°$), deoarece din dr. $DD' \perp$ dr. AB, dr. $AD \perp$ dr. AB rezultă dr. $AD' \perp$ dr. AB. Distanța AT de la A la dr. BD' este dată de:

$$AT = \frac{AB \cdot AD'}{BD'}.$$

Dar, $AB = a$, $AD' = a\sqrt{2}$, $BD' = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$, de unde $AT = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Triunghiul BCD' este dreptunghic ($m(\widehat{BCD'}) = 90°$) și, analog ca mai sus, rezultă că distanța de la C la dr. BD' este $CT_1 = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Analog, în triunghiul $BB'D'$ ($m(\widehat{BB'D'}) = 90°$) se obține $B'T = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Deoarece $BT = BT_1 = BT_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}$ rezultă că $T = T_1 = T_2$ adică segmentele AT, AT_1 AT_2 sînt coouncurente.

c) În triunghiul ABD' aplicăm de două ori teorema catetei și obținem:

$$AB^2 = BT \cdot BD'$$
$$AD'^2 = D'T \cdot BD'$$

de unde:

$$\frac{BT}{TD'} = \frac{AB^2}{AD'^2} = \frac{a^2}{(a\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}.$$

d) Deoarece în triunghiul $AB'C$, avem:

$$AB' = AC = B'C = a\sqrt{2}$$

rezultă că triunghiul este echilateral și deci unghiul $B'AC$ are măsura de 60°.

6.35 M. Un „cub" gol, din tablă groasă de 5 mm, are muchia în interior de 40 cm. Să se afle masa corpului știind că densitatea tablei este de $7{,}8 \cdot 10^3$ kg/m³.

R. Masa corpului este dată de relația:

$$M = \rho \cdot V$$

unde ρ este densitatea tablei, iar V este volumul ocupat de tablă. Acest volum este diferența dintre volumul cubului cu muchia de 40 cm + $2 \cdot 0{,}5$ cm = 41 cm și volumul cubului cu muchia de 40 cm. Avem:

$$V = 41^3\ \text{cm}^3 - 40^3\ \text{cm}^3 \simeq 0{,}004921\ \text{m}^3.$$

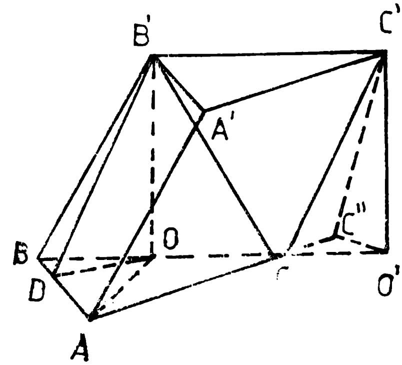
Deci, masa corpului este:

$$M = \rho \cdot V = 7{,}8 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}004921\ \mathrm{m^3} = 38{,}38\ \mathrm{kg}.$$

6.36[M]. O prismă oblică are ca bază un triunghi echilateral ABC, cu $AB = 4$ m. Fața $CBB'C'$ este un romb cu un unghi de $60°$ și este perpendiculară pe planul bazei. Se cere:

a) Volumul prismei.

b) Aria laterală a prismei.



R. a) Fie dr. $B'O \perp$ dr. BC. Deoarece triunghiul $BB'C$ este și el echilateral, rezultă $BO = OC$ și deci dr. $AO \perp$ dr. BC. Dar unghiul dintre dr. AO și dr. $B'O$ este tocmai unghiul dintre fețele ABC și $BCC'B'$. Avem dr. $AO \perp$ dr. $B'O$, deci cum dr. $B'O \perp$ dr. BC, rezultă dr. $B'O \perp (ABC)$. Volumul prismei este atunci:

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{ABC} \cdot B'O = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 24\ \mathrm{m^3}.$$

b) Fie dr. $OD \perp$ dr. AB. Conform teoremei celor trei perpendiculare, dr. $B'D \perp$ dr. AB, deci $\mathcal{A}_{AA'B'B} = AB \cdot B'D$.

Fie dr. $C'O' \parallel$ dr. OB'; deci dr. $C'O' \perp (ABC)$. Fie apoi dr. $O'C'' \perp$ dr. AC.

Triunghiurile BOD și $CO'C''$ sînt congruente, la fel și triunghiurile $B'OD$ și $C'O'C''$. Rezultă $\mathcal{A}_{AA'B'B} = \mathcal{A}_{ACC'A'}$. În triunghiul dreptunghic $B'OD$($\hat{O}$ are măsura de 90°) avem:

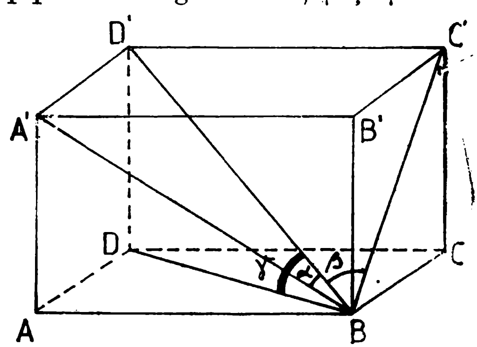
$$B'D = \sqrt{B'O^2 + OD^2} = \sqrt{12 + 3} = \sqrt{15}\ (\mathrm{m}).$$

Deci:

$$\mathcal{A}_e = \mathcal{A}_{AA'B'B} + \mathcal{A}_{AA'C'C} + \mathcal{A}_{BB'C'C} = 4\sqrt{15} + 4\sqrt{15} + 8\sqrt{3} = 8\sqrt{3}(1 + \sqrt{5})\ (\mathrm{m^2}).$$

6.37[PO]. În paralelipipedul dreptunghic de dimensiuni a, b și c, diagonala formează cu fețele paralelipipedului unghiurile α, β și γ.

Demonstrați că $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$.



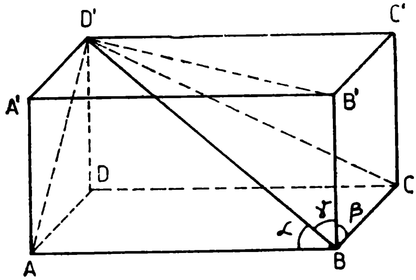
R. Fie $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$, $m(\widehat{D'BA'}) = \alpha$, $m(\widehat{D'BC'}) = \beta$, $m(D'BD) = \gamma$. Înlocuind în membrul sting din relația dată, avem:

$$\frac{c^2}{d^2} + \frac{a^2}{d^2} + \frac{b^2}{d^2} = \frac{d^2}{d^2} = 1.$$

6.38[PO]. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sînt a, b și c. Diagonala paralelipipedului formează cu muchiile acestuia unghiurile α, β și γ.

Demonstrați că:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$



R. Notăm $AB=a$, $BC=b$ şi $AA'=c$. Avem :

$\cos\alpha = \frac{a}{d}$ (din triunghiul dreptunghic $D'AB$);

$\cos\beta = \frac{b}{d}$ (din triunghiul dreptunghic $D'CB$):

$\cos\gamma = \frac{c}{d}$ (din triunghiul dreptunghic $D'B'B$).

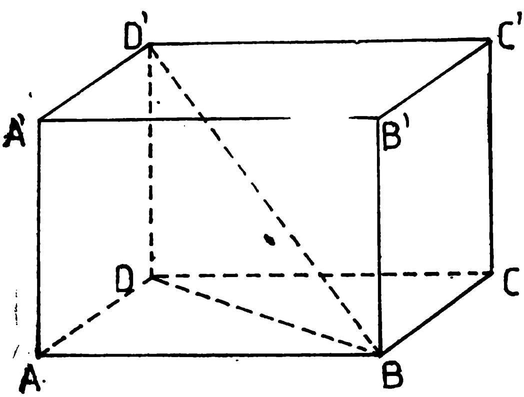
Înlocuind în membrul stîng din relaţia din enunţ avem :

$$\frac{a^2}{d^2}+\frac{b^2}{d^2}+\frac{c^2}{d^2}=\frac{d^2}{d^2}=1.$$

6.39[PO]. Un paralelipiped dreptunghic are aria bazei 768 cm^2, aria laterală $4480\sqrt{3}$ cm^2 şi diagonala bazei 40 cm. Aflaţi :

a) diagonala paralelipipedului;

b) măsura unghiului format de diagonala paralelipipedului cu planul bazei acestuia.



R. a) Dacă notăm lungimea, lăţimea şi înălţimea cu L, l respectiv i, pe baza relaţiilor date în problemă, avem sistemul :

$$\begin{cases} L\cdot l = 768 \\ L^2+l^2=1600 \\ 2\cdot(L+l)\cdot i = 4480\sqrt{3}. \end{cases}$$

Rezolvînd sistemul, obţinem : lungimea $L = 32$ cm, lăţimea $l = 24$ cm şi înălţimea $i = 40\sqrt{3}$ cm. Diagonala paralelipipedului este :

$$d=\sqrt{32^2+24^2+(40\sqrt{3})^2}=80\ \text{(cm)}.$$

b) Măsura unghiului format de diagonală cu planul bazei o aflăm din triunghiul dreptunghic $D'DB$, unde $\operatorname{tg}\widehat{D'BD}=\frac{DD'}{BD}$ sau :

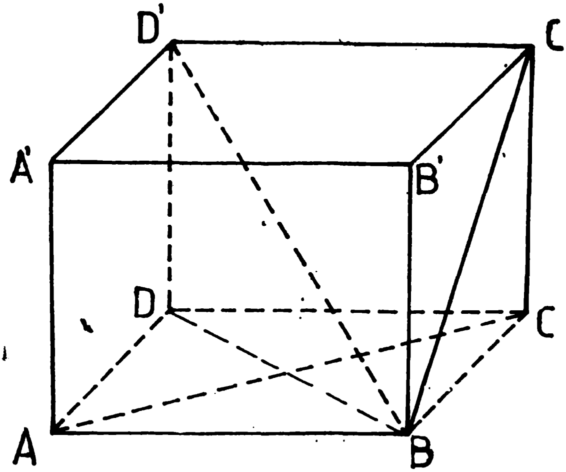
$$\operatorname{tg}\widehat{D'BD}=\sqrt{3},\ \text{deci m}\ (\widehat{D'BD})=60^\circ.$$

6.40[PO]. Diagonala unei prisme pătrate drepte este de a cm şi formează cu planul bazei un unghi de măsură 60°. Aflaţi în funcţie de a :

1) dimensiunile prismei;

2) aria totală şi volumul prismei.

R. 1) În triunghiul dreptunghic $D'DB$ avem : $DB = \frac{a}{2}$, $DD' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Din triunghiul dreptunghic isoscel DAB obținem : $AB = AD = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.



2) Aria totală este $\frac{1 + 2\sqrt{6}}{4}\,a^2$, iar volumul prismei este $\frac{\sqrt{3}}{16}\,a^3$.

6.41[M, PO]. Într-un paralelipiped $ABCDA'B'C'D'$ se consideră trei fețe care au un punct comun. Dacă aceste fețe sînt dreptunghiuri congruente, să se arate că paralelipipedul este un cub.

R. Fie $ABCD$, $ABB'A'$, $ADD'A'$ trei fețe congruente. Atunci, din dreptunghiurile $ABCD$ și $ADD'A'$ rezultă că $AB = AD$. La fel se arată că $AB = AA'$, deci paralelipipedul este cub

§ 7. PIRAMIDA ŞI TETRAEDRUL

7.1^M^. Un tetraedru are baza un triunghi dreptunghic, cu ipotenuza de lungime 10 cm şi o catetă de lungime 8 cm.
Înălţimea tetraedrului este de 10 cm. Care este volumul său?

R. Volumul tetraedrului se calculează cu formula:

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{S}_{bază} \cdot h}{3}$$

unde $\mathcal{S}_{bază}$ este aria bazei, h este lungimea înălţimii. În cazul nostru, fie ABC triunghiul de bază cu $m(\hat{A}) = 90°$ şi $AC = 8$ cm. Atunci:

$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 \text{ (cm)}.$$

Aria bazei este:

$$\mathcal{S}_{bază} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Deci volumul tetraedrului este:

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{S}_{bază} \cdot h}{3} = \frac{24 \cdot 10}{3} = 80 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

7.2^M^. Tetraedrul $VABC$ are baza ABC un triunghi echilateral cu latura $8\sqrt{3}$ cm; ştiind că distanţa de la V la planul (ABC) este 10 cm să se afle volumul tetraedrului.

R. Volumul tetraedrului îl vom calcula cu formula:

$$\mathcal{A} = \frac{\mathcal{S}_{ABC} \cdot h}{3}$$

unde h este distanţa de la V la planul (ABC). Aria unui triunghi echilateral de latură l este dată de:

$$\mathcal{S} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4},$$

deci:

$$\mathcal{S}_{ABC} = \frac{(8\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = 48\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Atunci:

$$\mathcal{V} = \frac{48\sqrt{3}\cdot 10}{3} = 160\sqrt{3}\ (\text{cm}^3).$$

7.3[M]. Un triunghi dreptunghic ABC are catetele de lungimi $AB=3$m și $AC = 4$m. În A avem o perpendiculară pe planul triunghiului, pe care se consideră un segment AV de lungime 2,4 m. Să se afle:

a) volumul tetraedrului $VABC$;

b) aria totală a tetraedrului $VABC$;

c) măsura unghiului plan al diedrului format de fața VBC și planul triunghiului ABC.

R. a) Volumul tetraedrului $VABC$ este dat de:

$$\mathcal{V}_{VABC} = \frac{\mathcal{S}_{ABC}\cdot VA}{3}.$$

Dar:

$$\mathcal{S}_{ABC} = \frac{AB\cdot AC}{2} = \frac{3\cdot 4}{2}\,\text{m}^2 = 6\ (\text{m}^2).$$

deci:

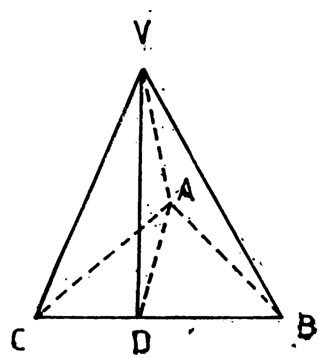
$$\mathcal{V}_{VABC} = \frac{6\cdot 2{,}4}{3} = 4{,}8\ (\text{m}^3).$$

b) Aria totală este dată de:

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{S}_{ABC} + \mathcal{S}_{VAB} + \mathcal{S}_{VAC} + \mathcal{S}_{VBC}.$$

Să considerăm dr. $AD \perp$ dr. BC. Din teorema celor trei perpendiculare rezultă dr. $VD \perp$ $\perp$ dr. BC. În triunghiul ABC ($\hat{A}$ are măsura de 90°), cum ipotenuza BC are lungimea 5 m, lungimea înălțimii AD este dată de formula:

$$AD = \frac{AB\cdot AC}{BC} = \frac{3\cdot 4}{5} = 2{,}4\ (\text{m}).$$



Apoi, în triunghiul VAD ($\widehat{VAD}$ de măsură de 90°) avem:

$$VD = \sqrt{AD^2 + VA^2} = 2{,}4\sqrt{2}\ (\text{m}).$$

Deci:

$$\mathcal{S}_{VBC} = \frac{VD\cdot BC}{2} = \frac{2{,}4\sqrt{2}\cdot 5}{2} = 6\sqrt{2}\ (\text{m}^2).$$

Apoi:

$$\mathcal{S}_{ABC} = 6\ \text{m}^2;\ \mathcal{S}_{VAB} = \frac{VA\cdot AB}{2} = 3{,}6\ (\text{m}^2);\quad \mathcal{S}_{VAC} = \frac{VA\cdot AC}{2} = 4{,}8\ (\text{m}^2).$$

Deci:

$$\mathcal{A}_t = (6 + 3{,}6 + 4{,}8 + 6\sqrt{2})\ \text{m}^2 = 6(2{,}4 + \sqrt{2})\ \text{m}^2.$$

c) Cum dr. $VD \perp$ dr. BC şi dr. $AD \perp$ dr. BC, avem:

$$\sphericalangle VDA \equiv \sphericalangle (VBC,\ ABC).$$

$$\operatorname{tg} \widehat{VDA} = \frac{VA}{AD} = \frac{2,4}{2,4} = 1.$$

Deci $\sphericalangle (VBC,\ ABC)$ are măsura de 45°.

7.4[M]. Tetraedrul $VABC$ are faţa ABC un triunghi isoscel ($AB = AC$), iar piciorul perpendicularei din V pe planul (ABC) este punctul A. Ştiind că $AB = AC = 5$m, $BC = 6$ m şi $AV = 3$ m, să se afle aria totală şi volumul tetraedrului.

R. Volumul tetraedrului este dat de:

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{S}_{ABC} \cdot VA}{3}.$$

Fie dr. $AD \perp$ dr. BC, şi cum dr. $VA \perp (ABC)$, avem dr. $VD \perp$ dr. BC. Cum ABC este triunghi isoscel şi dr. $AD \perp$ dr. BC, avem $(BD) \equiv (DC)$. Astfel, în triunghiul ABD, ($\hat{D}$ are măsura de 90°):

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4\ (\text{m}).$$

Deci:

$$\mathcal{V} = \frac{\dfrac{BC \cdot AD}{2} \cdot VA}{3} = 12\ (\text{m}^3).$$

Aria totală este dată de:

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{S}_{ABC} + \mathcal{S}_{VAB} + \mathcal{S}_{VAC} + \mathcal{S}_{VBC}.$$

Dar $\mathcal{S}_{VAB} = \dfrac{AB \cdot AV}{2}$; $\mathcal{S}_{VAC} = \dfrac{AC \cdot AV}{2}$; $\mathcal{S}_{VBC} = \dfrac{BC \cdot VD}{2}$.

Pe VD îl vom determina din triunghiul dreptunghic VAD ($\hat{A}$ are măsura de 90°):

$$VD = \sqrt{AD^2 + VA^2} = 5\ (\text{m}).$$

Deci, aria totală este:

$$\mathcal{A}_t = \frac{15}{2} + \frac{15}{2} + \frac{30}{2} + \frac{24}{2} = 42\ (\text{m}^2).$$

7.5[PO]. Muchiile laterale ale unei piramide $[VABC]$ au lungimea de 52. Baza este un triunghi cu laturile de lungimi $20\sqrt{2}$, $20\sqrt{3}$ şi $10\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$. Să se afle: a) lungimea înălţimii piramidei; b) măsura unghiului dintre muchiile laterale şi planul bazei; c) măsura unghiurilor diedre determinate de bază şi feţele laterale.

R. a) Vom folosi faptul că înălţimea piramidei are piciorul în centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC. Fie R lungimea razei cercului circumscris triunghiului de bază ale cărui laturi au lungimile date în enunţ. Din relaţia $R = \frac{abc}{4\mathcal{S}}$ găsim $R = 20$ (unde a, b, c reprezintă lungimile laturilor triunghiului, iar aria). Înălţimea va avea atunci lungimea :

$$h = \sqrt{VA^2 - R^2} = 48.$$

b) Muchiile laterale fac unghiuri congruente cu planul bazei şi fie φ măsura lor comună.

Atunci $\cos \varphi = \frac{R}{VA} = \frac{5}{13}$.

c) Fie h_1, h_2, h_3 lungimile înălţimilor feţelor laterale şi φ_1, φ_2, φ_3 măsurile unghiurilor făcute de feţele laterale cu planul bazei. Atunci avem :

$$h_1 = 2\sqrt{626}\,;\ h_2 = 2\sqrt{601}\,;\ h_3 = 2\sqrt{626 - 25\sqrt{3}}$$

şi :

$$\sin \varphi_1 = \frac{h}{h_1} = \frac{24}{\sqrt{626}}\,;\ \sin \varphi_2 = \frac{h}{h_2} = \frac{24}{\sqrt{601}}\,;\ \sin \varphi_3 = \frac{h}{h_3} = \frac{24}{\sqrt{626 - 25\sqrt{3}}}.$$

7.6^M. Tetraedrul $VABC$ are faţa ABC un triunghi echilateral, iar distanţa de la V la planul ABC este de 8 cm. Ştiind că raza cercului circumscris triunghiului ABC este $R = 4\sqrt{3}$ cm să se afle volumul tetraedrului.

R. Volumul tetraedrului este :

$$\mathcal{V}_{VABC} = \frac{\mathcal{S}_{ABC} \cdot h}{3}$$

unde h este distanţa de la V la planul (ABC). În funcţie de raza cercului circumscris, aria triunghiului are expresia :

$$\mathcal{S}_{ABC} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3 \cdot 16 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}\,(\text{cm}^2).$$

Atunci, volumul tetraedrului este :

$$\mathcal{V}_{VABC} = \frac{36\sqrt{3} \cdot 8}{3} = 96\sqrt{3}\,(\text{cm}^3).$$

7.7^M. Cunoscînd latura „a" a unui tetraedru regulat, să se calculeze aria totală şi volumul tetraedrului.

R. Volumul tetraedrului $VABC$ se calculează cu relaţia :

$$\mathcal{V}_{VABC} = \frac{\mathcal{S}_{ABC} \cdot VO}{3}$$

unde O este piciorul perpendicularei din V pe planul (ABC). Cum triunghiul ABC este echilateral :

$$\mathcal{S}_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Folosind proprietatea că oblicele congruente duse din V au proiecţii congruente, obţinem că O, piciorul perpendicularei din V pe (ABC), se află la egală distanţă de A, B şi C, deci O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Cum ABC este echilateral, centrul cercului circumscris, centrul de greutate şi ortocentrul coincid. Deci, de exemplu:

$$OA = \frac{2}{3} AA'$$

unde A' este piciorul perpendicularei din A' pe dr. BC,
sau:

$$OA = \frac{2}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Ca o observaţie, OA este lungimea R a razei cercului circumscris triunghiului echilateral cu latura de lungime a. Avem relaţia:

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

sau:

$$a = R\sqrt{3}.$$

Lungimea înălţimii tetraedrului, VO, este, din triunghiul dreptunghic VOA:

$$VO = \sqrt{VA^2 - OA^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

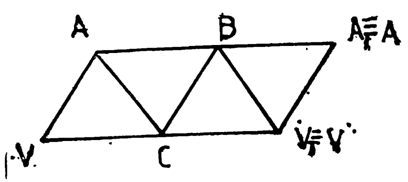
Deci:

$$\mathcal{V}_{VABC} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

şi:

$$\mathcal{A}_t = 4\mathcal{S}_{ABC} = 4\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}.$$

7.8[M]. Găsiţi o desfăşurare a unui tetraedru regulat astfel încît fiecare faţă să aibă cel mult două laturi comune cu o altă faţă. Arătaţi că, în acest caz, două din laturile poligonului obţinut sînt paralele şi congruente.



R. O desfăşurare a unui tetraedru $VABC$, cerută, este cea din figură.

Într-adevăr, cum unghiurile BAC şi ACV sînt congruente, avem dr. $AB \parallel$ dr. VC, iar din congruenţa unghiurilor A_1BV_1 şi BV_1C rezultă şi dr. $CV_1 \parallel$ dr. A_1B. Cum:

$$m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{CBV_1}) + m(\widehat{V_1BA_1}) = 180°,$$

fiecare din unghiurile de mai sus fiind cu măsura de 60°, urmează că dr. $AA_1 \parallel$ dr. VV_1. În plus, toate triunghiurile din figură sînt echilaterale şi congruente; se obţine:

$$(VV_1) \equiv (AA_1).$$

7.9[M]. Fie $ABCD$ un tetraedru şi A', B', C', D' centrele de greutate ale feţelor opuse lui A, B, C, D. Să se arate că dr. AA', dr. BB', dr. CC' şi dr. DD' sînt concurente într-un punct G.

R. Fie (AM), (AN), (AP) medianele corespunzătoare feţelor ABC, ACD, ABD. Cum punctele A', B', C', D' împart medianele DM, AN, AP, AM în raportul:

$$\frac{AD'}{AM} = \frac{AB'}{AN} = \frac{AC'}{AP} = \frac{DA'}{DM} = \frac{2}{3}$$

şi:

$$\frac{NB'}{AN} = \frac{NA'}{NB} = \frac{1}{3};$$

$$\frac{MD'}{MA} = \frac{MA'}{MD} = \frac{1}{3};$$

$$\frac{PC'}{PA} = \frac{PA'}{PC} = \frac{1}{3},$$

rezultă următoarele asemănări de triunghiuri:

$$(NA'B') \sim (NBA);$$

$$(MA'D') \sim (MDA);$$

$$(PA'C') \sim (PCA),$$

obţinînd şi relaţiile:

dr. $A'B' \parallel$ dr. AB; dr. $A'D' \parallel$ dr. AD; dr. $A'C' \parallel$ dr. AC.

Dreptele AA' şi BB' sînt concurente într-un punct G, AA' şi DD' într-un punct G_1, AA' şi CC' într-un punct G_2. Vom arăta că:

$$G \equiv G_1 \equiv G_2.$$

Într-adevăr, triunghiurile ABG şi $A'B'G$ sînt asemenea (au toate unghiurile congruente), de unde:

$$\frac{A'G}{AG} = \frac{B'G}{BG} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{3} \qquad (1)$$

Triunghiurile ADG_1 şi $A'D'G_1$ sînt asemenea, şi avem:

$$\frac{A'G_1}{AG_1} = \frac{D'G_1}{DG_1} = \frac{A'D'}{AD} = \frac{1}{3} \qquad (2)$$

Triunghiurile ACG_2 şi $A'C'G_2$ sînt asemenea, deci:

$$\frac{A'G_2}{AG_2} = \frac{C'G_2}{CG_2} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{1}{3} \qquad (3)$$

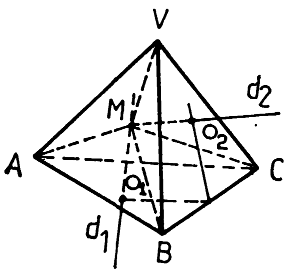
Din relaţiile (1), (2), (3), obţinem:

$$\frac{A'G}{AG} = \frac{A'G_1}{AG_1} = \frac{A'G_2}{AG_2} = \frac{1}{3}$$

Dacă punctele G, G_1, G_2 ar fi distincte ar rezulta că pe segmentul AA' există mai mult decît un punct, care să împartă acest segment într-un raport dat, fals. Deci punctele G, G_1 şi G_2 coincid, adică:

$$\text{dr.}\, AA' \cap \text{dr.}\, BB' \cap \text{dr.}\, CC' \cap \text{dr.}\, DD' = \{G\}\,.$$

7.10[M]. Să se arate că perpendicularele în centrele cercurilor circumscrise fețelor unui tetraedru sînt concurente.



R. Fie $VABC$ un tetraedru, O_1, O_2, O_3, O_4 centrele cercurilor circumscrise fețelor (ABC), (VBC), (VAC), (VAB) şi d_1, d_2, d_3, d_4 perpendicularele în O_1, O_2, O_3, O_4.

S-a demonstrat anterior că orice punct de pe dreapta d_1 (respectiv d_2, d_3, d_4) este egal depărtat de vîrfurile triunghiului ABC (respectiv, VBC, VAC, VAB). Să considerăm de exemplu, dreptele d_1 şi d_2. Aceste drepte sînt incluse în planul mediator al segmentului BC. Atunci d_1 şi d_2 sînt concurente şi fie M punctul lor de concurență. Atunci avem relațiile:

$$(MA) \equiv (MB) \equiv (MC) \qquad (M \in d_1) \qquad (1)$$

$$(MB) \equiv (MC) \equiv (MV) \qquad (M \in d_2) \qquad (2)$$

Relațiile (1) şi (2) ne dau congruențele:

$$(MA) \equiv (MB) \equiv (MV) \qquad (1')$$

$$(MA) \equiv (MC) \equiv (MV) \qquad (2')$$

Relația (1') arată că $M \in d_4$, deoarece M este egal depărtat de vîrfurile triunghiului VAB, iar relația (2') arată că M este egal depărtat de vîrfurile triunghiului VAC, adică $M \in d_3$.

Deci
$$M \in d_1 \cap d_2 \cap d_3 \cap d_4,$$
adică perpendicularele considerate sînt concurente.

7.11[PO]. Cîte plane egal depărtate de vîrfurile unui tetraedru există?

R. Fie $VABC$ un tetraedru. Vom folosi proprietatea: „dacă un plan conține mijlocul unui segment, atunci capetele segmentului sînt egal depărtate de plan".

Atunci să considerăm, de exemplu, punctele M, N, P, mijloacele muchiilor VA, VB, VC şi fie planul (MNP). Cum (MNP) conține M, mijlocul lui $[VA]$, avem:

$$d(V, (MNP)) = d(A, (MNP))$$

unde prin $d(X, \alpha)$ am notat distanța de la punctul X la planul α.

La fel:

$$d(V, (MNP)) = d(B, MNP))$$

şi:

$$d(V, (MNP)) = d(C, (MNP)).$$

Deci:

$$d(V, (MNP)) = d(A, (MNP)) = d(B, (MNP)) = d(C, (MNP))$$

adică planul (MNP) este egal depărtat de vîrfurile tetraedrului:

Dar există patru astfel de plane ce conțin mijloacele muchiilor concurente în același vîrf. Aceste plane sînt paralele cu fețele tetraedrului.

Să considerăm apoi planele ce conțin mijloacele a două muchii concurente în același vîrf şi mijlocul unei muchii ce nu conține vîrful comun al celorlalte două muchii considerate.

Fie, de exemplu Q mijlocul lui (VA), R mijlocul lui (VB), S mijlocul lui (AC). Planul (QRS) determinat de cele trei puncte conţine mijlocul lui VA, deci:

$$d(V, (QRS)) = d(A, (QRS)),$$

mijlocul lui VB:

$$d(V, (QRS)) = d(B, (QRS))$$

şi mijlocul lui AC:

$$d(A, (QRS)) = d(C, (QRS))$$

şi deci, (QRS) se află la egală distanţă de vîrfurile tetraedrului. Un astfel de plan este paralel cu muchiile opuse VC şi AB. Deoarece există într-un tetraedru trei perechi de muchii opuse, există trei astfel de plane. Deci în total, există şapte plane egal depărtate de vîrfurile tetraedrului.

7.12^{M}. Dacă într-un tetraedru cu toate feţele triunghiuri dreptunghice avem într-un vîrf două unghiuri drepte, atunci mai există un vîrf al tetraedrului în care avem două unghiuri drepte.

R. Fie tetraedrul $VABC$ şi să presupunem, de exemplu, că, în vîrful V, avem:

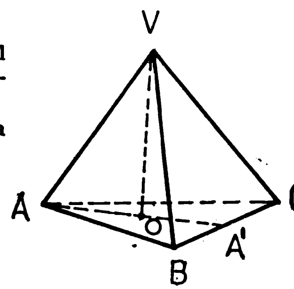
$$m(\widehat{AVB}) = m(\widehat{BVC}) = 90^\circ.$$

Atunci dr. $BV \perp$ dr. AV şi dr. $BV \perp$ dr. VC deci dr. $BV \perp (AVC)$. Presupunem că în faţa VAC, avem $m(\widehat{VAC}) = 90^\circ$. Atunci, cum dr. $VB \perp (AVC)$ şi dr. $VA \perp$ dr. AC, conform teoremei celor trei perpendiculare, dr. $BA \perp$ dr. AC, deci în vîrful A se întîlnesc două unghiuri drepte. Pentru o altă alegere, demonstraţia se face analog.

7.13^{M}. Un tetraedru are feţele triunghiuri isoscele cu unghiul de la vîrf (format de laturile congruente) de măsură 30° şi muchia laterală de lungime a. Să se afle volumul tetraedrului.

R. Fie $VABC$ tetraedrul considerat în care triunghiurile VAB, VAC, VBC sînt isoscele şi congruente, deci:

$$(AB) \equiv (AC) \equiv (BC), \ (AB = l)$$



adică baza este un triunghi echilateral, şi atunci O, piciorul înălţimii din V, coincide cu centrul de greutate al triunghiului ABC.

În triunghiul isoscel VAB, $((VA) \equiv (VB))$ vom calcula lungimea laturii $[AB]$:

$$AB = \sqrt{VA^2 + VB^2 - 2VA \cdot VB\cos 30^\circ} =$$

$$= \sqrt{a^2 + a^2 - 2a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = a\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Calculăm lungimea înălţimii din triunghiul dreptunghic VOA ($\hat{O}$ are măsura de 90°). Dar, cum O este centru de greutate al triunghiului ABC:

$$AO = \frac{2}{3}AA' = \frac{2}{3} \cdot \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}}{3}.$$

Deci :

$$VO = \sqrt{VA^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{3 + 3\sqrt{3}}}{3}.$$

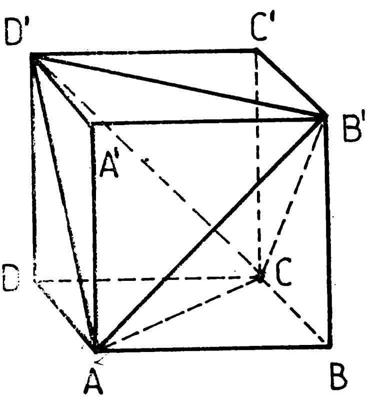
Astfel, volumul tetraedrului este :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{A} \cdot VO = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2(2 - \sqrt{3})\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3 + \sqrt{3}}}{3}.$$

7.14^{PO}. Din paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu dimensiunile bazei de 20 cm şi 10 cm, „tăiem" colţurile $AB'D'A'$, $ABCB'$, $ACDD'$ şi $CC'D'B'$. Obţinem astfel corpul $ACD'B'$ cu volumul 2000 cm^3. Aflaţi :

a) înălţimea paralelipipedului dreptunghic ;

b) distanţa de la vîrful D' la planul ACB'.



R. a) Observăm că cele patru piramide „tăiate" au acelaşi volum. Dacă notăm înălţimea paralelipipedului cu x, avem :

$$2000 = 20 \cdot 10 \cdot x - 4 \cdot \frac{20 \cdot 10}{2} \cdot x \cdot \frac{1}{3}$$

de unde, înălţimea paralelipipedului este 30 cm.

b) Volumul piramidei $ACB'D'$ este o treime din produsul dintre aria triunghiului ACB' şi înălţimea corespunzătoare, deci tocmai distanţa la punctul D' la planul ACB'. Calculînd, obţinem :

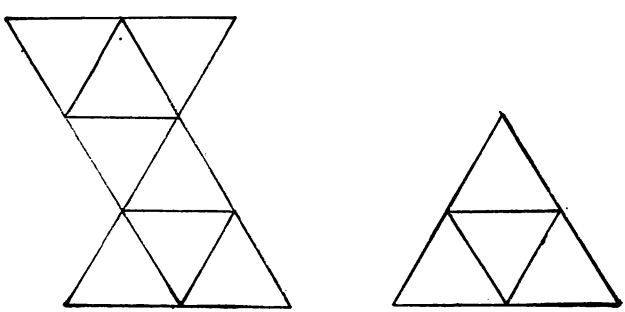
$$CA = 10\sqrt{5} \text{ cm}, \ AB' = 10\sqrt{13} \text{ cm}, \ B'C = 10\sqrt{10} \text{ cm}.$$

Atunci, aria triunghiului ACB' este 350 cm^2.

Distanţa de la punctul D' la planul triunghiului ACB' este :

$$D'M = \frac{2000 \cdot 3}{350} \text{ cm}.$$

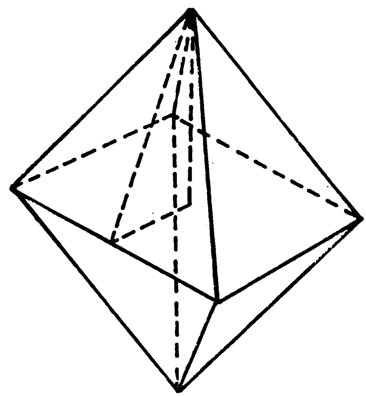
7.15^{PO}. Din cele 12 triunghiuri echilaterale cu latura de lungime l din figura alăturată confecţionăm corpuri în felul următor : din patru



triunghiuri echilaterale construim un tetraedru regulat, iar din cele opt triunghiuri echilaterale confecţionăm un octaedru.

a) confecţionaţi corpurile din hîrtie cartonată.

b) Aflaţi raportul ariilor şi volumelor lor.



R. a) Desenăm corpurile obţinute.

b) Raportul ariilor este $\frac{1}{2}$ şi se poate afla fără a calcula ariile corpurilor.

Înălţimea tetraedrului este $\frac{l\sqrt{6}}{3}$, deci volumul tetraedrului este $\mathscr{V} = \frac{l^3\sqrt{2}}{12}$.

Înălţimea octaedrului este $\frac{l\sqrt{2}}{2}$ deci volumul octaedrului este $\mathscr{V} = \frac{l^3\sqrt{2}}{3}$.

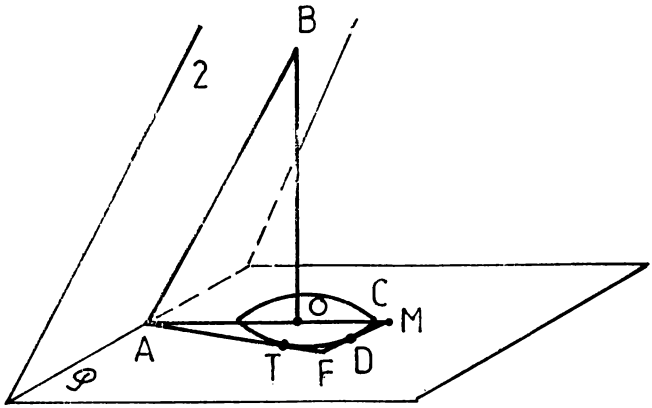
Raportul volumelor lor este 1 :4.

7.16[PO]. Se dă diedrul de 60° format de semiplanele $\mathscr{P}$ şi $\mathscr{Q}$. În planul $\mathscr{P}$ se ia cercul cu raza $R=4$ cm şi centrul O situat la distanţa $AO = 8$ cm de muchia diedrului. Perpendiculara ridicată în O pe planul $\mathscr{P}$ intersectează planul $\mathscr{Q}$ în B. Prelungirea lui AO intersectează cercul în C şi se ia pe această prelungire segmentul $OM = 8$ cm. Din punctul M se construieşte tangenta MD la cerc, care intersectează tangenta AT la acelaşi cerc în punctul F. Aflaţi :

a) lungimile segmentelor FD şi TD;

b) perimetrul triunghiului BTM,

c) volumul piramidei $BATMD$.



R. a) Din triunghiul ODM aflăm $DM = 4\sqrt{3}$ cm, iar din triunghiul OFM, $FM = \frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm. Lungimea lui FD este $FD = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm. Deoarece $\frac{FD}{FM} = \frac{TD}{AM}$, obţinem $TD = 4$ cm.

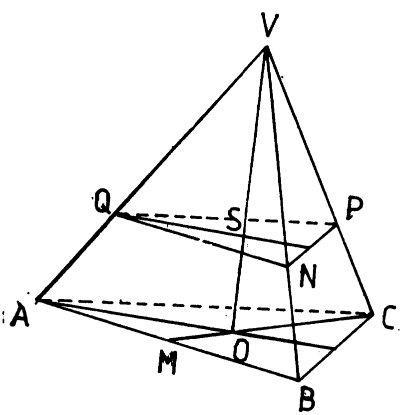
b) Din triunghiul AOB avem : $OB = 8\sqrt{3}$ cm ; din triunghiul BOT avem : $BT = 4\sqrt{13}$ cm. În triunghiul ATO aplicăm teorema catetei și obținem $TO^2 = GO \cdot AO$, de unde $GO = 2$ cm, GT este egal cu $2\sqrt{3}$ cm și atunci TM este $4\sqrt{7}$ cm. Perimetrul triunghiului BTM este $4(4 + \sqrt{7} + \sqrt{13})$ cm. (Punctul G este proiecția lui T pe AO).

c) Volumul piramidei este :

$$V = \frac{(16+4)\cdot 2\sqrt{3}}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} = 160 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

7.17[PO]. Într-o piramidă triunghiulară regulată muchia bazei și înălțimea sînt invers proporționale cu numerele $\sqrt{3} : 9$ și $1 : 2$, suma lor fiind $8(3\sqrt{3} + 2)$ cm. Aflați :

a) lungimile muchiei bazei și a înălțimii ;
b) lungimile apotemei bazei și a apotemii piramidei ;
c) suma lungimilor tuturor muchiilor ;
d) aria totală și volumul piramidei ;
e) la ce distanță de bază trebuie secționată piramida, cu un plan paralel cu planul bazei, pentru a obține două corpuri cu același volum.



R. Desenăm piramida.

a) Aflăm lungimile muchiei bazei și a înălțimii din șirul de rapoarte egale :

$$\frac{AB}{\frac{9}{\sqrt{3}}} = \frac{VO}{\frac{2}{1}} = \frac{8(3\sqrt{3}+2)}{3\sqrt{3}+2}$$

de unde

$$AB = 24\sqrt{3} \text{ cm}, \quad VO = 16 \text{ cm}.$$

b) Triunghiul ABC fiind echilateral cu latura $24\sqrt{3}$, raza cercului circumscris triunghiului este de 24 cm. Lungimea apotemei OM este jumătatea lungimii razei, deci este 12 cm.

Lungimea apotemei VM o calculăm din triunghiul VOM cu teorema lui PITAGORA :

$$VO^2 + OM^2 = VM^2$$

de unde $VM = 20$ cm.

c) Lungimea muchiei laterale se află din triunghiul VMB tot cu teorema lui PITAGORA :

$$VB^2 = VM^2 + MB^2$$

deci

$$VB = 8\sqrt{13} \text{ cm}.$$

Suma lungimilor muchiilor este :

$$3 \cdot (24\sqrt{3} + 8\sqrt{13}) = 24 \cdot (3\sqrt{3} + \sqrt{13}) \text{ (cm)}.$$

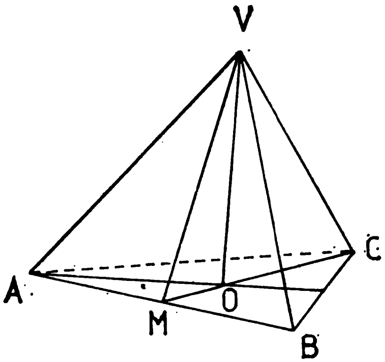
d) Aria totală a piramidei este :

$$\mathcal{A} = \frac{(24\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{24\sqrt{3}\cdot 20}{2} = 1152\sqrt{3} \text{ (cm)}^2.$$

Volumul este :

$$\mathcal{V} = 432\sqrt{3} \cdot 16 \cdot \frac{1}{3} = 2304\sqrt{3}\ (\mathrm{cm}^3).$$

e)



Aflăm distanța SO.

Avem :

$$\frac{VS}{VO} = \frac{QN}{AB} = k$$

de unde

$$VS = k \cdot VO \text{ și } QN = k \cdot AB.$$

Volumul piramidei $VNPQ$ este

$$\mathcal{V} = k^3 \cdot \frac{AB^2 \cdot VO \cdot \sqrt{3}}{12};$$

Volumul trunchiului de piramidă $ABCQNP$ este $(1 - k^3) \cdot \frac{AB^2 \cdot VO \cdot \sqrt{3}}{12}$,

deci avem : $k^3 = 1 - k^3$, de unde $k = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Deci, $VS = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot VO$, iar $SO = VO - VS$, sau :

$$SO = 16 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = 8 \cdot (2 - \sqrt[3]{4})\ (\mathrm{cm}).$$

7.18[PO]. Dreptunghiul $ABCD$ are laturile în lungime respectiv de $AB=40$ cm și $BC=30$ cm. Pe planul dreptunghiului în A, în D, în C se ridică perpendiculare astfel încît $AM=20$ cm, $DN=10$ cm, $CP = 30$ cm.

a) Arătați că $MB = NP$;

b) Aflați perimetrul triunghiului NBP;

c) Aflați aria triunghiului MBN;

d) Calculați volumul corpului (cu vîrfurile) $ABCDNMP$, știind că NB este muchia corpului și MP nu este muchie a corpului.

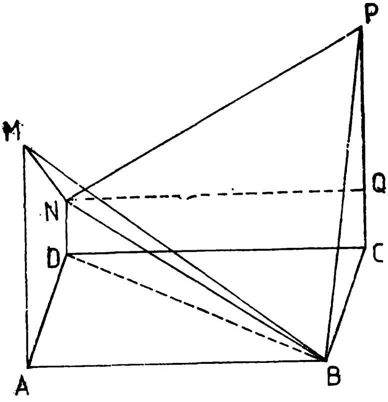
R. a) Triunghiul ABM este congruent cu triunghiul NQP ($AM = QP = 20$ cm, $AB = QN=40$ cm, $m(\hat{A})=m(\hat{Q})=90°$). Atunci ipotenuzele triunghiurilor sînt congruente, deci $MB = PN$.

b) Aflăm perimetrul triunghiului NBP. Avem :

$$\mathcal{P} = NB + BP + NP = 10\sqrt{26} + 30\sqrt{2} + 20\sqrt{5} = 10(\sqrt{26} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{5})\ (\mathrm{cm}).$$

c) Aria triunghiului MBN o calculăm cu ajutorul formulei lui HERON:

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$



unde :

$$p = 5\,(2\sqrt{5} + \sqrt{26} + \sqrt{10})\,;\; p - a = 5\,(\sqrt{26} + \sqrt{10} - 2\sqrt{5})\,;\; p - b = 5(2\sqrt{5} - \sqrt{26} + \sqrt{10})\,;$$

$$p - c = 5\,(2\sqrt{5} + \sqrt{26} - \sqrt{10}).$$

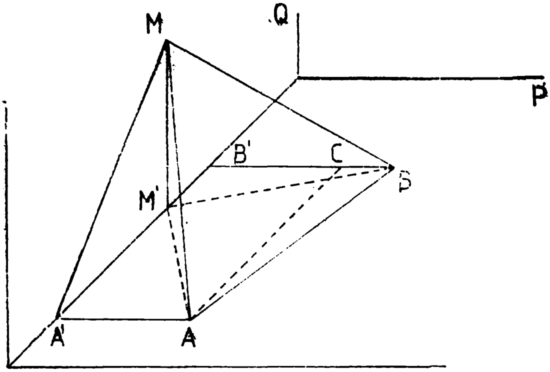
Înlocuind în formulă obţinem : $\mathcal{A} = 700\ \text{cm}^2$.

d) Corpul a cărui volum se cere este format din două piramide cu faţa laterală NDB comună, cu vîrful în B şi cu bazele $ADMN$ respectiv $DCPN$.

Volumul corpului este suma volumelor celor două piramide. Avem :

$$\mathcal{V} = \frac{(10 + 30)\cdot 40}{2}\cdot 30\cdot\frac{1}{3} + \frac{(20 + 10)\cdot 30}{2}\cdot 40\cdot\frac{1}{3} = 14000\ (\text{cm}^3).$$

7.19. Se dă diedrul drept format de semiplanele $\mathcal{P}$ şi $\mathcal{Q}$. Se iau în planul $\mathcal{P}$ punctele A şi B astfel încît distanţele de la ele la muchia diedrului să fie $AA' = 4$ cm, $BB' = 7$ cm, iar $A'B' = 4$ cm. În planul $\mathcal{Q}$ fie punctul M, situat la distanţa $MM' = 5$ cm de muchia diedrului, iar $M'B' = 1$ cm astfel încît $M' \in (A'B')$. Se cere : a) lungimea segmentului AB; b) măsura unghiului $M'AB$; c) aria totală şi volumul piramidei cu baza $ABB'A'$ şi cu vîrful în M.



R. a) AB se află din trapezul dreptunghic $A'ABB'$. Fie dr. AC $\perp$ dr. BB' şi obţinem : $AC = 4$ cm, $BC = 3$ cm, deci în triunghiul dreptunghic ABC ipotenuza $AB = 5$ cm.

b) Deoarece $M'A = 5$ cm (din triunghiul dreptunghic $A'AM$) şi $M'B = 5\sqrt{2}$ cm (din triunghiul dreptunghic $M'BB'$), observăm că $M'A$, $M'B$ şi AB satisfac condiţiile teoremei lui PITAGORA, deci unghiul $M'AB$ este unghi drept.

c) Aria totală a piramidei este suma ariilor triunghiurilor $A'AM$, ABM, $BB'M$, $A'B'M$ şi a trapezului dreptunghic $A'ABB'$. Avem

$$\mathcal{A} = \frac{(4 + 7)\cdot 4}{2} + \frac{4\cdot 5}{2} + \frac{4\cdot\sqrt{34}}{2} + \frac{5\cdot 5\sqrt{2}}{2} + \frac{7\cdot\sqrt{26}}{2} =$$

$$= 32 + \frac{\sqrt{2}}{2}\,(4\sqrt{17} + 25 + 7\sqrt{13})\ (\text{cm}^2).$$

Volumul piramidei este :

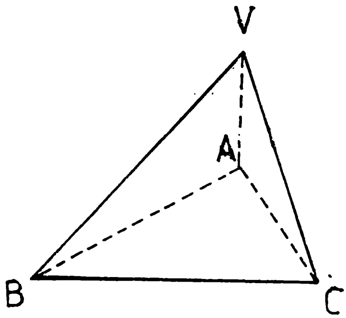
$$\mathcal{V} = \frac{22\cdot 5}{3} = \frac{110}{3}\ (\text{cm}^3).$$

7.20[PO]. Să se arate că triplul ariei totale a unui tetraedru este mai mic decît suma pătratelor muchiilor.

R. Fie $VABC$ un tetraedru oarecare. Notăm cu $\mathscr{A}_l$ aria laterală şi avem:

$$\mathscr{A}_l = \mathscr{S}_{VAB} + \mathscr{S}_{VBC} + \mathscr{S}_{VCA} = \frac{VA \cdot VB \sin \widehat{AVB}}{2} + \frac{VB \cdot VC \cdot \sin \widehat{BVC}}{2} + $$

$$+ \frac{VC \cdot VA \sin \widehat{CVA}}{2}.$$



Dar cum $\sin \widehat{AVB} \leqslant 1$, $\sin \widehat{BVC} \leqslant 1$, $\sin \widehat{CVA} \leqslant 1$ obţinem:

$$\mathscr{A}_l \leqslant \frac{VA \cdot VB + VB \cdot VC + VC \cdot VA}{2}. \qquad (1)$$

De asemenea, $VA \cdot VB + VB \cdot VC + VC \cdot VA \leqslant$ $\leqslant VA^2 + VB^2 + VC^2$, deoarece din $(VA - VB)^2 +$ $+ (VB - VC)^2 + (VC - VA)^2 \geqslant 0$, rezultă după cîteva calcule inegalitatea de mai sus. Deci:

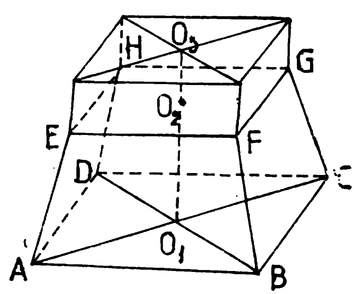
$$\mathscr{A}_l \leqslant \frac{VA^2 + VB^2 + VC^2}{2}. \qquad (2)$$

Însumînd (2) cu inegalităţile analoage pentru toate vîrfurile, obţinem inegalitatea cerută în enunţ cu semnul $<$, deoarece nu putem avea în toate vîrfurile 3 unghiuri drepte.

7.21. Un soclu are forma corpului din figura alăturată. Dimensiunile soclului sînt: $AB = 4$ m, $BC = 3$ m, $AE = BF = CG = DH = \frac{\sqrt{17}}{2}$ m, $O_1O_2 = 2 \cdot O_2O_3$ şi $\frac{EF}{AB} = \frac{FG}{BC} = \frac{4}{5}$. Aflaţi volumul soclului.

R. Din:

$$\frac{EF}{AB} = \frac{FG}{BC} = \frac{4}{5}$$



obţinem $EF = 3{,}2$ m, $FG = 2{,}4$ m.
Aflăm înălţimea trunchiului de piramidă:

$$O_1O_2^2 = AE^2 - \left(\frac{AC - EG}{2}\right)^2,$$

de unde $O_1O_2 = 2$ m şi atunci $O_2O_3 = 1$ m.
Aflăm volumul soclului:

$$\mathscr{V} = \frac{2}{3}(4 \cdot 3 + 3{,}2 \cdot 2{,}4 + \sqrt{12 \cdot 7{,}68}) + 3{,}2 \cdot 2{,}4 \cdot 1 = 27{,}2 \text{ (m)}.$$

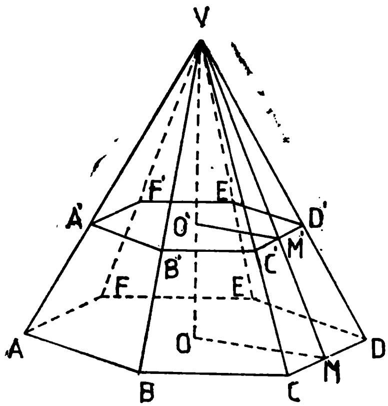
7.22. **Muchiile bazelor unui trunchi de piramidă hexagonală regulată sînt soluţiile sistemului :**

$$\begin{cases}3x - 2y = 18\\2x - 3y = 2\end{cases}$$

Planul unei feţe laterale formează cu planul bazei mari un unghi diedru de 60°. Aflaţi :

a) înălţimea, apotema şi muchia laterală a trunchiului de piramidă ;

b) volumul piramidei din care face parte trunchiul de piramidă dat ;



R. Rezolvăm sistemul :

$$\begin{cases}3x - 2y = 18\\2x - 3y = 2\end{cases}$$

şi obţinem $x = 10$, $y = 6$.
Deci muchia bazei mari este 10, iar muchia bazei mici este 6.

a) Aflăm apotemele bazelor: $OM = 5\sqrt{3}$, $O'M' = 3\sqrt{3}$. Calculăm înălţimea trunchiului de piramidă cu ajutorul funcţiei tangentă. Obţinem :

$$\text{tg } 60° = \frac{OO'}{2\sqrt{3}}, \text{ de unde } OO' = 6.$$

Atunci apotema trunchiului va fi : $MM' = 4\sqrt{3}$, iar muchia laterală va fi : $CC' = \sqrt{52}$ adică $CC' = 2\sqrt{13}$.

b) Aflăm înălţimea piramidei din care face parte trunchiul de piramidă din egalitatea rapoartelor :

$$\frac{VO'}{VO} = \frac{O'C'}{OC}$$

iar de aici, $VO' = 9$ şi deci $VO = 15$.

Aflăm volumul piramidei :

$$\mathcal{V} = 6 \cdot \frac{10^2\sqrt{3}}{4} \cdot 15 \cdot \frac{1}{3} = 750\sqrt{3}.$$

7.23. **Într-o piramidă patrulateră regulată, aria fiecărei feţe este egală cu aria bazei. Ştiind că înălţimea piramidei este a cm, aflaţi : a) suma muchiilor piramidei ; b) aria totală a piramidei.**

R. a) Dacă notăm latura bazei cu l şi apotema piramidei cu a_p, avem :

$$l^2 = \frac{l \cdot a_p}{2}, \text{ şi prin urmare apotema } VE = 2l.$$

Din triunghiul dreptunghic VOE aflăm l în funcţie de a cu ajutorul teoremei lui PITAGORA :

$$l = \frac{2a\sqrt{15}}{15}.$$

Din triunghiul VEB, deoarece $VB^2 = VE^2 + EB^2$, rezultă:

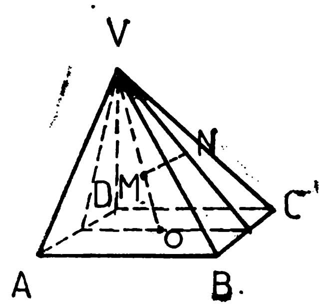
$$VB = \frac{a}{15}\sqrt{255}.$$

Suma muchiilor este:

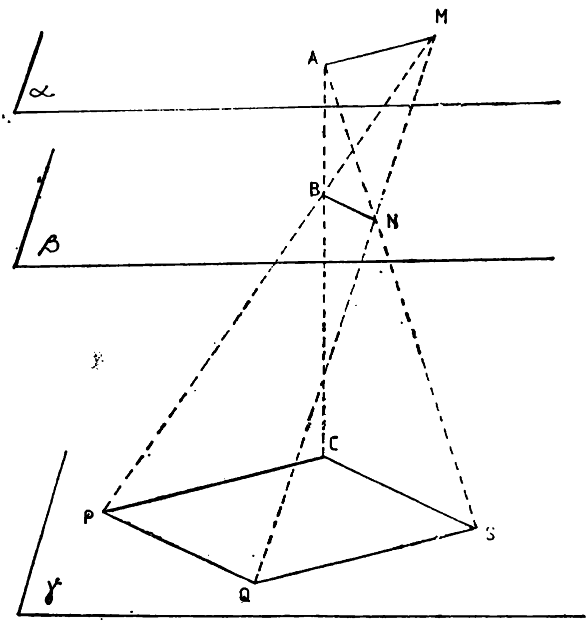
$$4 \cdot \left(\frac{2a\sqrt{15}}{15} + \frac{a}{15}\sqrt{255}\right) = \frac{4a\sqrt{15}}{15}(2 + \sqrt{17}).$$

b) Aria totală a piramidei este $5l^2$ adică:

$$5\left(\frac{2a\sqrt{15}}{15}\right)^2 = \frac{4a^2}{3}.$$

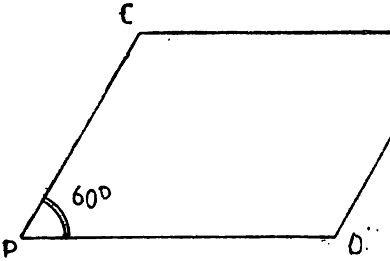


7.24. Planele α, β şi γ sînt paralele între ele. Distanţa dintre planele α şi β este $AB = 10$ cm, iar distanţa dintre planele β şi γ este $BC = 20$ cm. Luăm în planul α segmentul AM de 20 cm iar în planul β segmentul BN de 10 cm astfel încît unghiul celor două segmente să fie de 60°. Dreptele AN, MB şi MN intersectează planul γ în punctele S, P respectiv Q. Aflaţi: a) Ce fel de patrulater este patrulaterul $PQSC$; b) Aria patrulaterului $PQSC$; c) Volumul piramidei $MPQSC$.



R. a) Pentru rezolvarea problemei trebuie să ştim că două plane paralele se intersectează cu un al treilea plan după drepte paralele. Astfel dr. $BN \parallel$ dr. PQ şi dr. $BN \parallel$ dr. CS; la fel dr. $AM \parallel$ dr. PC şi dr. $AM \parallel$ dr. QS.

De aici rezultă că dr. $PQ \parallel$ dr. CS şi dr. $PC \parallel$ dr. QS, deci patrulaterul este un paralelogram.



b) Calculăm înălţimea paralelogramului care are laturile:

$$PQ = CS = 30 \text{ cm}$$

$$\left(\text{pentru că } \frac{MB}{MP} = \frac{1}{3}\right);$$

şi:

$$QS = PC = 40 \text{ cm}$$

$$\left(\text{pentru că } \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}\right).$$

Înălţimea paralelogramului este $PC \cdot \sin 60° = 20\sqrt{3}$ (cm).

Aria paralelogramului este $600\sqrt{3}$ cm².

c) Piramida $MPQSC$ are ca bază paralelogramul $PQSC$ şi ca înălţime distanţa dintre planele α şi γ.

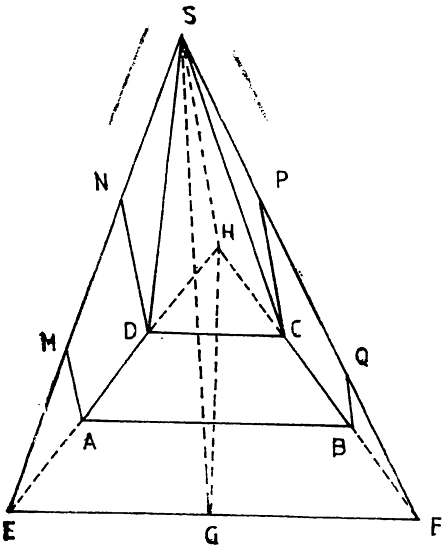
Volumul este egal cu $\frac{600\sqrt{3} \cdot 30}{3}$ cm³, adică $6000\sqrt{3}$ cm³.

7.25PO. Trapezul isoscel $ABCD$ are bazele $AB = 20$ cm, $CD = 10$ cm şi unghiul A de 60°. În vîrfurile A, C şi D se „ridică" pe planul trapezului perpendicularele $AM = 5$ cm, $CP = DN = 10$ cm. Planul determinat de punctele M, N şi P intersectează „prelungirea" laturilor DA şi CB în punctele E şi F, iar perpendiculara „ridicată" în vîrful B pe planul trapezului, în punctul Q. Dreptele MN şi QP se intersectează în punctul S. Aflaţi:

a) lungimea segmentelor AD, BQ, EF şi MS;

b) măsura unghiului diedru format de planul punctelor M, N şi P cu planul trapezului $ABCD$;

c) aria totală şi volumul corpului $SEFCD$.



R. a) $[AD]$, latura oblică a trapezului are lungimea de 10 cm. Din $DN = CP$, rezultă $AM = BQ = 5$ cm Notăm cu H proiecţia lui S pe planul trapezului. Triunghiul HEF este echilateral. Latura EH este de 30 cm deci şi $EF = 30$ cm. Din triunghiul dreptunghic EHS se obţine $ES = 15\sqrt{5}$ cm, iar MS este $\frac{2}{3}$ din ES deci $MS = 10\sqrt{5}$ cm.

b) unghiul diedru are ca măsură, măsura unghiului plan SGH. În triunghiul SGH, avem $SH = 15$ cm, $HG = 15\sqrt{3}$ cm şi:

$$\operatorname{tg} \widehat{SGH} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

deci unghiul plan corespunzător diedrului este de 30°.

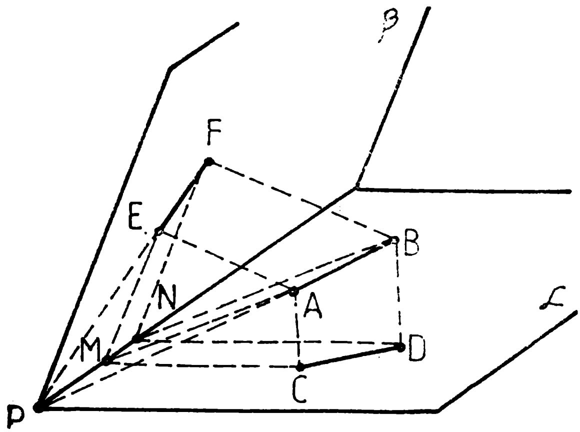
c) Aria totală a corpului este formată din suma ariilor triunghiurilor SDC, SED, SFC, SEF şi a trapezului $EFCD$. Calculînd, se obţine:

$$\mathcal{A} = 50\sqrt{3} + 150 + 150 + 200\sqrt{3} = 25(10\sqrt{3} + 12)\ (\mathrm{cm}^2).$$

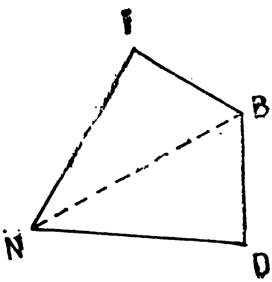
Volumul corpului este diferenţa volumelor piramidelor *SEFH* şi *SDCH*, deci:

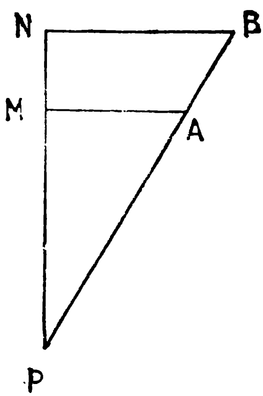
$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \cdot \frac{30^2\sqrt{3}}{4} \cdot 15 - \frac{1}{3} \cdot \frac{10^2\sqrt{3}}{4} \cdot 15 = 1000\sqrt{3}\ (\mathrm{cm}^3).$$

7.26^{PO}. Semiplanele α şi β formează un diedru de 60°. Proiecţiile segmentului AB, din spaţiu, pe feţele diedrului (α şi β), respectiv pe muchia d a diedrului sînt: (CD), (EF) şi respectiv (MN). Ştiind că $AB=a$, $BD=BF=2a$, „prelungirea" segmentului AB intersectează muchia diedrului în punctul P şi formează cu muchia d un unghi de 60°, aflaţi aria totală şi volumul corpului $PCAEM$.



a.





Patrulaterul $NDBF$ este inscriptibil. Calculăm din triunghiul dreptunghic NDB lungimea segmentului NB, şi obţinem $NB = 4a$.

Din triunghiul dreptunghic NBP avem: $PB = \frac{8a\sqrt{3}}{3}$, $PA = \frac{8\sqrt{3} - 3}{3}a$ şi $MA = \frac{8 - \sqrt{3}}{2}a$.

Calculăm $AC = a\cdot\frac{8-\sqrt{3}}{4}$, $MC = a\cdot\frac{8\sqrt{3}-3}{4}$, $MP = \frac{PA}{2} = a\cdot\frac{8\sqrt{3}-3}{6}$ şi $EC = MC = a\cdot\frac{8\sqrt{3}-3}{4}$.

Aflăm aria patrulaterului $EMCA$:

$$\mathcal{A} = \frac{EC\cdot MA}{2} = \frac{a^2}{16}(67\sqrt{3}-48);$$

Aria triunghiului PME este:

$$\mathcal{A} = \frac{PM\cdot ME}{2} = \frac{a^2}{24}(8\sqrt{3}-3)^2;$$

Aria triunghiului PEA este:

$$\mathcal{A} = \frac{PE\cdot EA}{2} = \frac{a^2}{48}(67\sqrt{3}-48)\sqrt{13};$$

Aria totală este deci:

$$\mathcal{A}_t = 2\cdot A_{PME} + 2\cdot A_{PEA} + A_{EMCA} = \frac{a^2}{48}(258 - 76\sqrt{3} + 67\sqrt{39} - 48\sqrt{13}).$$

Volumul corpului este:

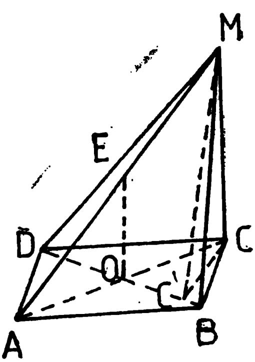
$$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{EMCA}\cdot PM : 3 = \frac{584-195\sqrt{3}}{32}a^3.$$

7.27PO. În vîrful C al dreptunghiului $ABCD$, cu dimensiunile $AB = a\sqrt{3}$ şi $BC = a$, se „ridică" perpendiculara pe planul dreptunghiului, pe care se ia un punct M astfel încît $m(\widehat{MAC}) = 30°$.

a) Să se calculeze volumul prismei care are ca bază dreptunghiul $ABCD$ şi înălţimea CM.

b) Prisma de mai sus se intersectează cu un plan ce conţine punctele B, M, D. Să se calculeze aria acestei secţiuni.

c) În centrul O, al dreptunghiului $ABCD$, se „ridică" perpendiculara pe planul său care „întîlneşte" dr. AM în E. Este triunghiul BEM dreptunghic?



R. a) Volumul prismei este:

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{ABCD}\cdot CM.$$

Avem $\mathcal{A}_{ABCD} = AB\cdot BC = a^2\sqrt{3}$. Calculăm pe CM. În triunghiul ABC, $AC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a$, deci $CM = AC\operatorname{tg}30° = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$, şi volumul prismei devine :

$$\mathcal{V} = a^2\sqrt{3} \cdot 2a \frac{\sqrt{3}}{3} = 2a^3.$$

b) Secţiunea este triunghiul BMD. Avem deci de calculat aria triunghiului BMD. Fie dr. $CC' \perp$ dr. BD. Cum dr. $MC \perp (ABCD)$, conform teoremei celor trei perpendiculare, dr. $MC' \perp$ dr. BD. Deci :

$$\mathcal{A}_{MBD} = \frac{BD \cdot MC'}{2}.$$

Dar, CC' este înălţimea corespunzătoare vîrfului C în triunghiul BCD, deci :

$$CC' = \frac{BC \cdot CD}{BD} = \frac{a\sqrt{3} \cdot a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} a,$$

şi atunci din triunghiul MCC' ($\hat{C}$ are 90°), rezultă :

$$MC' = \sqrt{CC'^2 + CM^2} = \frac{5a\sqrt{3}}{6}.$$

Astfel, aria triunghiului MBD este :

$$\mathcal{A}_{BMD} = 2a \cdot \frac{5a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5a^2\sqrt{3}}{6}.$$

c) Cum O este mijlocul lui (AC) şi dr. $OE \parallel$ dr. CM rezultă (OE) linie mijlocie în triunghiul ACM deci, $AE = EM$.

Din teorema celor trei perpendiculare, dr. $MB \perp$ dr. AB.

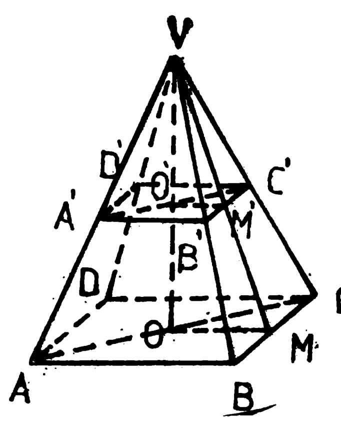
Atunci (BE) este mediană în triunghiul dreptunghic ABM şi cum $AB \neq MB$, rezultă că triunghiul BEM nu e dreptunghic

7.28. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are înălţimea de 6 cm, latura bazei mari egală cu 4/3 din înălţime şi latura bazei mici egală cu 5/8 din latura bazei mari. Să se afle :

a) volumul trunchiului de piramidă ;

b) volumul piramidei din care provine trunchiul;

c) ariile laterale ale trunchiului de piramidă şi piramidei.



R. a) Lungimile laturilor AB şi $A'B'$ sînt :

$$AB = \frac{4}{3} \cdot 6 \text{ cm} = 8 \text{ cm}; \quad A'B' = \frac{5}{8} \cdot 8 \text{ cm} = 5 \text{ cm}.$$

Volumul trunchiului este :

$$\mathcal{V} = \frac{h}{3}(AB^2 + A'B'^2 + AB \cdot A'B') = 258 \text{ (cm}^3).$$

b) Fie V vîrful piramidei din care provine trunchiul. Deoarece, notînd cu $\mathcal{A}_1$, respectiv $\mathcal{A}_2$, ariile bazei mari, respectiv mici a trunchiului :

$$\frac{\mathscr{A}_1}{\mathscr{A}_2} = \left(\frac{VO'}{VO}\right)^2$$

rezultă :

$$\frac{VO'}{VO} = \sqrt{\frac{\mathscr{A}_2}{\mathscr{A}_1}} = \frac{5}{8}.$$

De asemenea, avem relația :

$$\frac{\mathscr{V}_{VA'B'C'D'}}{\mathscr{V}_{VABCD}} = \left(\frac{VO'}{VO}\right)^3 = \frac{125}{512}, \tag{1}$$

unde $\mathscr{V}_{VA'B'C'D'}$ și $\mathscr{V}_{VABCD}$ sînt volumele piramidelor $VA'B'C'D'$ și $VABCD$.

Din relația (1) avem :

$$\frac{\mathscr{V}_{VABCD}}{\mathscr{V}_{VABCD} - \mathscr{V}_{VA'B'C'D'}} = \frac{512}{512-125}$$

sau :

$$\frac{\mathscr{V}_{VABCD}}{\mathscr{V}_{trunchi}} = \frac{512}{387}$$

deci :

$$\mathscr{V}_{VABCD} = \frac{258 \cdot 512}{387} = \frac{1024}{3}\ (\text{cm}^3).$$

c) Apotema trunchiului de piramidă este :

$$a_t = \sqrt{h^2 + (a_M - a_m)^2}$$

unde $h = 6$ (cm), $a_M = \dfrac{AB}{2} = 4$(cm), $a_m = \dfrac{A'B'}{2} = 2{,}5$ (cm). Înlocuind, obținem $a_t = \dfrac{3\sqrt{17}}{2}$ cm. Deci, ariile laterale ale trunchiului de piramidă și ale piramidei sînt :

$$\mathscr{A}_{l_{trunchi}} = \frac{4(AB + A'B')}{2} \cdot a_t = \frac{4(8+5)}{2} \cdot \frac{3\sqrt{17}}{2} = 39\sqrt{17}\ (\text{cm}^2)$$

și deoarece $\mathscr{A}_{VAB} = \mathscr{A}_{VBC} = \mathscr{A}_{VCD} = \mathscr{A}_{VDA}$, rezultă :

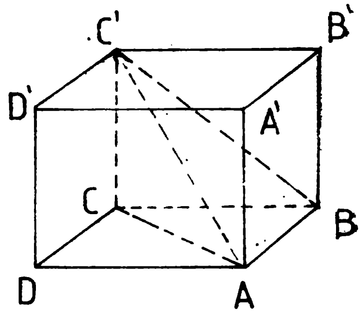
$$\mathscr{A}_{l_{piramidă}} = 4\mathscr{A}_{VBC} = 4 \cdot \frac{BC \cdot VM}{2} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 4\sqrt{17}}{2} = 64\sqrt{17}\ (\text{cm}^2).$$

7.29^M^. Se dă o prismă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$. **Latura** bazei este de 2 dm, iar diagonala AC' a prismei este de 4 dm.

a) Să se arate că triunghiul ACC' este isoscel.

b) Să se calculeze aria totală a piramidei cu vîrful în C' şi baza $ABCD$.

c) Presupunem că prisma este metalică şi că prin topire se transformă în alta a cărei bază este un dreptunghi cu lungimea de 2 dm şi lăţimea de $\sqrt{2}$ dm; să se arate că înălţimea acestei prisme este egală, în lungime, cu diagonala prismei iniţiale.



R. a) Vom arăta că $(AC) \equiv (CC')$. Din triunghiul dreptunghic $CC'A$ ($\hat{C}$ are 90°) avem:

$$CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = \sqrt{AC'^2 - AB^2 - BC^2} = 2\sqrt{2} \text{ dm}.$$

Dar $AC = 2\sqrt{2}$ dm, deci $AC = CC'$.

b) Aria totală a piramidei are expresia:

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_{ABCD} + \mathcal{A}_{CDC'} + \mathcal{A}_{CCB'} + \mathcal{A}_{C'AB} + \mathcal{A}_{C'DA} =$$
$$= 4(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1) \text{ (dm}^2\text{)}.$$

c) Volumul prismei transformate după topire este egal cu volumul prismei iniţiale. Putem scrie, notînd cu $\mathcal{V}_1$, respectiv $\mathcal{V}_2$ volumul prismei înainte şi după topire:

$$\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$$

sau:

$$AB \cdot BC \cdot CC' = \mathcal{V}_2;$$

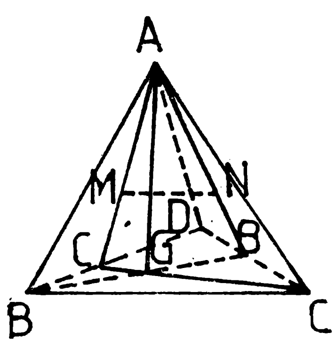
sau, cum $\mathcal{V}_2 = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot h$:

$$2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot h$$

de unde $h = 4$ dm. Dar $AC' = 4$ dm, deci $h = AC'$.

7.30^{PO}. Să se determine volumul tetraedrului determinat de centrele de greutate ale feţelor unui tetraedru regulat dat, în funcţie de lungimea muchiei.

R. Determinăm mai întîi volumul tetraedrului regulat de muchie l. Fie G proiecţia lui A pe planul triunghiului echilateral BDC. G este centrul de greutate al triunghiului BDC şi cum medianele se intersectează pe fiecare la o treime de bază şi două treimi de vîrf, rezultă $DG = \frac{2}{3} m$, unde m reprezintă lungimea unei mediane a triunghiului BDC, deci $m = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ sau $DG = \frac{l\sqrt{3}}{3}$. În triunghiul dreptunghic AGD, aplicăm teorema lui Pitagora.



$$AG^2 = AD^2 - DG^2 = l^2 - \frac{l^2}{3} = \frac{2l^2}{3}, \text{ deci } AG = \frac{l\sqrt{6}}{3}.$$

Deci:

$$\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{S}_{BDC} \cdot AG = \frac{1}{3} \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{l\sqrt{6}}{3} = \frac{l^3\sqrt{2}}{12}.$$

Fie M şi N centrele de greutate ale feţelor ABD şi ADC, B', C', mijloacele laturilor DC şi respectiv BD. Deoarece $\frac{AM}{MC'} = \frac{AN}{NB'} = 2$ rezultă (conform reciprocei teoremei lui Thales că dr.$MN \parallel$dr.$C'B'$ deci: $\frac{MN}{B'C'} = \frac{AM}{AC'} = \frac{2}{3}$, de unde $MN = \frac{2}{3} B'C'$. Dar $B'C'$ este linie mijlocie în triunghiul DBC, deci : $B'C' = \frac{l}{2}$ şi obţinem $MN = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} = \frac{l}{3}$.

Deoarece tetraedrul determinat de centrele de greutate ale feţelor tetraedrului regulat este regulat şi MN este o muchie a sa, conform rezultatului stabilit anterior (pentru calculul volumului), obţinem că volumul acestuia este egal cu

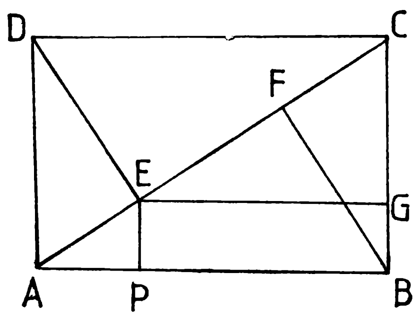
$$\frac{MN^3\sqrt{2}}{12}, \text{ sau } \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \left(\frac{l}{3}\right)^3 = \frac{l^3\sqrt{2}}{324}.$$

7.31[PO]. Se consideră un tetraedru $SABC$ astfel încît dr. $SA \perp$ dr. $SB \perp$ $\perp$ dr.$SC \perp$ dr.SA. Triunghiul ABC este ascuţitunghic? Justificaţi răspunsul.

R. Arătăm că unghiul $\sphericalangle ACB$ este ascuţit. Fie dr. $SP \perp$ dr. BC, $P \in$ dr. BC. Deoarece triunghiul SBC este dreptunghic în S rezultă că $P \in (BC)$. Deoarece dr. $AS \perp$ dr. BS, dr. $AS \perp$ dr. CS rezultă dr. $AS \perp (BSC)$. Dar dr. $SP \perp$ dr. BC : deci, conform teoremei celor trei perpendiculare rezultă dr. $AP \perp$ dr. BC; în plus $P \in (BC)$ deci în triunghiul dreptunghic APC unghiul ACB este ascuţit. Similar se arată că unghiurile CAB şi ABC sînt ascuţite.

7.32. Planul dreptunghiului $ABCD$ se „îndoaie" după diagonala AC pînă cînd planul ACD devine perpendicular pe planul ABC, adică se formează un diedru drept. Ştiind că $AB = 40$ cm şi $BC = 30$ cm aflaţi: distanţa din spaţiu dintre punctele B şi D; aria totală a corpului $ABCD$ format.

R. Înălţimea DE este de 24 cm. Aflăm EB din triunghiul dreptunghic EBF cu teorema lui Pitagora şi obţinem $EB = 2\sqrt{193}$ cm.



Aflăm DB din spaţiu cu ajutorul teoremei lui Pitagora din triunghiul dreptunghic DEB şi avem $DB = 2\sqrt{337}$ cm.

Aflăm EP din triunghiul AEB: $EP = AE \cdot BF : AB = 10{,}8$ (cm), iar EG din triunghiul EBC: $EG = EC \cdot BF : BC = 25{,}6$ (cm).

Cu ajutorul teoremei lui Pitagora aflăm din triunghiul DEP, $DP = \frac{6\sqrt{481}}{5}$, şi din triunghiul DEG, $DG = \frac{8\sqrt{481}}{5}$.

Aria totală va fi :

$$\mathcal{A} = 30 \cdot 40 + 40 \cdot \frac{6\sqrt{481}}{5} : 2 + 30 \cdot \frac{8\sqrt{481}}{5} : 2 = 48 \cdot (25 + \sqrt{481}) \text{ (cm}^2\text{)}.$$

7.33[PO]. Să se arate că piramidele triunghiulare, patrulatere şi pentagonale sînt singurele piramide regulate care pot avea feţele laterale triunghiuri echilaterale.

R. Fie $A_1, A_2 \ldots A_n$ un poligon regulat cu n laturi de latură a şi fie O centrul acestui poligon.

În triunghiul isoscel OA_1A_2 notăm cu 2α măsura unghiului A_1OA_2 şi cu M mijlocul laturii A_1A_2.

Deoarece pentru $n = 3$ se obţine $2\ m(\hat{\alpha}) = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ rezultă că $m(\hat{\alpha}) = 60^\circ$ şi deci, pentru $n \geqslant 3$, deducem $m(\alpha) \leqslant 60^\circ$.

Pe de altă parte $\sin \alpha = \frac{\frac{a}{2}}{OA_1}$ sau $OA_1 = \frac{a}{2 \sin \alpha}$. Fie S un punct pe perpendiculara în O pe planul poligonului dat astfel încît $SA_1 = \ldots = SA_n = a$. Din triunghiul dreptunghic SOA_1 rezultă că $OA_1 < SA_1$ sau $\frac{a}{2 \sin \alpha} < a$ sau $\sin \alpha > \frac{1}{2}$ de unde rezultă că $m(\alpha) > 30^\circ$.

În concluzie, avem că $30^\circ < \alpha \leqslant 60^\circ$. Rezultă că piramidele regulate care pot avea feţele laterale triunghiuri echilaterale sînt numai acelea pentru care $30^\circ < \alpha \leqslant 60^\circ$.

Ţinînd cont că $2m(\alpha) = \frac{360^\circ}{n}$, rezultă următoarele posibilităţi:

$$n = 3, \text{ de unde } m(\alpha) = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ;$$

$$n = 4, \text{ de unde } m(\alpha) = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ;$$

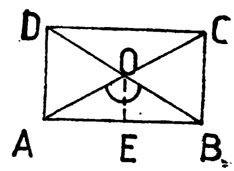
$$n = 5, \text{ de unde } m(\alpha) = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ.$$

Pentru $n \geqslant 6$ rezultă $m(\hat{\alpha}) \leqslant 30^\circ$, deci astfel de piramide nu pot avea feţele laterale triunghiuri echilaterale.

§8. CORPURI ROTUNDE

8.1[M]. Un cilindru se desfăşoară pe un plan după un dreptunghi, ale cărui diagonale sînt egale cu $2a$ şi formează între ele un unghi de $120°$. Să se afle raza şi generatoarea cilindrului.

R. Fie dreptunghiul $ABCD$, cilindrul desfăşurat în care $AC = BD = 2a$ şi, notînd cu O punctul de intersecţie al diagonalelor, $\widehat{AOB}$ are $120°$. Fie dr. $OE \perp$ dr. AB. Cum diagonalele se intersectează în părţi congruente, avem $AO = a$ şi în triunghiul dreptunghic AOE obţinem, ţinînd cont că $\widehat{AOE}$ are $60°$:



$$OE = OA \cdot \cos 60° = a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a}{2}.$$

De aici, ţinînd cont că OE este linie mijlocie în triunghiul ACB, avem:

$$CB = 2OE = 2 \cdot \frac{a}{2} = a.$$

Deci, generatoarea cilindrului congruentă cu CB, are lungimea a.
În triunghiul AOE, lungimea lui AE este:

$$AE = AO \sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

de unde:

$$AB = 2 \cdot AE = a\sqrt{3}.$$

Dar prin înfăşurare, AB devine circumferinţă a cercului bazei cilindrului. Deci, notînd cu R lungimea razei cilindrului, se obţine:

$$2\pi R = AB$$

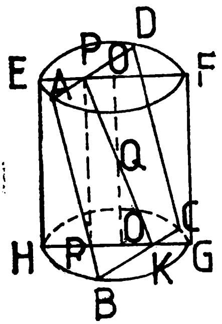
de unde:

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{2\pi}.$$

8.2[M]. Într-un cilindru circular drept cu raza $r = 14$ cm şi înălţimea $h = 4$ cm, este „înscris" un pătrat astfel că două vîrfuri ale sale sînt pe cercul unei baze, iar celelalte două pe cercul celeilalte baze. Găsiţi latura pătratului.

R. Fie AD latura pătratului situată pe baza superioară a cilindrului. Dreptele AD și EF sînt perpendiculare, la fel BC și HG, iar $(O'P) \equiv (OK)$, dr. $AD \cap$ dr. $EF = \{P\}$ și dr. $BC \cap$ dr. $HG = \{K\}$.

Cum dr. $OO' \perp$ dr. AD, dr. $O'P \perp$ dr. AD, rezultă dr. $AD \perp$ dr. PK. În plus, deoarece $ABCD$ este pătrat, rezultă $(AD) \equiv (PK)$.



Să notăm latura pătratului cu l. Atunci :

$$AD = 2AP = 2\sqrt{r^2 - O'P^2}.$$

Pe de altă parte, ducînd dr. $PP' \parallel$ dr. OO', în triunghiul $PP'K$ avem :

$$PK = \sqrt{h^2 + 4O'P^2}.$$

Dar, cum $(AD) \equiv (PK)$, rezultă :

$$2\sqrt{r^2 - O'P^2} = \sqrt{h^2 + 4O'P^2}.$$

de unde obținem :

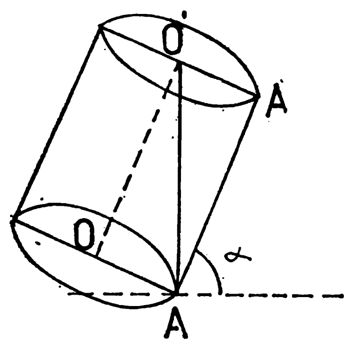
$$O'P = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4r^2 - h^2}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{384} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}\ \text{(cm)}.$$

De aici, latura pătratului este :

$$l = AD = 2\sqrt{196 - 96} = 2\sqrt{100} = 20\ \text{(cm)}.$$

8.3[M,PO]**.** Un cilindru circular drept are generatoarea $g = 6\sqrt{3}$ m și raza de 6 m. Cu ce unghi trebuie „înclinat" cilindrul astfel încît centrul unei baze să se proiecteze într-un punct al cercului celeilalte baze?

R. Să înclinăm cilindrul astfel încît centrul unei baze să se proiecteze într-un punct al cercului celeilalte baze și să notăm cu α unghiul de înclinare.



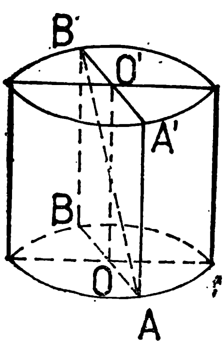
În triunghiul $A'O'A$, unghiul $\widehat{A'AO'}$ este dat de :

$$\operatorname{tg} \widehat{A'AO'} = \frac{O'A'}{AA'} = \frac{r}{g} = \frac{6}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Deci $m(\widehat{A'AO'}) = 30°$. Cum avem relația :

$$m(\widehat{A'AO'}) + m(\alpha) = 90°$$

rezultă $m(\alpha) = 60°$.



8.4[M]**.** Un plan ce conține centrele celor două baze ale unui cilindru circular drept intersectează cercurile celor două baze în A și B și respectiv în A' și B'. (A, A' sînt pe aceeași generatoare, B, B' la fel). Găsiți distanța dintre punctele A și B', în funcție de raza R a bazei și generatoarea G.

R. Planul ce conține centrele celor două baze este $ABB'A'$.

Evident, cum AB conține centrul bazei, avem $AB = 2R$, iar $BB' = G$. Deci, în triunghiul dreptunghic ABB', lungimea lui AB' este :

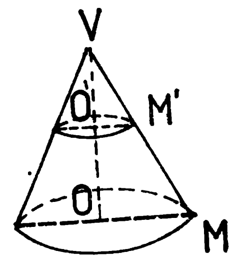
$$AB' = \sqrt{4R^2 + G^2}.$$

8.5^{M,PO}. Găsiţi locul geometric al punctelor din spaţiu situate la o distanţă dată R de o dreaptă dată d.

R. Fie un plan α, perpendicular pe dreapta d şi fie O punctul unde d intersectează planul α. În planul α fie un cerc cu centrul în O şi rază R. Atunci orice punct M de pe cerc, are proprietatea că dr. $OM \perp d$ şi $OM = R$.

Fie acum o suprafaţă cilindrică circulară generată de cerc în jurul lui d, cu G generatoarea acesteia, şi evident distanţa de la G la d este R. Deci, locul geometric este suprafaţa de rotaţie în jurul lui d generată de cercul cu raza R, centrul pe d şi situat în plan perpendicular pe d.

8.6^{M}. Un con circular drept, cu raza bazei 9 cm şi înălţimea 20 cm, este intersectat cu un plan paralel cu baza. La ce distanţă de vîrf trebuie dus planul, astfel încît raza cercului de secţiune să fie 6 cm?



R. Fie α planul paralel cu baza conului, astfel încît raza cercului de secţiune $O'M'$ să fie de lungime 6 cm.

Deoarece dr. $O'M' \parallel$ dr. OM, triunghiurile VOM şi $VO'M'$ sînt asemenea şi, scriind rapoartele lor de asemănare:

$$\frac{VO'}{VO} = \frac{O'M'}{OM}$$

rezultă:

$$\frac{VO'}{20} = \frac{6}{9},$$

de unde $VO' = 20 \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{40}{3}$ (cm).

8.7^{M}. Un con circular drept are diametrul bazei de 12 cm, şi înălţimea egală cu 2/3 din diametru. La ce distanţă de vîrful conului trebuie făcută o secţiune într-un plan paralel cu baza, astfel încît lungimea cercului de secţiune să fie 9π? (vezi figura de la problema 8.6^{M}).

R. Fie o secţiune paralelă cu baza astfel încît lungimea cercului de secţiune să fie 9π.

Deci, cum $2\pi O'M' = 9\pi$, rezultă $O'M' = 4{,}5$ cm.

Din asemănarea triunghiurilor VOM şi $VO'M'$ rezultă:

$$\frac{VO'}{VO} = \frac{O'M'}{OM}$$

Dar $VO = \dfrac{2}{3} \cdot 12$ cm $= 8$ cm, deci:

$$VO' = \frac{8 \cdot 4{,}5}{6} = 6 \text{ (cm)}.$$

8.8^{M}. Un con cu generatoarea de 16 cm se desfăşoară pe un plan, după un sfert de cerc. Găsiţi raza bazei conului.

R. Vom face următoarele observaţii:

i) lungimea arcului sectorului este egală cu lungimea cercului de bază al conului;

ii) generatoarea conului este raza sectorului obţinut prin desfăşurarea conului.

Astfel, sectorul fiind un sfert de cerc, el are lungimea:

$$L = \frac{2\pi G}{4} = \frac{2\pi \cdot 16}{4} = 8\pi.$$

Pe de altă parte, lungimea R a razei bazei conului, o scoatem scriind relatia:

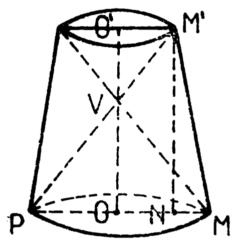
$$2\pi R = L$$

sau:

$$2\pi R = 8\pi$$

de unde $R = 4$ cm.

8.9^M. Într-un trunchi de con circular drept cu $R = 16$ cm, și $r = 8$ cm, se înscriu două conuri care au ca baze bazele trunchiului și generatoarele unuia în prelungirea generatoarelor celuilalt. Știind că înălțimea trunchiului este de 12 cm, să se afle înălțimile celor două conuri.



R. Să notăm cu V vîrful comun al celor două conuri și cu OO' înălțimea trunchiului.

Fie VO și VO' înălțimile celor două conuri. Fie N piciorul perpendicularei din M' pe baza mare a trunchiului. Triunghiurile $M'PN$ și VPO sînt asemenea (dr. $VO \parallel$ dr. $M'N$) și, scriind proporționalitatea laturilor avem:

$$\frac{VO}{M'N} = \frac{PO}{PN}.$$

Cum $M'N = 12$cm, $PO = R = 16$cm, $PN = R + r = 24$ (cm), obținem:

$$VO = \frac{12 \cdot 16}{24} = 8\,(\text{cm}),$$

iar lungimea înălțimii VO' al celui de-al 2-lea con este:

$$VO' = OO' - VO = 12 - 8 = 4\ (\text{cm}).$$

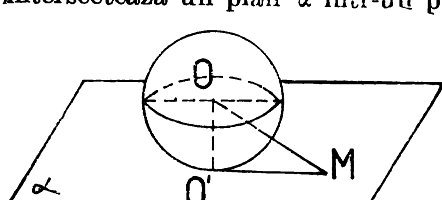
8.10^M. Fie d o semidreaptă de origine O, și un unghi ascuțit α, ambele date. Găsiți locul geometric al punctelor M din spațiu pentru care unghiul dintre OM și d este α.

R. Fie $M \neq O$ un punct al locului geometric. Fie dr. $MN \perp d$, $N \in d$. Atunci $m(\widehat{NOM}) = \alpha$.

Să considerăm cercul de centru N și rază NM. Evident, pentru orice punct P de pe circumferința cercului, avem $m(\widehat{PON}) = \alpha$.

Să considerăm pînza conică circulară dreaptă generată de O și semidreapta OM. Aceasta este locul geometric căutat.

8.11^M. O dreaptă ce conține centrul unei sfere cu raza $R = 10$ cm intersectează un plan α într-un punct M, astfel că $OM = 26$ cm. Știind că distanța de la M la proiecția lui O pe α este 24 cm, stabiliți poziția planului α față de sferă.

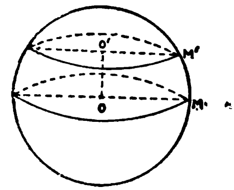


R. Fie $O'O$ distanța de la O la planul α. Deoarece, în triunghiul dreptunghic MOO':

$$OO' = \sqrt{MO^2 - MO'^2} = 10\,(\text{cm})$$

rezultă că O' coincide cu punctul de tangență dintre plan și sferă, astfel că α este tangent sferei în O'.

8.12^{M}. Un plan α intersectează o sferă cu raza $R = 0{,}5$ m, astfel încît aria cercului de secțiune este de 4 ori mai mică decît aria unui cerc mare al sferei. Găsiți distanța de la centrul sferei la planul de secțiune.



R. Fie O centrul sferei și O' centrul cercului de secțiune. Aria cercului de secțiune este πR_1^2, unde R_1 este raza cercului de secțiune. Deoarece aria unui cerc mare al sferei este $\pi R^2 = \frac{\pi}{4}$, condiția din enunț devine:

$$\pi R_1^2 = \frac{\pi}{16}$$

de unde $R_1 = \frac{1}{4}$m. Considerînd triunghiul dreptunghic $OO'M'(m(\hat{O'}) = 90°)$, distanța $[OO']$ este:

$$OO' = \sqrt{R^2 - R_1^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ (m)}.$$

8.13^{M}. Fie două sfere de centru O și O_1 și raze R și R'. În fiecare din situațiile următoare precizați poziția sferelor:

a) $R = 8$ cm, $R' = 4$ cm, $OO_1 = 3$ cm;

b) $R = 13{,}5$ cm, $R' = 4{,}5$ cm, $OO_1 = 20$ cm;

c) $R = 2\sqrt{3}$ cm, $R' = 2(2 - \sqrt{3})$ cm, $OO_1 = 3$ cm;

d) $R = 2(4 - \sqrt{2})$ cm, $R' = 2(5 - 2\sqrt{2})$ cm, $OO_1 = 1$ cm.

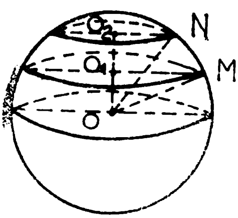
R. Pozițiile relative a două sfere determină anumite condiii și relații între razele sferelor și distanța dintre centrele lor. Astfel două sfere pot fi:
i) tangente exterior, cînd $OO_1 = R + R'$ (păstrăm notațiile din enunț);
ii) tangente interior, cînd $OO_1 = R - R'$ (am presupus $R > R'$);
iii) secante după un cerc, cînd $R - R' < OO_1 < R + R'$;
iv) interioare, cînd $OO_1 < R - R'$;
v) exterioare, cînd $OO_1 > R + R'$.
a) Cum $R - R' = 8 - 4 = 4$ (cm) și $OO_1 = 3$ cm, sferele sînt interioare;
b) Deoarece $R + R' = 18 < OO_1$, sferele sînt exterioare;
c) Cum $R - R' = 4\sqrt{3} - 4$; $R + R' = 4$, avem relația:

$$R - R' < OO_1 < R + R'$$

adică sferele sînt secante;
d) Sferele sînt secante.

8.14^{M}. Două plane paralele intersectează sfera de rază $R = 5$ cm, după două cercuri cu razele respectiv $r = 3$ cm, $r' = 4$ cm. Aflați înălțimea zonei sferice determinată de cele două plane.

R. Planele de secțiune se pot afla de aceeași parte a centrului sferei sau de o parte și de alta a centrului.



Să presupunem că planele sînt situate de aceeași parte a centrului sferei și să notăm cu O, O_1, O_2 centrul sferei, respectiv centrele celor două cercuri.

Distanța O_1O_2 este înălțimea zonei sferice determinată în acest caz de cele 2 plane. Considerînd triunghiurile dreptunghice ONO_2 și OMO_1 putem scrie:

$$O_1O_2 = OO_2 - OO_1 = \sqrt{ON^2 - O_2N^2} - \sqrt{OM^2 - O_1M^2} =$$

$$= \sqrt{R^2 - r^2} - \sqrt{R^2 - r'^2} = 4 - 3 = 1 \text{ (cm)}.$$

Dacă planele sînt de o parte și de alta a centrului sferei, considerînd aceleași triunghiuri formate, obținem:

$$O_1O_2 = OO_2 + OO_1 = 4 \text{ cm} + 3 \text{ cm} = 7 \text{ cm}.$$

8.15^{M}. Găsiți locul geometric al picioarelor perpendicularelor duse din punctul fix A pe planul variabil ce conține punctul fix B.

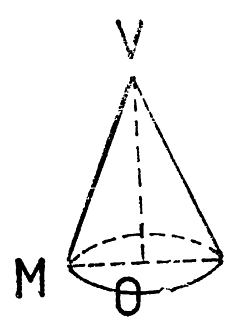
R. Segmentul AB este constant. Fie M piciorul perpendicularei din A pe un plan ce conține B. Cum $m(\widehat{AMB}) = 90°$, rezultă că M se află pe sfera de diametru AB. Astfel, locul geometric căutat este sfera cu raza $\frac{AB}{2}$. Reciproc, din orice punct M de pe sferă, diametrul AB se vede sub unghiul $\widehat{AMB}$, drept.

8.16$^{M.PO}$. Să se afle volumul unui cilindru circular drept înscris într-o prismă triunghiulară dreaptă care are latura bazei $4\sqrt{3}$ dm și înălțimea de 10 dm.

R. Bazele cilindrului sînt cercuri înscrise în bazele prismei. Cum bazele prismei sînt triunghiuri echilaterale de latură $l = 4\sqrt{3}$ dm, raza cercurilor de bază ale cilindrului are lungimea $R = \frac{l\sqrt{3}}{6} = \frac{12}{6} = 2$(dm). Înălțimea cilindrului fiind egală cu înălțimea prismei, volumul său este:

$$\mathcal{V} = \pi R^2 \cdot h = 40\pi \text{ (dm}^3\text{)}.$$

8.17^{M}. Un con circular drept are raza bazei de 6 cm și generatoarea de 10 cm. Găsiți volumul conului.



R. În triunghiul dreptunghic VOM, avem:

$$VO = \sqrt{MV^2 - MO^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ (cm)}.$$

Volumul conului este dat de expreia:

$$\mathcal{V} = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot MO^2 \cdot VO}{3} = 96\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

8.18$^{M.PO}$. Un triunghi dreptunghic ABC ($\hat{A}$ are 90°) se „rotește" pe rînd, în jurul catetelor și apoi al ipotenuzei.

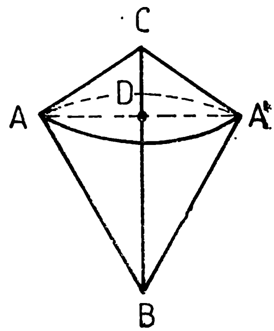
a) Dacă $AB = 5$ dm. și $AC = 12$ dm., găsiți cele trei volume $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, $\mathcal{V}_3$;

b) Dacă $AB = c$, $AC = b$, $\mathcal{V}_1$ şi $\mathcal{V}_2$ sînt volumele obţinute prin „rotirea" triunghiului în jurul catetelor, iar $\mathcal{V}$ prin „rotirea" în jurul ipotenuzei, arătaţi că:

$$\frac{1}{\mathcal{V}^2} = \frac{1}{\mathcal{V}_1^2} + \frac{1}{\mathcal{V}_2^2}.$$

c) Formulaţi şi demonstraţi o reciprocă la punctul b).

R. a) Fie ABC triunghiul dat. Prin „rotirea" în jurul lui AC, se obţine un con cu raza bazei de lungime AB şi înălţime AC, prin „rotirea" triunghiului în jurul lui AB, se obţine un con cu raza AC şi înălţime AB, iar prin „rotirea" triunghiului în jurul ipotenuzei se obţin două conuri, cu raza de lungime AD, perpendiculara din A pe BC, şi înălţimile BD şi respectiv CD. Astfel cele trei volume au expresia:



$$\mathcal{V}_1 = \frac{\pi AC^2 \cdot AB}{3} = \frac{\pi \cdot 12^2 \cdot 5}{3} = 240\ \pi\ (\text{dm}^3);$$

$$\mathcal{V}_2 = \frac{\pi AB^2 \cdot AC}{3} = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 12}{3} = 100\pi\,(\text{dm}^3);$$

$$\mathcal{V}_3 = \frac{\pi \cdot AD^2 \cdot DC}{3} + \frac{\pi \cdot AD^2 \cdot DB}{3}.$$

Dar

$$AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{5 \cdot 12}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13}\ (\text{dm}),$$

şi deci:

$$\mathcal{V}_3 = \frac{\pi \cdot AD^2}{3}(DC + DB) = \frac{\pi \cdot AD^2 \cdot BC}{3} = \frac{1200}{13}\pi\ (\text{dm}^3).$$

b) Cu notaţiile date avem:

$$\mathcal{V}_1 = \frac{\pi b^2 c}{3}\ ;\ \mathcal{V}_2 = \frac{\pi c^2 b}{3};\ \mathcal{V} = \frac{\pi b^2 c^2}{3a},$$

de unde, membrul drept al relaţiei de arătat, devine:

$$\frac{9}{\pi^2 b^4 c^2} + \frac{9}{\pi^2 c^4 b^2}$$

sau,

$$\frac{9}{\pi^2 b^2 c^2} \cdot \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

de unde,

$$\frac{9}{\pi^2 b^2 c^2} \cdot \frac{a^2}{b^2 c^2} = \frac{9a^2}{\pi^2 b^4 c^4} = \frac{1}{\mathcal{V}^2}.$$

c) Fie un triunghi cu laturile de lungime a, b şi c, (cu $a > b$ şi $a > c$). Dacă între volumele $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, ale corpurilor ce iau naştere prin „rotirea" triunghiului în jurul laturilor a, respectiv b şi c, există relaţia :

$$\frac{1}{\mathcal{V}^2}=\frac{1}{\mathcal{V}_1^2}+\frac{1}{\mathcal{V}_2^2}$$

atunci triunghiul este dreptunghic.

Volumul $\mathcal{V}$ obţinut prin „rotirea“ triunghiului în jurul laturii a are expresia :

$$\mathcal{V}=\frac{\pi h_a^2\cdot a}{3}$$

unde h_a este înălţimea triunghiului corespunzătoare laturii a. Apoi :

$$\mathcal{V}_1=\frac{\pi h_b^2\cdot b}{3};\quad \mathcal{V}_2=\frac{\pi h_c^2\cdot c}{3}$$

unde h_b şi h_c sînt înălţimile corespunzătoare laturilor b şi c. De aici, relaţia dată devine după înlocuire :

$$\frac{1}{a^2h_a^4}=\frac{1}{b^2h_b^4}+\frac{1}{c^2h_c^4}.$$

Dar, notînd cu $\mathcal{S}$ aria triunghiului, din :

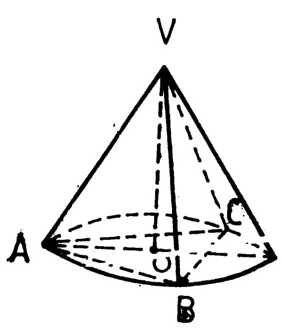
$$2\mathcal{S}=ah_a=bh_b=ch_c$$

rezultă, înlocuind şi simplificînd :

$$a^2=b^2+c^2$$

şi conform reciprocei teoremei lui PITAGORA triunghiul este dreptunghic.

8.19[M.OP]. Un con circular drept are raza bazei $R=0,8$ m. El are trei generatoare două cîte două perpendiculare. Aflaţi volumul conului.



R. Fie VA, VB şi VC trei generatoare perpendiculare două cîte două ale conului şi O piciorul perpendicularei din V pe planul bazei conului.

Triunghiul ABC este echilateral, deoarece triunghiurile dreptunghice AVB, BVC, CVA sînt congruente ($VA=VB=VC$) şi deci cum ABC este înscris în cercul de rază R, avem

$$AB=AC=BC=R\sqrt{3}=0,8\sqrt{3}\text{ m}.$$

Din triunghiul dreptunghic AVB ($\widehat{AVB}$ are 90°) şi $AV=VB$ avem :

$$AV=\frac{R\sqrt{6}}{2}=0,4\sqrt{6}\text{ m}.$$

Calculăm lungimea înălţimii conului din triunghiul dreptunghic VOA :

$$VO=\sqrt{VA^2-AO^2}=\sqrt{\frac{6R^2}{4}-R^2}=\sqrt{\frac{R^2}{2}}=\frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

Volumul conului este :

$$\mathcal{V}=\frac{\pi R^2\cdot h}{3}=\frac{\pi R^2\cdot R\sqrt{2}}{6}=\frac{\pi R^3\sqrt{2}}{6}=\frac{0,256\,\pi\sqrt{2}}{3}.$$

8.20^PO^. Calculaţi volumul unui con circumscris unui tetraedru regulat de muchie $a = 6$ cm.

R. Fie $VABC$ tetraedrul regulat în care triunghiul ABC este echilateral. Raza cercului circumscris triunghiului ABC are expresia:

$$R = \frac{2}{3} \cdot \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{6\sqrt{3}}{3} \text{ (cm)}.$$

Fie VO înălţimea tetraedrului unde O este centrul de greutate al triunghiului ABC. Ea este şi înălţime a conului şi are expresia:

$$VO = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{6\sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{6} \text{ (cm)}.$$

Volumul conului este:

$$\mathcal{V} = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{27} = \frac{\pi\, 216\sqrt{6}}{27} = 8\pi\sqrt{6} \text{ (cm}^3\text{)}.$$

8.21^PO^. Un dreptunghi cu laturile a şi b $(a < b)$ se „roteşte" în jurul lui a şi apoi în jurul lui b.

a) În ce caz se obţine aria laterală mai mare?

b) În ce caz se obţine volumul mai mare?

R. Prin „rotirea" dreptunghiului în jurul laturii a se obţine un cilindru cu raza bazei de lungime b şi generatoare a. Aria sa laterală şi volumul sînt:

$$\mathcal{A}_l = 2\pi ba; \quad \mathcal{V}_a = \pi b^2 a.$$

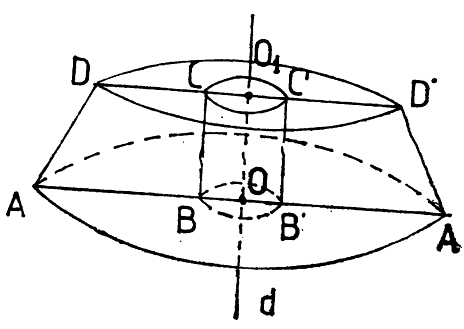
Prin rotirea în jurul laturii b se obţine tot un cilindru în care:

$$\mathcal{A}_l = 2\pi ab; \quad \mathcal{V}_b = \pi a^2 b.$$

Observăm că cele două arii laterale sînt egale, iar cum $\dfrac{\mathcal{V}_a}{\mathcal{V}_b} = \dfrac{b}{a} > 1$ rezultă $\mathcal{V}_a > \mathcal{V}_b$.

8.22^PO^. Un trapez dreptunghic $ABCD$, $(m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = 90°)$ se „roteşte" în jurul unei paralele cu dr. BC, distanţa de la dr. BC la axă fiind de 3 cm (se consideră axa în planul trapezului, dar în afara lui). Dacă $AB = 12$ cm $AD = 10$ cm şi $CD = 4$ cm, să se afle aria totală şi volumul corpului format.

R. Prin „rotirea" în jurul axei (d) ia naştere un trunchi de con (cu razele bazelor $R = AB + BO = 15$ cm, $r = CD + CO_1 = 4 + 3 = 7$(cm) cu înălţimea $BC = 6$cm şi generatoarea $AD = 10$cm) şi un cilindru (cu raza de lungime $R_1 = BO = 3$ cm şi generatoarea de 6 cm). Aria totală a corpului format are expresia:



$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_{t\,tr.\,con} - 2\mathcal{A}_{bază\ cil.} + \mathcal{A}_{l\ cil.} =$$

$$= 10\pi(15 + 7) + \pi \cdot 15^2 + \pi \cdot 7^2 - 2\pi \cdot 3^2 +$$

$$+ 2\pi \cdot 3 \cdot 6 = 512\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Volumul corpului format are expresia:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_{tr.con} - \mathcal{V}_{cil.} = \frac{\pi \cdot h}{3}(R^2 + r^2 + Rr) - \pi R_1^2 \cdot h = \frac{\pi \cdot 6}{3}(225 + 49 + 105) -$$

$$- \pi \cdot 9 \cdot 6 = 704\pi \ (\text{cm}^3).$$

8.23^M^. Aria totală a unui cilindru circular drept este de 132π cm², iar cea laterală 96π cm². Să se afle volumul cilindrului.

R. Va trebui să aflăm lungimile razei și generatoarei cilindrului. Deoarece:

$$\mathcal{A}_l = 2\pi RG = 96\pi$$

și:

$$\mathcal{A}_t = 2\pi R^2 + \mathcal{A}_l = 132\pi$$

rezultă:

$$R^2 = \frac{(132 - 96)\pi}{2\pi}$$

de unde $R = 3\sqrt{2}$ cm. Înlocuind măsura razei în expresia ce dă aria laterală se obține:

$$G = \frac{96\pi}{6\pi\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}\,(\text{cm}).$$

Volumul cilindrului este:

$$\mathcal{V} = \pi R^2 G = 144\sqrt{2}\,\pi(\text{cm}^3).$$

8.24^PO^. Să se determine locul geometric al intersecției a două plane perpendiculare care „trec" prin două drepte paralele fixe.

R. Fie π_1 și π_2 două plane perpendiculare și d_1, d_2 dreptele paralele fixe cu $d_1 \subset \pi_1$ și $d_2 \subset \pi_2$. Fie $d = \pi_1 \cap \pi_2$. Atunci $d \parallel d_1$ și $d \parallel d_2$.

Fie un plan α perpendicular pe dreptele d_1 și d_2. Atunci $\alpha \perp d$. Să notăm cu O_1, O_2, M, punctele de intersecție ale lui α cu d_1, d_2, d. Atunci dr.$O_1M \perp$ dr.O_2M. Punctul M este mobil, și cum $m(\widehat{O_1MO_2}) = 90°$, M se află pe cercul de diametru $[O_1O_2]$ și deci d descrie o suprafață cilindrică circulară, avînd drept axă o dreaptă ce conține mijlocul lui $[O_1O_2]$.

8.25^M^. Un con se desfășoară pe un plan după un semicerc cu diametrul de 10 cm. Să se afle volumul conului.

R. Diametrul semicercului este egal cu dublul mărimii generatoarei conului, G. Deci:

$$10 = 2G$$

de unde $G = 5$ cm.

Raza conului o vom determina din egalitatea dintre aria laterală a conului cu aria semicercului. Avem:

$$\pi RG = \frac{\pi G^2}{2}$$

de unde:

$$R = \frac{G}{2} = 2{,}5(\text{cm}).$$

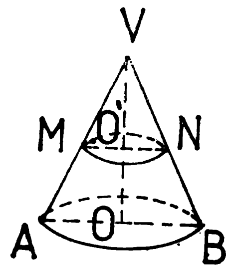
Înălțimea h a conului este:

$$h = \sqrt{G^2 - R^2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}\,(\text{cm}).$$

Volumul conului este dat de relația:

$$\mathcal{V} = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3} = \frac{125\sqrt{3}}{24}\pi\ (\text{cm}^3).$$

8.26M,PO**.** Un corp în formă de con circular drept cu raza bazei R și înălțimea h, confecționat dintr-un material impermeabil și închis etanș, este umplut cu apă pînă la jumătatea înălțimii. Îl întoarcem în așa fel încît vîrful să fie în jos și baza tot orizontală. Să se găsească înălțimea la care se ridică apa în acest caz.



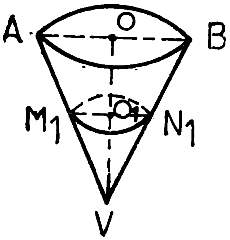
R. Forma lichidului din con este în primul caz forma unui trunchi de con, iar în al doilea caz forma unui con.

Să calculăm volumul lichidului în primul caz.

(MN) fiind linie mijlocie, raza $r = O'N$ a bazei superioare a trunchiului de con $ABNM$ este $r = \frac{BO}{2} = \frac{R}{2}$. Înălțimea OO_1 este $\frac{h}{2}$.

Volumul trunchiului de con este

$$\mathcal{V} = \frac{\pi h}{6}\left(R^2 + \frac{R^2}{4} + \frac{R^2}{2}\right) = \frac{7\pi h R^2}{24}.$$



Vom calcula acum volumul conului format de apă în poziția a doua.

Triunghiurile VO_1N_1 și VOB sînt asemenea (dr. $M_1N_1 \parallel$ dr. AB) și scriem proporționalitatea laturilor:

$$\frac{VO_1}{VO} = \frac{O_1N_1}{OB}$$

Înlocuind, obținem:

$$\frac{VO_1}{h} = \frac{O_1N_1}{R}$$

De aici, $O_1N_1 = \frac{R \cdot VO_1}{h}$, și volumul conului VM_1N_1 este:

$$\mathcal{V}_1 = \frac{\pi O_1N_1^2}{3} \cdot VO_1 = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2 \cdot VO_1^3}{h^2}.$$

Dar cele două volume $\mathcal{V}$ și $\mathcal{V}_1$ sînt egale, deci:

$$\frac{7\pi h R^2}{24} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot VO_1^3}{3h^2}.$$

De aici, $VO_1 = \frac{\sqrt[3]{7}}{2}h.$

Observație. Problema admite următoarea generalizare. Fie $\mathcal{V}$ volumul conului inițial $\mathcal{V}_1$ volumul apei, h înălțimea conului inițial, h_1 *și* h_2 înălțimile la care se ridică apa în prima, respectiv a doua poziție. Ținînd cont că raportul volumelor este egal cu cubul raportului înălțimilor corespunzătoare, putem scrie în primul caz:

$$\frac{\mathcal{V} - \mathcal{V}_1}{\mathcal{V}} = \left(\frac{h - h_1}{h}\right)^3$$

iar în al doilea caz:

$$\frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}} = \left(\frac{h_2}{h}\right)^3.$$

Din prima relație, scoțînd expresia lui $\frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}}$ și înlocuind-o în a doua relație, obținem după calcule:

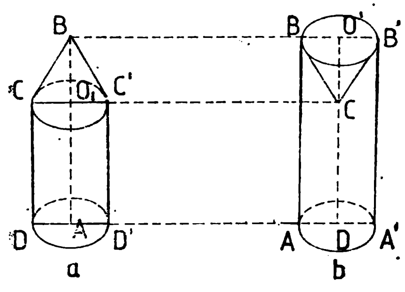
$$h_2 = \sqrt{3h_1h^2 - 3hh_1^2 + h_1^3}.$$

Dacă, inițial, apa se ridică la o înălțime egală cu $\frac{h}{k}$ din înălțimea conului ($k\in\mathbb{N}^*$), înlocuind în expresia lui h_2 se obține:

$$h_2 = \frac{h}{k}\sqrt{3k^2 - 3k + 1}.$$

8.27[M.PO]**.** Un trapez dreptunghic se rotește, odată în jurul bazei mari, altă dată în jurul bazei mici. Cunoscînd volumele $\mathcal{V}_1$ și $\mathcal{V}_2$ ale corpurilor astfel obținute, precum și latura a perpendiculară pe baze, să se calculeze în funcție de $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ și a, diferența dintre bazele trapezului.

R. Fie trapezul $ABCD$, cu $m(\hat{A}) = m(\hat{D}) = 90°$ și $AB > CD$. Vom calcula diferența $d = AB - CD$. Prin rotirea trapezului în jurul laturii AB se obține un cilindru cu raza a și generatoarea CD și un con cu raza a și înălțimea d. (fig. a).



Prin rotirea trapezului în jurul laturii CD ia naștere un cilindru cu raza a și generatoarea AB din care se scoate un con cu raza a și înălțimea d (fig. b).

Expresiile celor două volume sînt:

$$\mathcal{V}_1 = \pi a^2 \cdot CD + \frac{\pi a^2 \cdot d}{3}$$

$$\mathcal{V}_2 = \pi a^2 \cdot AB - \frac{\pi a^2 \cdot d}{3}$$

Scriind diferența $\mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_1$, obținem:

$$\mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_1 = \pi a^2 (AB - CD) - \frac{2}{3}\pi a^2 \cdot d = \frac{\pi a^2 \cdot d}{3}$$

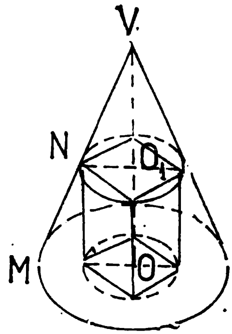
de unde:

$$d = 3 \cdot \frac{\mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_1}{\pi a^2}.$$

8.28[M.PO]**.** Într-un con circular drept cu diametrul bazei egal cu $12\sqrt{2}$ cm, și înălțimea egală cu 6 cm, se înscrie un cub astfel încît o bază sa să se găsească în planul bazei conului, iar vîrfurile celeilalte baze să fie situate pe pînza conică.

a) Să se găsească volumul cubului.

b) Rezolvaţi aceeaşi problemă în cazul cînd diametrul bazei conului este $2a\sqrt{2}$ şi înălţimea conului a.



R. Rezolvăm problema în cazul general, cînd raza conului este $R = a\sqrt{2}$ şi înălţimea conului este $h = a$, după care, făcînd $a = 6$, obţinem volumul cerut la punctul a).

Raza bazei conului este $R = a\sqrt{2}$, înălţimea conului a. Fie l latura cubului. Cum dr. $O_1N \parallel$ dr. OM (dr. VO perpendiculară pe planul bazei conului O şi O_1 centrele bazelor conului), triunghiurile VO_1N şi VOM sînt asemenea, de unde:

$$\frac{VO_1}{VO} = \frac{O_1N}{OM}.$$

Deoarece $VO_1 = a - l$ şi $O_1N = \frac{l\sqrt{2}}{2}$, înlocuind obţinem:

$$\frac{a-l}{a} = \frac{\frac{l\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}}$$

de aici, rezultă:

$$l = \frac{2a}{3}.$$

Deci, volumul cubului este:

$$\mathcal{V} = l^3 = \left(\frac{2}{3}a\right)^3 = \frac{8a^3}{27}.$$

Pentru $a = 6$ cm, se obţine:

$$\mathcal{V} = \frac{8 \cdot 216}{27} = 64 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

8.29^M^. Un con circular drept care are raza bazei de 8 m şi înălţimea de 16 m se „taie" cu un plan paralel cu planul bazei, determinînd astfel un trunchi de con de înălţime 12 m.

a) Să se calculeze volumul trunchiului de con format;

b) Să se determine la ce distanţă de planul bazei trebuie să se facă o secţiune în con, printr-un plan paralel cu baza, astfel ca ariile laterale ale celor două corpuri formate să fie egale.

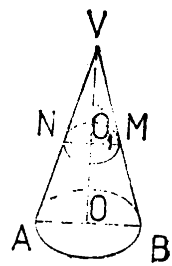
R. a) Deoarece dr. $MN \parallel$ dr. AB triunghiurile VOA şi VO_1N sînt asemenea, de unde, scriind proporţionalitatea laturilor, se obţine:

$$\frac{VO_1}{VO} = \frac{O_1N}{AO}$$

sau, înlocuind:

$$\frac{16-12}{16} = \frac{O_1N}{8}$$

deci, raza bazei superioare a trunchiului de con, este $O_1N = 2$ m. Volumul trunchiului de con este dat de :



$$\mathcal{V} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + R \cdot r) = \frac{\pi \cdot 12}{3}(8^2 + 2^2 + 8 \cdot 2) = 336\pi \text{ (m}^3\text{)}$$

b)Presupunem că am făcut o secțiune paralelă cu baza, la distanța $d = OO_1$ de bază astfel încît ariile laterale ale celor două corpuri formate sînt egale. Cercul de secțiune are raza $r = O_1N$ (folosim figura de la punctul a)). Deoarece triunghiurile VO_1N și VOA sînt asemenea, putem scrie :

$$\frac{16 - d}{16} = \frac{r}{8} = \frac{VN}{VA}$$

$$\text{unde } VA = \sqrt{AO^2 + VO^2} = 8\sqrt{5} \text{ (m)}.$$

De aici, $r = \dfrac{16 - d}{2}$ și $VN = r\sqrt{5}.$

Generatoarea trunchiului de con format este

$$AN = VA - VN = 8\sqrt{5} - \frac{(16 - d)}{2}\sqrt{5} = \frac{d\sqrt{5}}{2}.$$

Ariile laterale ale trunchiului de con și respectiv conului format sînt :

$$\mathcal{A}_{ltr.con} = \pi G(R + r) = \pi \frac{d\sqrt{5}}{2} \cdot \left(8 + \frac{16 - d}{2}\right)$$

$$\mathcal{A}_{lcon} = \pi RG = \pi \cdot r \cdot VN = \pi \cdot \frac{16 - d}{2} \cdot \frac{(16 - d)\sqrt{5}}{2}.$$

Punînd condiția ca $\mathcal{A}_{ltr.con} = \mathcal{A}_{l\,con}$ se obține :

$$(32 - d)d = (16 - d)^2$$

de unde se obține ecuația :

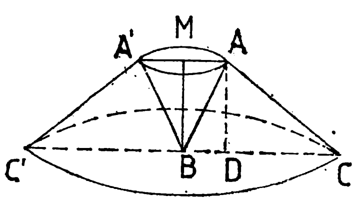
$$d^2 - 32d + 128 = 0$$

cu soluțiile $d_1 = 16 + 8\sqrt{2}$ și $d_2 = 16 - 8\sqrt{2}.$ Convine $d = 16 - 8\sqrt{2}.$ deoarece $d < VO$.

8.30[M]. Un triunghi dreptunghic ABC ($\hat{A}$ are 90°) se „rotește" în jurul perpendicularei în B pe dr. BC din planul triunghiului ABC. Dacă $AB = 3$ cm și $AC = 4$ cm, găsiți volumul corpului format.

R. Prin „rotirea" în jurul perpendicularei în B ia naștere un trunchi de con din care se scoate un con.

Raza bazei mari a trunchiului de con este $BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = 5$ (cm), iar înălțimea trunchiului de con, congruentă cu înălțimea conului, este congruentă cu înălțimea AD a triunghiului ABC (D piciorul perpendicularei din A pe dr. BC). Dar $AD = \dfrac{AB \cdot AC}{BC} = \dfrac{12}{5}$ (cm).



Raza bazei mici a trunchiului de con, egală cu raza conului este $MA=\sqrt{AB^2 - BM^2}$. Dar $BM = AD$, deci $MA = \frac{9}{5}$ cm. Astfel volumul corpului este:

$$\mathcal{V}_{corp} = \mathcal{V}_{trcon} - \mathcal{V}_{con} = \frac{\pi \cdot AD}{3}(BC^2 + MA^2 + BC \cdot MA) -$$

$$- \frac{\pi \cdot MA^2}{3} \cdot MB = 27{,}2\pi \text{ cm}^3.$$

8.31PO**.** Un trunchi de con circular drept are aria laterală 220π cm^2 şi generatoarea 10 cm.

a) Ştiind că raportul razelor bazelor trunchiului este de $4 : 7$, să se afle aria totală şi volumul trunchiului de con.

b) În corpul de la punctul a) se face un orificiu în formă de trunchi de piramidă patrulateră regulată cu latura bazei mici 4 cm şi cea a bazei mari 6 cm. Dacă piesa obţinută se cromează cu un strat de grosime 0,2 mm, aflaţi ce volum de crom se foloseşte. (Înălţimea trunchiului de piramidă este congruentă şi paralelă cu înălţimea trunchiului de con).

R. a) Fie R şi r razele bazelor trunchiului de con. Din ipoteză, $\frac{R}{r} = \frac{7}{4}$. Cum aria laterală a trunchiului este $\mathcal{A}_l = \pi G(R + r)$, rezultă:

$$\pi G(R + r) = 220\pi$$

sau:

$$\pi G\left(R + \frac{4}{7}R\right) = 220\,\pi.$$

de unde, cum $G = 10$ cm, rezultă $R = 14$ cm. Raza bazei mici a trunchiului este $r = \frac{4}{7}R = 8$ cm. Înălţimea h a trunchiului de con se află din relaţia:

$$h = \sqrt{G^2 - (R - r)^2} = \sqrt{100 - 36} = 8 \text{ (cm)}.$$

Atunci, aria totală a trunchiului este:

$$\mathcal{A}_t = \pi R^2 + \pi r^2 + \mathcal{A}_l = 196\pi + 64\pi + 220\pi = 480\pi \text{ (cm}^2\text{)};$$

iar volumul este:

$$\mathcal{V} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + R \cdot r) = \frac{8\pi}{3}(196 + 64 + 14 \cdot 8) = 992\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

b) Vom afla aria laterală a trunchiului de piramidă. Notînd cu l_1 şi l_2 laturile bazelor trunchiului de piramidă, apotema piramidei a_p este dată de:

$$a_p^2 = h^2 + \left(\frac{l_2 - l_1}{2}\right)^2 = 65.$$

Deci $a_p = \sqrt{65}$ cm, şi de aici:

$$\mathcal{A}_{l_p} = 4 \cdot \frac{(l_1 + l_2) \cdot a_p}{2} = 4\,\frac{(6 + 4)\sqrt{65}}{2} = 20\sqrt{65} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Atunci, aria cromată este:

$$\mathcal{A}_{cr} = \pi R^2 + \pi r^2 + \mathcal{A}_{ltr.con} - l_1^2 - l_2^2 + \mathcal{A}_{lp} = 4(120\pi - 13 + 5\sqrt{65})\ (\text{cm}^2).$$

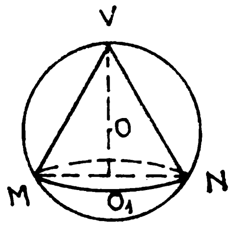
Volumul de crom va fi:

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{cr} \cdot 0{,}02\ \text{cm} = 0{,}08\,(120\pi - 13 + 5\sqrt{65})\ \text{cm}^3.$$

8.32^{M,PO}**.** Într-o sferă cu raza $R = 5$ m, se înscrie un con cu înălțimea $h = 8$ m. Să se afle:

a) aria și volumul sferei; b) aria și volumul conului; c) ariile calotelor formate.

R. a) Aria sferei este:



$$\mathcal{A}_{sf} = 4\pi R^2 = 100\pi\ \text{m}^2;$$

Volumul sferei este:

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{500\pi}{3}\ \text{m}^3.$$

b) Fie O centrul sferei, VO_1 înălțimea conului înscris în sferă, O_1 fiind centrul cercului de bază al conului.

Vom afla raza r a bazei conului, considerînd triunghiul OO_1N în care $ON = R = 5$ m și $O_1O = h - R = 8\ \text{m} - 5\ \text{m} = 3$ m.

Avem:

$$r = O_1N = \sqrt{R^2 - OO_1^2} = \sqrt{25 - 9} = 4\ (\text{m}).$$

Atunci, generatoarea conului, VN, este:

$$VN = \sqrt{h^2 + r^2} = 4\sqrt{5}\ \text{m}.$$

Aria totală a conului este:

$$\mathcal{A}_t = \pi r^2 + \pi r G = 16\pi(\sqrt{5} + 1)\ \text{m}^2.$$

Volumul conului este:

$$\mathcal{V} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} = \frac{128\pi}{3}\ \text{m}^3.$$

c) Înălțimile celor 2 calote sînt:

$$h_1 = h_{con} = 8\ \text{m},\ h_2 = 2R - h_{con} = 10 - 8 = 2\ (\text{m}).$$

Atunci ariile celor 2 calote sînt:

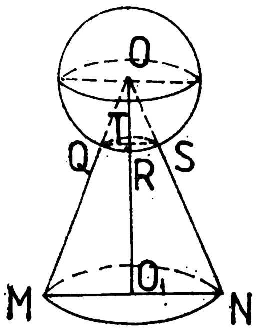
$$\mathcal{A}_1 = 2\pi R h_1 = 2\pi \cdot 5 \cdot 8 = 80\pi\ (\text{m}^2)$$

$$\mathcal{A}_2 = 2\pi R\, h_2 = 2\pi \cdot 5 \cdot 2 = 20\pi\ (\text{m}^2).$$

8.33^{M,PO}**.** Un con circular drept, în care generatoarele fac unghiuri de 30° cu înălțimea, „taie" dintr-o sferă cu centrul în vîrful conului o calotă. Raza sferei fiind R, să se afle aria calotei.

R. Aria calotei este dată de:

$$\mathcal{A} = 2\pi R h,$$



unde $h = TR$. Cum $m(\widehat{SOT}) = 30°$, în triunghiul OST avem:

$OT = OS \cdot \cos 30° = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Deci:

$$TR = OR - OT = R - OT =$$

$$= R - \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} R.$$

Atunci, aria calotei este:

$$\mathscr{A} = 2\pi R \cdot h = 2\pi R^2 \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2} = (2-\sqrt{3})\pi R^2.$$

8.34[M,PO]**.** O piramidă cu baza pătrat de latură a are toate fețele laterale triunghiuri echilaterale. Calculați raza semisferei cu centrul în centrul bazei piramidei și tangentă la fețele laterale ale piramidei.

R. Fie $VABCD$ piramida considerată și O centrul semisferei care coincide cu piciorul perpendicularei din V pe $ABCD$. Fie OE raza în punctul de tangență al semisferei cu fața VBC Atunci dr. $OE \perp$ dr. VF (unde dr. $VF \perp$ dr. BC).

Raza OE este înălțime în triunghiul dreptunghic VOF. Atunci:

$$OE = \frac{VO \cdot OF}{VF}.$$

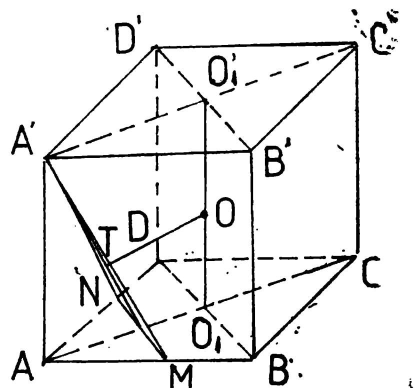
Dar VF este înălțime în triunghiul echilateral VBC, deci $VF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, iar dr. $OF \perp$ dr. BC (din reciproca teoremei celor trei perpendiculare), și deci $OF = \frac{a}{2}$. Atunci:

$$VO = \sqrt{VF^2 - OF^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Raza sferei este

$$R = OE = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

8.35[M,PO]**.** În cubul $ABCDA'B'C'D'$, M este mijlocul muchiei AB, iar N mijlocul lui AD. Să se demonstreze că planul determinat de punctele M, N, A' este tangent la sfera înscrisă în cub.



R. Fie O centrul sferei înscrise în cub. Evident O se află la mijlocul distanței $O_1O'_1$ dintre centrele fețelor $ABCD$ și $A'B'C'D'$. Raza OO_1 a sferei este $\frac{l}{2}$, unde cu l am notat lungimea laturii cubului.

Fie dr. $A'Q \perp$ dr. MN în triunghiul $A'MN$ (care este evident triunghi isoscel, $AM = AN$) și fie dr. $OT \perp (A'MN)$. Atunci T se află pe dr. $A'Q$. Arătăm că OT este egală cu raza sferei, adică $OT = \frac{l}{2}$, de unde va rezulta că planul (AMN) e tangent sferei.

Arătăm că triunghiul OQA' este dreptunghic $(m(\widehat{A'OQ}) = 90°)$, de unde rezultă:

$$OT = \frac{OQ \cdot OA'}{A'Q}.$$

În triunghiul AQA' $(m(\hat{A}) = 90°)$, $A'Q = \sqrt{AQ^2 + A'A^2} = \sqrt{\left(\frac{l\sqrt{2}}{4}\right)^2 + l^2} = \frac{3l\sqrt{2}}{4}$ $\left(\text{deoarece } Q \text{ se află pe } MN \text{ şi deci este la mijlocul lui } AO_1 = \frac{l\sqrt{2}}{2}\right)$.

În triunghiul dreptunghic OO_1Q $(m(\hat{O}_1) = 90°)$, avem:

$$OQ = \sqrt{OO_1^2 + QO_1^2} = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{l\sqrt{6}}{4},$$

iar în triunghiul dreptunghic $OO_1'A'(m(\hat{O}_1')=90°)$:

$$OA' = \sqrt{OO_1'^2 + O_1'A'^2} = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Să observăm că:

$$OQ^2 + OA'^2 = \left(\frac{l\sqrt{6}}{4}\right)^2 + \left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{8}\, l^2 = \left(\frac{3l\sqrt{2}}{4}\right)^2 = A'Q^2$$

şi conform reciprocei teoremei lui PITAGORA, triunghiul OQA' este dreptunghic, cu $m(\widehat{A'OQ}) = 90°$. Atunci, cum dr. $OT \perp$ dr. $A'Q$, avem:

$$OT = \frac{OQ \cdot OA'}{A'Q} = \frac{\frac{l\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{3l\sqrt{2}}{4}} = \frac{l}{2}.$$

Deci $OT = R$, R fiind raza sferei înscrise.

8.36^M. Dacă două cercuri necoplanare au două puncte comune, atunci ele sînt situate pe aceeaşi sferă.

R. Se poate arăta că cercurile sînt situate pe o aceeaşi sferă chiar dacă ele sînt tangente.

Fie $\mathscr{C}(O_1, r_1)$ şi $\mathscr{C}_2(O_2, r_2)$ cele două cercuri necoplanare care se intersectează după segmentul MN ($M = N$ dacă cercurile sînt tangente).

Fie π_1 şi π_2 planele ce conţin cercurile $\mathscr{C}_1$ şi $\mathscr{C}_2$. Ele se intersectează după dreapta MN. Arătăm că cele două cercuri aparţin la o sferă.

Fie Q mijlocul lui (MN). Atunci dr. $O_1Q \perp$ dr. MN şi dr. $O_2Q \perp$ dr. MN. O sferă ce conţine pe suprafaţa ei circumferinţa cercului $\mathscr{C}_1$ are centrul pe perpendiculara d_1 ridicată din O_1 pe planul π_1 La fel, o sferă ce trece prin cercul $\mathscr{C}_2$ are centrul pe perpendiculara d_2 ridicată în O_2 pe planul π_2 Cum d_1 şi d_2 se află în planul mediator al segmentului MN, ele sînt coplanare şi se intersectează într-un punct O. Evident $(OM) \equiv (ON)$. (O se află în planul mediator al lui MN). Atunci sfera de centru O şi rază OM conţine cercurile $\mathscr{C}_1$ şi $\mathscr{C}_2$.

8.37$^{\mathrm{M}}$. Piramida $VABCD$ are baza $ABCD$ dreptunghi. Din C considerăm dr. $CP \perp$ dr. VA ($P \in$ dr. AV), iar din D considerăm dr. $DQ \perp$ dr. VB ($Q \in$ dr. BV). Demonstraţi că $PQBA$ este un patrulater inscriptibil.

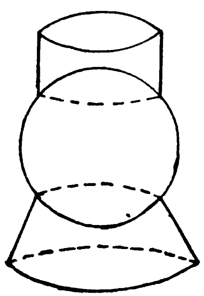
R. Arătăm că punctele A, B, P, Q sînt egal depărtate de O, piciorul perpendicularei din V pe $(ABCD)$, deci ele se vor afla pe sfera de centru O şi se află pe un cerc, adică patrulaterul $ABQP$ este inscriptibil.

În triunghiul dreptunghic APC ($\hat{P}$ are 90°), O este mijlocul ipotenuzei AC, şi deci (PO) e mediană. Cum mediana din vîrful opus ipotenuzei într-un triunghi dreptunghic are lungimea egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei, avem $(PO) \equiv (AO)$. Analog în triunghiul BQD, $(OQ) \equiv (OB)$. Dar $(AO) \equiv (OB)$ (O fiind punctul de intersecţie al diagonalelor dreptunghiului $ABCD$). Deci:

$$(AO) \equiv (OB) \equiv (OQ) \equiv (OP)$$

de unde rezultă afirmaţia făcută la începutul demonstraţiei.

8.38$^{\mathrm{PO}}$. O piesă de forma celei din figura alăturată, se nichelează cu un strat gros de 0,2 mm de nichel. Ştim că înălţimea fiecărei părţi care compune piesa este aceeaşi şi este egală cu 8 cm. Raza cilindrului este egală cu raza bazei mici a trunchiului de con. Raportul bazelor trunchiului de con este $\frac{3}{5}$ iar diferenţa lor este 4 cm. Aflaţi, cu aproximaţie, cîţi cm^3 de nichel se folosesc.



R. Aflăm razele trunchiului de con:

$$\begin{cases} \dfrac{r}{R} = \dfrac{3}{5} \\ R - r = 4 \end{cases}$$

de aici rezultă: $R = 10$ cm şi $r = 6$ cm.
Aflăm raza sferei din care face parte zona:

$$R_z^2 = 4^2 + 6^2 \text{ sau } R_z = 2\sqrt{13} \text{ cm.}$$

Aflăm generatoarea trunchiului de con:

$$G^2 = 4^2 + 8^2 = 4\sqrt{5}\text{(cm)}.$$

Aflăm aria totală a piesei. Avem:

$$\mathcal{A}_t = \pi \cdot [6^2 + 2 \cdot 6 \cdot 8 + 2 \cdot 2\sqrt{13} \cdot 8 + 4\sqrt{5} \cdot (10 + 6) + 10^2] = 1540{,}86 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Aflăm volumul nichelului necesar. Obţinem relaţia:

$$\mathcal{V} = 1540{,}86 \cdot 0{,}02 = 30{,}8172 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

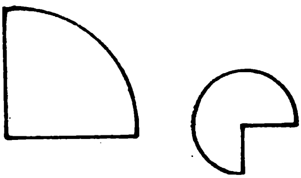
Deci, aproximativ, se folosesc 31 cm^3 de nichel.

8.39$^{\mathrm{PO}}$. Sectoarele de cerc din figura alăturată au razele de a cm respectiv $\frac{a}{3}$ cm şi „unghiurile la centru" de 90° respectiv 270°.

a) Confecţionaţi din ele două suprafeţe conice.

b) Verificaţi dacă cercurile de la bazele celor două suprafeţe conice sînt egale.

c) Aflaţi volumul corpului format de cele două suprafeţe conice, avînd lipite cercurile lor de la bază.



R. b) Aflăm razele cercurilor de la bază: Avem:

$$\frac{a\pi}{2} = 2r_1\pi, \text{ de unde } r_1 = \frac{a}{4};$$

$$\frac{\frac{a}{3}\cdot 270\,\pi}{180} = 2r_2\pi, \text{ de unde } r_2 = \frac{a}{4};$$

razele ambelor cercuri fiind $\frac{a}{4}$, cercurile sînt deci de lungimi egale.

c) Volumul corpului format este:

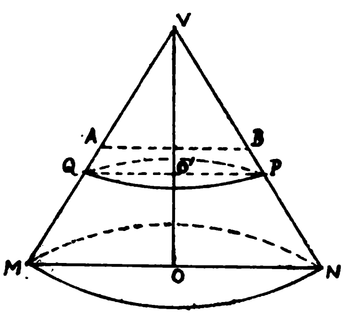
$$\mathcal{V} = \pi\frac{a^2}{48}\left(\sqrt{\frac{15a^2}{16}} + \sqrt{\frac{7a^2}{144}}\right) = \frac{a^3}{576}(3\sqrt{15} + \sqrt{7})\,\pi\ (\text{cm}^3).$$

8.40^M. Secţiunea axială a unui con circular drept este un triunghi isoscel al cărui perimetru este de 18 cm, iar lungimea segmentului care „uneşte" mijloacele laturilor congruente ale triunghiului este de 4 cm. În con se face o secţiune printr-un plan paralel cu baza, situat faţă de vîrf, la 2/3 din înălţimea conului. Se cere:

a) să se calculeze aria totală şi aria laterală a conului iniţial.

b) să se arate că volumul conului iniţial este de 16π cm².

c) să se calculeze aria laterală şi volumul trunchiului de con obţinut.



R. Fie (AB) linie mijlocie în triunghiul VMN. Cum $AB = 4$ cm, rezultă $MN = 8$ cm şi raza bazei conului este $R = OM = 4$ cm. Deoarece perimetrul triunghiului VMN este $\mathcal{P} = VM + VN + MN = 18$ cm, $((VM) \equiv (VN))$:

$$VM = \frac{18-8}{2} = 5\ (\text{cm}).$$

Înălţimea VO a conului este:

$$VO = \sqrt{VM^2 - OM^2} = 3\ (\text{cm}).$$

Aria laterală a conului este:

$$\mathcal{A}_l = \pi RG = \pi \cdot OM \cdot VM = 20\pi\ (\text{cm}^2).$$

Aria totală are expresia:

$$\mathcal{A}_t = \pi R^2 + \mathcal{A}_l = 16\pi + 20\pi = 36\,\pi\ (\text{cm}^2).$$

b) Volumul conului este dat de:

$$\mathcal{V} = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 16 \cdot 3}{3} = 16\,\pi\ (\text{cm}^3).$$

c) Înălţimea trunchiului de con este:

$$OO' = VO - VO' = VO - \frac{2}{3} VO = 1 \text{ (cm)}.$$

Determinăm raza bazei mici a trunchiului de con şi generatoarea, folosind asemănarea triunghiurilor $VO'P$ şi VON. Avem:

$$\frac{VO'}{VO} = \frac{O'P}{ON} = \frac{VP}{VN}$$

de unde, rezultă: $$r = O'P = \frac{8}{3} \text{ cm}; \ G = VN - VP = 5 - \frac{10}{3} = \frac{5}{3} \text{ (cm)}.$$

Deci: $$\mathcal{V} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + R \cdot r) = \frac{\pi \cdot OO'}{3}\left(16 + \frac{64}{9} + \frac{32}{3}\right) = \frac{304}{27}\pi (\text{cm}^3).$$

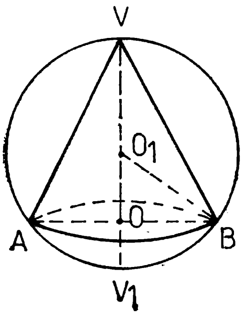
şi: $$\mathcal{A}_l = \pi(R + r)G = \frac{100\pi}{9} \text{ (cm}^2).$$

8.41$^{\text{M,PO}}$. Un trunchi de con are generatoarea de 26 cm, raza bazei mari de 15 cm şi înălţimea de 24 cm.

a) Să se determine volumul şi aria totală a trunchiului de con.

b) Să se calculeze volumul conului, din care provine trunchiul de con.

c) Să se calculeze raza sferei circumscrise conului din care provine trunchiul de con.



R. a) Înălţimea trunchiului de con este $OO' = 24$ cm şi considerînd dr. $CC' \parallel$ dr. OO', din triunghiul dreptunghic $CC'B$, avem:

$$C'B = \sqrt{CB^2 - CC'^2} = 10 \text{ cm}$$

Raza bazei mici a trunchiului de con este:

$$r = O'C = OC' = OB - C'B = 15 - 10 = 5 \text{ (cm)}.$$

Volumul trunchiului şi aria sa sînt:

$$\mathcal{V} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + R \cdot r) = \frac{\pi \cdot 24}{3}(15^2 + 5^2 + 15 \cdot 5) = 2600\pi \text{ (cm}^3).$$

$$\mathcal{A} = \pi(R + r)G = 520\pi \text{ (cm}^2).$$

b) Fie VAB conul din care provine trunchiul. Deoarece triunghiurile VOB şi $CC'B$ sînt asemenea, avem:

$$\frac{VO}{CC'} = \frac{OB}{C'B}$$

de unde: $$VO = \frac{24 \cdot 15}{10} = 36 \text{(cm)},$$

şi volumul conului VAB este:

$$\mathcal{V} = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 15^2 \cdot 36}{3} = 2700\pi (\text{cm}^3).$$

c) Să „prelungim" pe VO pînă intersectează sfera în punctul V_1 şi fie O_1 centrul sferei. Triunghiul VBV_1 este dreptunghic în B fiind înscris într-un semicerc (VV_1 diametru al sferei). Din teorema catetei aplicată în triunghiul VBV_1, avem:

$$VB^2 = VO \cdot VV_1$$

sau: $$G^2 = 2R_{sf} \cdot h_{con}.$$

Deci: $$R_{sf} = \frac{G^2}{2h_{con}},$$

adică, înlocuind, $R_{sf} = \dfrac{169}{18}$ cm.

CUPRINS

		Pag.
Secţiunea a IV-a : clasa a VI-a		
	ALGEBRA	
Capitolul I :	Probleme recapitulative din clasa a V-a .	3
Capitolul II :	Rapoarte şi proporţii	28
Capitolul III :	Operaţii cu numere întregi şi raţionale	32
Capitolul IV :	Extragerea rădăcinii pătrate	69
Capitolul V :	Monoame şi polinoame. Ecuaţii de gradul I cu o necunoscută	72
	GEOMETRIE	
Capitolul I :	Introducere intuitivă în geometria plană	81
Capitolul II :	Geometria bazată pe judecată (raţionament)	112
Secţiunea a V-a : clasa a VII-a		
	ALGEBRĂ	
Capitolul I :	Numere reale	136
Capitolul II :	Funcţii	147
Capitolul III :	Calculul algebric . . .	153
Capitolul IV :	Ecuaţii şi sisteme de euaţii . .	164
Capitolul V :	Exercitii şi probleme recapitulative .	171
	GEOMETRIE	
Capitolul I :	Cercul	185
Capitolul II :	Relaţii metrice . .	198
Capitolul III :	Arii	231
Capitolul IV :	Probleme recapitulative şi de sinteză .	249

Secţiunea a VI-a : clasa a VIII-a

ALGEBRĂ

Capitolul I :	Numere reale	276
Capitolul II :	Inecuaţii şi sisteme de inecuaţii . . .	282
Capitolul III :	Funcţii	291
Capitolul IV :	Polinoame	303
Capitolul V :	Fracţii algebrice raţionale	321
Capitolul VI :	Ecuaţii şi sisteme de inecuaţii	342
Capitolul VII :	Ecuaţii de gradul al II-lea	362
Capitolul VIII :	Exerciţii recapitulative	371

GEOMETRIE

Geometrie în spaţiu 383

NOTĂ :

Lucrarea (cele două părţi) a fost concepută de un colectiv format din **Constantin Cărbunaru, Ion Cheşcă, Alexandrina Dumitru, Adrian Ghioca, Laurenţiu Gîrbă, Valeriu Mangu, Adrian Negru, Julia Sebestyén,** acad. **Nicolae Teodorescu** şi **Mircea Trifu.** Partea I a fost elaborată efectiv de : **Constantin Cărbunaru, Ion Cheşcă, Alexandrina Dumitru, Valeriu Mangu, Adrian Negru, Julia Sebestyén** şi acad. **Nicolae Teodorescu,** iar partea a II-a, de faţă, de către : **Constantin Cărbunaru, Ion Cheşcă, Valeriu Mangu, Adrian Negru şi Julia Sebestyén.**

Vol. II: partea I + partea a II-a lei 63